

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202407035

上半平面上  $\alpha$ -Bloch 空间的刻画

陈娇, 胡春英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 利用 Schwarz-Pick 引理, 得到上半平面上 Bloch 空间的性质。给出  $0 < \alpha \leq 2$  条件下上半平面上  $\alpha$ -Bloch 空间的一个刻画, 并借助具体实例验证结论的正确性。结果表明: 文中结果将已有的有界区域上的相应结果推广至无界区域上。

**关键词:** 上半平面; Bloch 空间;  $\alpha$ -Bloch 函数;  $\alpha$ -Bloch 空间

**中图分类号:** O 174.56

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5013(2025)04-0476-05

Characterization of  $\alpha$ -Bloch Space on Upper Half-Plane

CHEN Jiao, HU Chunying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The property of the Bloch space on the upper half-plane is obtained by using Schwarz-Pick lemma. One characterization of  $\alpha$ -Bloch space on the upper half-plane under the condition of  $0 < \alpha \leq 2$  is given, and the conclusion is verified by specific examples. The results show that the proposed results extend the corresponding results on existing bounded domain to unbounded domain.

**Keywords:** upper half-plane; Bloch space;  $\alpha$ -Bloch function;  $\alpha$ -Bloch space

## 1 预备知识

记  $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$  为复平面  $\mathbf{C}$  上的单位圆盘,  $\Pi^+ = \{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z > 0\}$  为复平面  $\mathbf{C}$  上的上半平面,  $H(D)$  与  $H(\Pi^+)$  分别为  $D$  与  $\Pi^+$  上的全纯函数全体,  $H^\infty(D)$  与  $H^\infty(\Pi^+)$  分别为  $D$  与  $\Pi^+$  上的有界全纯函数全体。用  $\text{Aut}(D)$  表示  $D$  上的全纯自同构群, 即

$$\text{Aut}(D) = \left\{ e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a \in D, \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

用  $\text{Aut}(\Pi^+)$  表示  $\Pi^+$  上的全纯自同构群, 即

$$\text{Aut}(\Pi^+) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad-bc=1 \right\}.$$

1980 年, Timoney<sup>[1]</sup> 最早提出单位球上 Bloch 空间的定义。之后, 许多学者采用微分形式、积分形式、Carleson 测度等各种方法来刻画 Bloch 空间<sup>[2-11]</sup>。而  $\alpha$ -Bloch 空间拓展了 Bloch 空间的研究范围。1993 年, Zhu<sup>[12]</sup> 给出  $\alpha$ -Bloch 空间的如下定义。

**定义 1** 设  $\alpha > 0$ ,  $f \in H(D)$ , 若  $f'$  满足

$$\|f\|_{B^\alpha(D)} = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty,$$

**收稿日期:** 2024-07-29

**通信作者:** 胡春英(1979-), 女, 讲师, 主要从事复分析的研究。E-mail: huchunying\_79@sina.com。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(12071161); 福建省自然科学基金资助项目(2023J01127)

则称  $f$  为  $D$  上的  $\alpha$ -Bloch 函数。所有这样函数之集称为  $D$  上的  $\alpha$ -Bloch 空间, 记为  $B^\alpha(D)$ 。

特别地, 若  $\alpha=1$ , 则  $B^1(D)=B(D)$  为  $D$  上经典的 Bloch 空间。

**注 1** 在  $\|\cdot\|_{B^\alpha(D)}$  下,  $B^\alpha(D)/\mathbb{C}$  成为一个 Bloch 空间。

**定义 2** 设  $\alpha>0, f\in H(\Pi^+)$ , 若  $f'$  满足

$$\|f\|_{B^\alpha(\Pi^+)} = \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z)^\alpha |f'(z)| < \infty,$$

则称  $f$  为  $\Pi^+$  上的  $\alpha$ -Bloch 函数。所有这样函数集称为  $\Pi^+$  上的  $\alpha$ -Bloch 空间, 记为  $B^\alpha(\Pi^+)$ 。

特别地, 若  $\alpha=1$ , 则  $B^1(\Pi^+)=B(\Pi^+)$ ,  $B(\Pi^+)$  首先由 Sharma 等<sup>[13]</sup> 给出。

## 2 Bloch 空间

Zhu<sup>[14]</sup> 给出单位圆盘  $D$  上 Bloch 空间有如下性质。

**定理 1** 设  $f\in B(D)$ , 则存在以下 2 个结论。

1) 若  $\varphi:D\rightarrow D$  为全纯函数, 则  $\|f\circ\varphi\|_{B(D)}\leq\|f\|_{B(D)}$ , 而且当  $\varphi\in\operatorname{Aut}(D)$  时,

$$\|f\circ\varphi\|_{B(D)}=\|f\|_{B(D)}。$$

2)  $H^\infty(D)\subsetneq B(D)$ 。

文中证明了  $B(\Pi^+)$  上有类似的性质。

**定理 2** 设  $f\in B(\Pi^+)$ , 则有以下 2 个结论。

1) 若  $\varphi:\Pi^+\rightarrow\Pi^+$  为全纯函数, 则  $\|f\circ\varphi\|_{B(\Pi^+)}\leq\|f\|_{B(\Pi^+)}$ , 而且当  $\varphi\in\operatorname{Aut}(\Pi^+)$  时,

$$\|f\circ\varphi\|_{B(\Pi^+)}=\|f\|_{B(\Pi^+)}。$$

2)  $H^\infty(\Pi^+)\subsetneq B(\Pi^+)$ 。

证明: 1) 由 Schwarz-Pick 引理可得

$$\frac{|\varphi'(z)|}{\operatorname{Im} \varphi(z)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}, \quad \forall z\in\Pi^+。$$

上式中: 等号对某点  $z\in\Pi^+$  成立当且仅当  $\varphi\in\operatorname{Aut}(\Pi^+)$ 。

故有

$$\begin{aligned} \|f\circ\varphi\|_{B(\Pi^+)} &= \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) |(\varphi\circ f)'(z)| = \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) |\varphi'(z)| |f'(\varphi(z))| \\ &\leq \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} \varphi(z)) |f'(\varphi(z))| = \sup_{w\in\Pi^+} (\operatorname{Im} w) |f'(w)| = \|f\|_{B(\Pi^+)}。 \end{aligned}$$

从而  $\|f\circ\varphi\|_{B(\Pi^+)}\leq\|f\|_{B(\Pi^+)}$ 。

当  $\varphi\in\operatorname{Aut}(\Pi^+)$  时,  $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d\in\mathbf{R}, ad-bc=1$ , 故

$$\|f\circ\varphi\|_{B(\Pi^+)}=\|f\|_{B(\Pi^+)}。$$

2) 当  $f\in H^\infty(\Pi^+)$  时, 设  $|f(z)|\leq 1, z\in\Pi^+$ , 由 Schwarz-Pick 引理可得

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}, \quad \forall z\in\Pi^+。$$

从而  $\sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) |f'(z)| \leq \sup_{z\in\Pi^+} (1-|f(z)|^2) \leq 1$ , 即  $f\in B(\Pi^+)$ , 这表明  $H^\infty(\Pi^+)\subset B(\Pi^+)$ 。

现取  $f(z)=\log(1-iz), z\in\Pi^+$ , 则  $f\notin H^\infty(\Pi^+)$ 。但

$$\sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) |f'(z)| = \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) \left| \frac{i}{1-iz} \right| \leq \sup_{z\in\Pi^+} (\operatorname{Im} z) \frac{1}{1+\operatorname{Im} z} \leq 1,$$

即  $f\in B(\Pi^+)$ 。故  $H^\infty(\Pi^+)\subsetneq B(\Pi^+)$ 。

## 3 $\alpha$ -Bloch 空间的刻画

1986 年, Holland 等<sup>[15]</sup> 给出了单位圆盘  $D$  上 Bloch 空间的一种刻画。

**定理 3**  $f\in B(D)$  当且仅当

$$\sup_{\substack{u, v\in D \\ u\neq v}} \left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right| \sqrt{1-|u|^2} \sqrt{1-|v|^2} < \infty。$$

2007 年,Zhao<sup>[16]</sup>得到满足  $0<\alpha\leqslant 2$  条件下的单位圆盘  $D$  上  $\alpha$ -Bloch 空间的刻画。

**定理 4** 设  $0<\alpha\leqslant 2$ ,若实数  $\lambda$  满足

$$\left. \begin{aligned} 0\leqslant \lambda\leqslant \alpha, & \quad 0<\alpha<1, \\ 0<\lambda<1, & \quad \alpha=1, \\ \alpha-1\leqslant \lambda\leqslant 1, & \quad 1<\alpha\leqslant 2, \end{aligned} \right\}$$

则  $f\in B^{\alpha}(D)$  当且仅当

$$\sup_{\substack{z,w\in D\\ z\neq w}}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|(1-|z|^2)^{\lambda}(1-|w|^2)^{\alpha-\lambda}<\infty。$$

下面给出上半平面  $\Pi^+$  上  $\alpha$ -Bloch 空间的刻画。

**定理 5** 设  $0<\alpha\leqslant 2$ ,若实数  $\lambda$  满足

$$\left. \begin{aligned} 0\leqslant \lambda\leqslant \alpha, & \quad 0<\alpha<1, \\ 0<\lambda<1, & \quad \alpha=1, \\ \alpha-1\leqslant \lambda\leqslant 1, & \quad 1<\alpha\leqslant 2, \end{aligned} \right\}$$

则  $f\in B^{\alpha}(\Pi^+)$  当且仅当

$$\sup_{\substack{z,w\in \Pi^+\\ z\neq w}}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|(\operatorname{Im} z)^{\lambda}(\operatorname{Im} w)^{\alpha-\lambda}<\infty。$$

为了证明定理 5,引入引理 1。

**引理 1**<sup>[16]</sup> 设  $0<\alpha\leqslant 2$ ,若  $\lambda\in\mathbf{R}$  满足

$$\left. \begin{aligned} 0\leqslant \lambda\leqslant \alpha, & \quad 0<\alpha<1, \\ 0<\lambda<1, & \quad \alpha=1, \\ \alpha-1\leqslant \lambda\leqslant 1, & \quad 1<\alpha\leqslant 2, \end{aligned} \right\}$$

则存在  $M>0$ ,使

$$H(x,y)=\frac{x^{\lambda}y^{\alpha-\lambda}}{y-x}\int_x^y\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{\alpha}}\leqslant M,$$

对  $\forall x,y>0,x\neq y$  都成立。

**注 2**  $H\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\frac{x^{-\lambda}y^{\lambda-\alpha}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{\alpha}}\stackrel{\tau=\frac{1}{u}}{=} \frac{x^{1-\lambda}y^{1+\lambda-\alpha}}{y-x}\int_x^y\frac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}}。$

定理 5 的证明。1) 充分性。记  $L=\sup_{\substack{z,w\in \Pi^+\\ z\neq w}}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|(\operatorname{Im} z)^{\lambda}(\operatorname{Im} w)^{\alpha-\lambda}$ ,则  $L<\infty$ 。从而  $\forall z,w\in \Pi^+,z\neq w$ ,都有

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|(\operatorname{Im} z)^{\lambda}(\operatorname{Im} w)^{\alpha-\lambda}\leqslant L。$$

令  $w\rightarrow z$ ,可得  $|f'(z)|(\operatorname{Im} z)^{\alpha}\leqslant L$ ,从而

$$\sup_{z\in \Pi^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha}|f'(z)|\leqslant L<\infty,$$

即  $f\in B^{\alpha}(\Pi^+)$ 。

2) 必要性。设  $f\in B^{\alpha}(\Pi^+)$ ,则有  $\|f\|_{B^{\alpha}(\Pi^+)}=\sup_{z\in \Pi^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha}|f'(z)|<\infty$ 。

记  $\Phi(t)=f(tw+(1-t)z),\forall z,w\in \Pi^+,z\neq w$ ,则  $\Phi'(t)=(w-z)f'(tw+(1-t)z)$ 。由于

$$\begin{aligned} |f(w)-f(z)|&=|\Phi(1)-\Phi(0)|=\left|\int_0^1\Phi'(t)\mathrm{d}t\right|=\\ &|w-z|\left|\int_0^1f'(tw+(1-t)z)\mathrm{d}t\right|\leqslant\\ &|w-z|\int_0^1|f'(tw+(1-t)z)|\mathrm{d}t\leqslant\\ &|w-z|\|f\|_{B^{\alpha}(\Pi^+)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{[\operatorname{Im}(tw+(1-t)z)]^{\alpha}}。 \end{aligned}$$

当  $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$  时,  $|f(w) - f(z)| \leq |w - z| \|f\|_{B^a(\Pi^+)} \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^a}$ , 可得

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| (\operatorname{Im} z)^a \leq \|f\|_{B^a(\Pi^+)} < \infty.$$

当  $\operatorname{Im} z \neq \operatorname{Im} w$  时,  $|f(w) - f(z)| \leq |w - z| \|f\|_{B^a(\Pi^+)} \frac{1}{\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} z} \int_{\operatorname{Im} z}^{\operatorname{Im} w} \frac{d\tau}{\tau^a}.$

由引理 1 可得

$$\frac{1}{\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} z} \int_{\operatorname{Im} z}^{\operatorname{Im} w} \frac{d\tau}{\tau^a} \leq \frac{M}{(\operatorname{Im} z)^\lambda (\operatorname{Im} w)^{a-\lambda}}.$$

于是

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| (\operatorname{Im} z)^\lambda (\operatorname{Im} w)^{a-\lambda} \leq M \|f\|_{B^a(\Pi^+)} < \infty.$$

故

$$\sup_{\substack{z, w \in \Pi^+ \\ z \neq w}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| (\operatorname{Im} z)^\lambda (\operatorname{Im} w)^{a-\lambda} < \infty.$$

定理 5 有以下 2 个推论。

**推论 1** 设  $0 < a \leq 2$ , 则  $f \in B^a(\Pi^+)$  当且仅当

$$\sup_{\substack{z, w \in \Pi^+ \\ z \neq w}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| (\operatorname{Im} z)^{\frac{a}{2}} (\operatorname{Im} w)^{\frac{a}{2}} < \infty.$$

**推论 2** 设  $0 < a < 1$ , 则  $f \in B^a(\Pi^+)$  当且仅当

$$\sup_{\substack{z, w \in \Pi^+ \\ z \neq w}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| (\operatorname{Im} z)^a < \infty.$$

## 4 验证实例

**例 1**  $f(z) = \log\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}iz\right), z \in \Pi^+.$

易知  $f \in B(\Pi^+)$ , 事实上,

$$\sup_{z \in \Pi^+} (\operatorname{Im} z) |f'(z)| = \sup_{z \in \Pi^+} (\operatorname{Im} z) \left| \frac{\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}iz} \right| \leq \sup_{z \in \Pi^+} (\operatorname{Im} z) \frac{1}{1 + \operatorname{Im} z} \leq 1.$$

注意到

$$\left| \frac{f(z) - f(i)}{z - i} \right| \operatorname{Im} z = \left| \frac{\log\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}iz\right)}{z - i} \right| \operatorname{Im} z.$$

取  $z = yi (y > 0, y \neq 1)$ , 则

$$\left| \frac{f(yi) - f(i)}{yi - i} \right| \operatorname{Im} (yi) = y \left| \frac{\log \frac{1+y}{2}}{y-1} \right| \rightarrow \infty (y \rightarrow +\infty).$$

从而

$$\sup_{\substack{z, w \in \Pi^+ \\ z \neq w}} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \operatorname{Im} z \geq \sup_{\substack{z \in \Pi^+ \\ z \neq i}} \left| \frac{f(z) - f(i)}{z - i} \right| \operatorname{Im} z \rightarrow \infty.$$

这表明, 当  $a=1, \lambda=1$  时, 定理 5 不成立。

**例 2** 设  $1 < a \leq 2, f(z) = z^{1-a}, z \in \Pi^+.$

易知  $f \in B^a(\Pi^+)$ , 事实上, 由  $f'(z) = (1-a)z^{-a}$ , 可得

$$\sup_{z \in \Pi^+} (\operatorname{Im} z)^a |f'(z)| = (a-1) \sup_{z \in \Pi^+} (\operatorname{Im} z)^a \frac{1}{|z|^a} \leq 1.$$

注意到,当  $0<\lambda<\alpha-1$  时,

$$\left|\frac{f(z)-f(i)}{z-i}\right|(\operatorname{Im} z)^{\lambda}=\left|\frac{z^{1-\alpha}-i^{1-\alpha}}{z-i}\right|(\operatorname{Im} z)^{\lambda}.$$

取  $z=yi(y>0,y\neq 1)$ , 则

$$\left|\frac{f(yi)-f(i)}{yi-i}\right|(\operatorname{Im}(yi))^{\lambda}=y^{\lambda}\left|\frac{(yi)^{1-\alpha}-i^{1-\alpha}}{y-1}\right|=y^{\lambda}\left|\frac{y^{1-\alpha}-1}{y-1}\right|\rightarrow\infty(y\rightarrow 0^{+}).$$

这表明,当  $1<\alpha\leq 2,0<\lambda<\alpha-1$  时,定理 5 不成立。

当  $\lambda>1$  时,取  $z=yi(y>0,y\neq 1)$ , 则

$$\left|\frac{f(yi)-f(i)}{yi-i}\right|(\operatorname{Im}(yi))^{\lambda}=y^{\lambda}\left|\frac{y^{1-\alpha}-1}{y-1}\right|\rightarrow\infty(y\rightarrow+\infty).$$

这表明,当  $1<\alpha\leq 2,\lambda>1$  时,定理 5 不成立。

参考文献:

[1] TIMONEY R M. Bloch functions in several complex variables ( I ) [J]. Bulletin of the London Mathematical Society,1980,12(4):241-267. DOI:10. 1112/BLMS/12. 4. 241.

[2] TIMONEY R M. Bloch functions in several complex variables ( II ) [J]. Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik,1980,319:1-22. DOI:10. 1515/crll. 1980. 319. 1.

[3] CHOE J S,KIM H O,PARK Y Y. A Bergman-Carleson measure characterization of Bloch functions in the unit ball of  $\mathbf{C}^n$  [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society,1992,29(2):285-293.

[4] JEVTIC M,PAVLOVIC M. On  $m$ -harmonic Bloch space [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1995,123(5):1385-1392. DOI:10. 2307/2161125.

[5] OUYANG Caiheng,YANG Weisheng,ZHAO Ruhan. Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of  $\mathbf{C}^n$  [J]. Transactions of the American Mathematical Society,1995,347(11):4301-4313. DOI:10. 2307/2155039.

[6] STROETHOFF K. The Bloch space and Besov spaces of analytic functions [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1996,54(2):211-219. DOI:10. 1017/S0004972700017676.

[7] NOWAK M. Bloch space and Möbius invariant Besov spaces on the unit ball of  $\mathbf{C}^n$  [J]. Complex Variables, Theory and Application: An International Journal,2001,44(1):1-12. DOI:10. 1080/17476930108815339.

[8] OHNO S,STROETHOFF K,ZHAO Ruhan. Weighted composition operators between Bloch-type spaces [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics,2003,33(1):191-215. DOI:10. 1216/RMJM/1181069993.

[9] REN Guangbin,TU Caifeng. Bloch space in the unit ball of  $\mathbf{C}^n$  [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2005,133(3):719-726. DOI:10. 1090/S0002-9939-04-07617-8.

[10] WULAN Hasi,ZHU Kehe. Bloch and BMO functions in the unit ball [J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2008,53(11):1009-1019. DOI:10. 1080/17476930802429123.

[11] ZHAO Ruhan. Essential norms of composition operators between Bloch type spaces [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2010,138(7):2537-2546. DOI:10. 1090/S0002-9939-10-10285-8.

[12] ZHU Kehe. Bloch type spaces of analytic functions [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics,1993,23(3):1143-1177. DOI:10. 1216/rmj/1181072549.

[13] SHARMA A K,UEKI S I. Compact composition operators on the Bloch space and the Growth space of the upper half-plane [J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2017,14:1-9. DOI:10. 1007/s00009-017-0849-2.

[14] ZHU Kehe. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York:Springer,2005.

[15] HOLLAND F,WALSH D. Criteria for membership of Bloch space and its subspace, BMOA [J]. Mathematische Annalen,1986,273:317-335. DOI:10. 1007/BF01451410.

[16] ZHAO Ruhan. A characterization of Bloch-type spaces on the unit ball of  $\mathbf{C}^n$  [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2007,330:291-297. DOI:10. 1016/j. jmaa. 2006. 06. 100.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)