DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202404043

Burgers-Huxley 方程的精确行波解

贾惠临,温振庶,张晓雅

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 分别采用(G'/G)-展开法和 F-展开法,得到 Burgers-Huxley 方程各种形式的精确行波解。研究结果表明:(G'/G)-展开法只能得到 Burgers-Huxley 方程在 $\lambda^2-4\mu>0$ 时的解,而 F-展开法只能得到 Burgers-Huxley 方程在某些特殊情况下的解。

关键词: Burgers-Huxley 方程;(G'/G)-展开法;F-展开法;精确行波解

中图分类号: O 175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2025)04-0470-06

Exact Traveling Wave Solutions of Burgers-Huxley Equation

JIA Huilin, WEN Zhenshu, ZHANG Xiaoya

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Various kinds of exact traveling wave solutions of Burgers-Huxley equation by using (G/G)-expansion method and F-expansion method are obtained respectively. The research results show that one can only obtain the solutions of Burgers-Huxley equation under the condition $\lambda^2-4\mu>0$ by (G/G)-expansion method, while one can only find the solutions of Burgers-Huxley equation under some special conditions by F-expansion method.

Keywords: Burgers-Huxley equation; (G'/G)-expansion method; F-expansion method; exact traveling wave solution

1 预备知识

Burgers-Huxley(BH)方程是一类重要的非线性反应扩散方程,其形式为

$$u_t+pu_x-u_{xx}+qu(u-1)(u-s)=0。 \tag{1}$$

式(1)中:p,q,s 均为非零常数。

BH 方程(1)的解及其性态研究具有重要的理论和应用价值。目前,已经得到 BH 方程(1)的部分精确解。Fan[1]通过符号计算,得到 BH 方程(1)的一些精确解。Yefimova 等[2]通过 Cole-Hopf 变换,得到 BH 方程(1)的部分解。基于首次积分法,刘新源等[3]得到 BH 方程(1)的部分精确解和隐式解。从动力系统的角度[4-5],王勤龙等[6]对 BH 方程(1)的行波解进行研究。基于齐次平衡法,詹雨等[7]得到 BH 方程(1)的几种不同形式的行波解;夏鸿鸣等[8]尝试选择适当的试探函数,得到 BH 方程(1)的扭状孤波解和奇异行波解。Kushner 等[9]基于 BH 方程(1)的动力学,构造其部分精确解。虽然已经找到了 BH 方程(1)的部分解,但基于新的方法可能会找到新的解。基于此,本文分别采用(G'/G)-展开法[10]和 F-展开法[11],得到了 BH 方程(1)的各种形式的精确行波解。

收稿日期: 2024-04-20

通信作者: 温振庶(1984-),男,教授,博士,博士生导师,主要从事微分方程与动力系统的研究。E-mail:wenzhenshu@hqu.edu.cn。

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2021J01302)

为了研究 BH 方程(1)的行波解，利用变换 $u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=x-ct$，将 BH 方程(1)写为

$$-cu'+pu'-u''+qu(u-1)(u-s)=0。\tag{2}$$

2　利用(G'/G)-展开法求解 BH 方程(1)

假定 $u(\xi)$可以展开为关于(G'/G)的多项式，有

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,(G'/G)^i,\qquad a_m\neq 0。\tag{3}$$

式(3)中：$a_0,a_1,\cdots,a_m$ 为待确定的常数，且 $G=G(\xi)$，满足

$$G''+\lambda G'+\mu G=0。\tag{4}$$

式(4)中：λ,μ 为常数。

关于方程(4)的解，可参考文献[10]的式(18)～(20)。利用 u''与 $u(u-1)(u-s)$之间的齐次平衡，可得式(3)中的最高次幂为 $m=1$。把式(3)代入式(2)，并利用式(4)，可得

$$a_1(a_1^2q-2)(G'/G)^3+a_1(c-p-3\lambda+qa_1(3a_0-1-s))(G'/G)^2+(a_1(c-p-\lambda)\lambda-2a_1\mu+ qa_1(3a_0^2-2a_0(1+s)+s))(G'/G)+a_1(c-p-\lambda)\mu+qa_0(a_0-1)(a_0-s)=0。\tag{5}$$

令式(5)中$(G'/G)^k(k=0,1,2,3)$的系数为零，可得

$$\left.\begin{aligned}&a_1(c-p-\lambda)\mu+qa_0(a_0-1)(a_0-s)=0,\\&a_1(c-p-\lambda)\lambda-2a_1\mu+qa_1(3a_0^2-2a_0(1+s)+s)=0,\\&a_1(c-p-3\lambda+qa_1(3a_0-1-s))=0,\\&a_1(a_1^2q-2)=0。\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

方程组(6)有以下解。

ⅰ）当 $q=2(\lambda^2-4\mu)$时，有

$$a_0=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right),\qquad a_1=\pm\sqrt{\frac{2}{q}},\qquad c=p\pm(2s-1)\sqrt{\lambda^2-4\mu}。\tag{7}$$

ⅱ）当 $q=\dfrac{2(\lambda^2-4\mu)}{(s-1)^2}$，$s>1$ 时，有

$$a_0=\frac{1}{2}\left(s+1\pm\frac{(s-1)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right),\qquad a_1=\pm\sqrt{\frac{2}{q}},\qquad c=p\mp\frac{s+1}{s-1}\sqrt{\lambda^2-4\mu}。\tag{8}$$

ⅲ）当 $q=\dfrac{2(\lambda^2-4\mu)}{(s-1)^2}$，$s<1$ 时，有

$$a_0=\frac{1}{2}\left(s+1\mp\frac{(s-1)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right),\qquad a_1=\pm\sqrt{\frac{2}{q}},\qquad c=p\pm\frac{s+1}{s-1}\sqrt{\lambda^2-4\mu}。\tag{9}$$

ⅳ）当 $q=\dfrac{2(\lambda^2-4\mu)}{s^2}$，$s<0$ 时，有

$$a_0=\frac{s}{2}\left(1\mp\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right),\qquad a_1=\pm\sqrt{\frac{2}{q}},\qquad c=p\pm\frac{s-2}{s}\sqrt{\lambda^2-4\mu}。\tag{10}$$

ⅴ）当 $q=\dfrac{2(\lambda^2-4\mu)}{s^2}$，$s>0$ 时，有

$$a_0=\frac{s}{2}\left(1\pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right),\qquad a_1=\pm\sqrt{\frac{2}{q}},\qquad c=p\mp\frac{s-2}{s}\sqrt{\lambda^2-4\mu}。\tag{11}$$

利用式(3)，(7)～(11)，以及文献[10]中的式(19)，可得定理 1。

定理 1　ⅰ）当 $q=2(\lambda^2-4\mu)$时，BH 方程(1)有解

$$u_1^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right)\mp\lambda\sqrt{\frac{1}{2q}}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2-4\mu}{2q}}\times \frac{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)-c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)+c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}。\tag{12}$$

式(12)中:$\xi=x-ct$,$c=p\pm(2s-1)\sqrt{\lambda^2-4\mu}$。

ⅱ)当 $q=2(\lambda^2-4\mu)/(s-1)^2$,$s>1$ 时,BH 方程(1)有解

$$u_2^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\left(s+1\pm\frac{(s-1)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right)\mp\lambda\sqrt{\frac{1}{2q}}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2-4\mu}{2q}}\times\frac{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)-c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)+c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}。\tag{13}$$

式(13)中:$\xi=x-ct$,$c=p\mp\frac{s+1}{s-1}\sqrt{\lambda^2-4\mu}$。

ⅲ)当 $q=2(\lambda^2-4\mu)/(s-1)^2$,$s<1$ 时,BH 方程(1)有解

$$u_3^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\left(s+1\mp\frac{(s-1)\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right)\mp\lambda\sqrt{\frac{1}{2q}}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2-4\mu}{2q}}\times\frac{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)-c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)+c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}。\tag{14}$$

式(14)中:$\xi=x-ct$,$c=p\pm\frac{s+1}{s-1}\sqrt{\lambda^2-4\mu}$。

ⅳ)当 $q=2(\lambda^2-4\mu)/s^2$,$s<0$ 时,BH 方程(1)有解

$$u_4^{\pm}(\xi)=\frac{s}{2}\left(1\mp\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right)\mp\lambda\sqrt{\frac{1}{2q}}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2-4\mu}{2q}}\times\frac{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)-c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)+c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}。\tag{15}$$

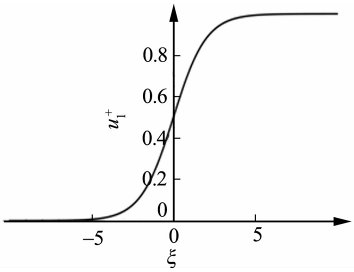
式(15)中:$\xi=x-ct$,$c=p\pm\frac{s-2}{s}\sqrt{\lambda^2-4\mu}$。

ⅴ)当 $q=2(\lambda^2-4\mu)/s^2$,$s>0$ 时,BH 方程(1)有解

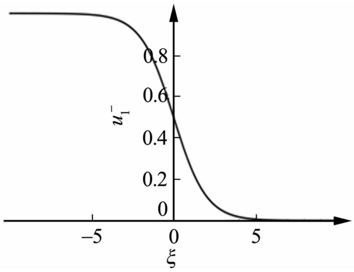
$$u_5^{\pm}(\xi)=\frac{s}{2}\left(1\pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\right)\mp\lambda\sqrt{\frac{1}{2q}}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2-4\mu}{2q}}\times\frac{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)-c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}{c_1\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)+c_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi\right)}。\tag{16}$$

式(16)中:$\xi=x-ct$,$c=p\mp\frac{s-2}{s}\sqrt{\lambda^2-4\mu}$。

u_1^+ 和 u_1^-(式(12))的波形图,如图1所示。其他解的波形图类似。



(a) u_1^+



(b) u_1^-

图1 u_1^+ 和 u_1^- 的波形图

Fig.1 Waveform diagrams of u_1^+ and u_1^-

3　利用 F-展开法求解 BH 方程(1)

假定 $u(\xi)$可以展开成关于 $F(\xi)$的多项式，即

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_iF^i(\xi),\qquad a_m\neq 0。\tag{17}$$

式(17)中：$a_0,a_1,\cdots,a_m$ 为待定的常数，且 $F(\xi)$满足一阶常微分方程

$$(F')^2=q_0+q_2F^2+q_4F^4。\tag{18}$$

式(18)中：q_0,q_2,q_4 为常数。

根据式(18)，有 $F'F''=q_2FF'+2q_4F^3F'$。进一步有

$$F''=q_2F+2q_4F^3。\tag{19}$$

关于方程(14)的解，可参考文献[11]的表 1。利用 u''与 $u(u-1)(u-s)$之间的齐次平衡，可得式(17)中的最高次幂为 $m=1$。把式(17)代入式(2)，并利用式(19)，可得

$$\begin{aligned}&a_1(p-c)F'(\xi)+a_1(a_1^2q-2q_4)F^3(\xi)+qa_1^2(3a_0-1-s)F^2(\xi)+\\&(qa_1(3a_0^2-2a_0(1+s)+s)-a_1q_2)F(\xi)+qa_0(a_0-1)(a_0-s)=0。\end{aligned}\tag{20}$$

令式(20)中 $F'(\xi)$，$F^k(\xi)(k=0,1,2,3)$的系数为零，可得

$$\left.\begin{aligned}&a_1(p-c)=0,\\&a_1(a_1^2q-2q_4)=0,\\&qa_1^2(3a_0-1-s)=0,\\&qa_1(3a_0^2-2a_0(1+s)+s)-a_1q_2=0,\\&qa_0(a_0-1)(a_0-s)=0。\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

方程组(21)有如下解。

ⅰ) $a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_1=\pm\sqrt{\dfrac{2q_4}{q}}$，$s=\dfrac{1}{2}$，$c=p$，$q=-4q_2$。

ⅱ) $a_0=1$，$a_1=\pm\sqrt{\dfrac{2q_4}{q}}$，$s=2$，$c=p$，$q=-q_2$。

ⅲ) $a_0=0$，$a_1=\pm\sqrt{\dfrac{2q_4}{q}}$，$s=-1$，$c=p$，$q=-q_2$。

利用式(17)和方程组(21)的上述解，以及文献[11]中的表 1，可得 BH 方程(1)的解。

定理 2　ⅰ) 假定 $q_0=1$，$q_2=-2$，$q_4=1$。当 $s=\dfrac{1}{2}$，$c=p$，$q=8$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_6^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}(1\pm\tanh\xi)\text{或}u_7^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}(1\pm\coth\xi)。\tag{22}$$

当 $s=2$，$c=p$，$q=2$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_8^{\pm}(\xi)=1\pm\tanh\xi\text{或}u_9^{\pm}(\xi)=1\pm\coth\xi。\tag{23}$$

当 $s=-1$，$c=p$，$q=2$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_{10}^{\pm}(\xi)=\pm\tanh\xi\text{或}u_{11}^{\pm}(\xi)=\pm\coth\xi。\tag{24}$$

ⅱ) 假定 $q_0=0$，$q_2=1$，$q_4=-1$。当 $s=\dfrac{1}{2}$，$c=p$，$q=-4$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_{12}^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}\xi。\tag{25}$$

当 $s=2$，$c=p$，$q=-1$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_{13}^{\pm}(\xi)=1\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}\xi。\tag{26}$$

当 $s=-1$，$c=p$，$q=-1$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_{14}^{\pm}(\xi)=\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}\xi。\tag{27}$$

ⅲ) 假定 $q_0=0$，$q_2=-1$，$q_4=1$。当 $s=\dfrac{1}{2}$，$c=p$，$q=4$ 时，BH 方程(1)有解

$$u_{15}^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\xi \text{ 或 } u_{16}^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sec\xi。\tag{28}$$

当 $s=2,c=p,q=1$ 时,BH 方程(1)有解

$$u_{17}^{\pm}(\xi)=1\pm\sqrt{2}\csc\xi \text{ 或 } u_{18}^{\pm}(\xi)=1\pm\sqrt{2}\sec\xi。\tag{29}$$

当 $s=-1,c=p,q=1$ 时,BH 方程(1)有解

$$u_{19}^{\pm}(\xi)=\pm\sqrt{2}\csc\xi \text{ 或 } u_{20}^{\pm}(\xi)=\pm\sqrt{2}\sec\xi。\tag{30}$$

定理 2 部分解的波形图,如图 2 所示。其他解对应的波形图类似。

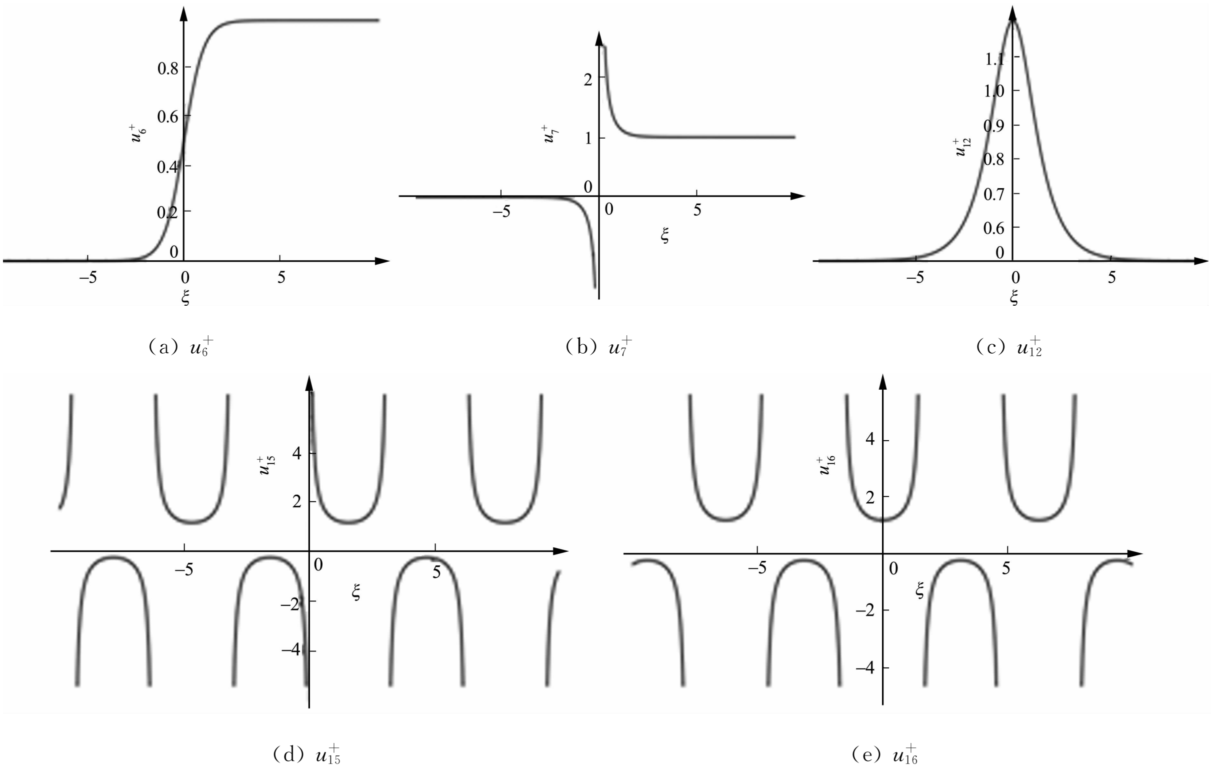


图 2　定理 2 部分解的波形图

Fig. 2　Waveform diagrams of partical solutions in theorem 2

4　结束语

基于(G'/G)-展开法和 F-展开法,分别得到了 BH 方程(1)的各种形式的精确行波解。通过对解的分析,利用(G'/G)-展开法只能得到 BH 方程(1)在 $\lambda^2-4\mu>0$ 时的解,而无法得到其在 $\lambda^2-4\mu<0$ 时的解;而利用 F-展开法只能得到 BH 方程(1)在某些特殊情况下的解。这是由 BH 方程(1)本身的结构造成的。近年来,奇异扰动微分方程也受到广泛的关注[12-16],今后将进一步研究奇异扰动 BH 方程的解的性态。

参考文献:

[1]　FAN Engui. Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using symbolic computation[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2001, 16(2): 149-155. DOI: 10.1007/s11766-001-0021-3.

[2]　YEFIMOVA O, KUDRYASHOV N. Exact solutions of the Burgers-Huxley equation[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 68(3): 413-420. DOI: 10.1016/S0021-8928(04)00055-3.

[3]　刘新源,姜璐,郭玉翠. Burgers-Huxley 方程新的精确解[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2006, 20(5): 44-46, 50. DOI: 10.3969/j.issn.1672-6197.2006.05.012.

[4]　WEN Zhenshu. The generalized bifurcation method for deriving exact solutions of nonlinear space-time fractional partial differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 366: 124735. DOI: 10.1016/j.amc.

2019.124735.

[5] WEN Zhenshu,LI Huijun,FU Yanggeng. Abundant explicit periodic wave solutions and their limit forms to space-time fractional Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2021,44(8):6406-6421. DOI:10.1002/mma.7192.

[6] 王勤龙,邓习军.一类广义 Burgers-Huxley 方程的解与其分支[J].数学的实践与认识,2010,40(1):240-245.

[7] 詹雨,呼家源.齐次平衡法与 Burgers-Huxley 方程的精确解[J].宝鸡文理学院学报(自然科学版),2014,34(4):1-4. DOI:10.13467/j.cnki.jbuns.2014.04.008.

[8] 夏鸿鸣,高忠社.Burgers-Huxley 方程的两类精确解[J].天水师范学院学报,2019,39(5):115-117. DOI:10.3969/j.issn.1671-1351.2019.05.022.

[9] KUSHNER A,MATVIICHUK R. Exact solutions of the Burgers-Huxley equation via dynamics[J]. Journal of Geometry and Physics,2020,151:103615. DOI:10.1016/j.geomphys.2020.103615.

[10] 温振庶.经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程的非线性波解[J].华侨大学学报(自然科学版),2016,37(4):519-522. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201604026.

[11] 温振庶.耦合的修正变系数 KdV 方程的非线性波解[J].华侨大学学报(自然科学版),2014,35(5):597-600. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.05.0597.

[12] HUANG Zihong,WEN Zhenshu. Persistence of kink and periodic waves to singularly perturbed two-component Drinfel'd-Sokolov-Wilson system [J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics,2023,30(3):980-995. DOI:10.1007/s44198-023-00111-x.

[13] ZHAO Keqin,WEN Zhenshu. Existence of single-peak solitary waves and double-peaks solitary wave of Gardner equation with Kuramoto-Sivashinsky perturbation[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems,2023,22(3):112. DOI:10.1007/s12346-023-00811-1.

[14] HUANG Zihong,WEN Zhenshu. Single-and double-peak solitary waves of two-component Drinfel'd-Sokolov-Wilson system with Kuramoto-Sivashinsky perturbation [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2023,33(1):2350007. DOI:10.1142/s0218127423500074.

[15] HUANG Zihong,WEN Zhenshu. Persistence of solitary waves and periodic waves of a singularly perturbed generalized Drinfel'd-Sokolov system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2023,33(14):2350171. DOI:10.1142/S0218127423501717.

[16] DERZIE E,MUNYAKAZI J,DINKA T. A NSFD method for the singularly perturbed Burgers-Huxley equation [J]. Frontiers in Applied Mathematics and Statistics,2023,9:1068890. DOI:10.3389/fams.2023.1068890.

（**责任编辑**：钱筠　　**英文审校**：黄心中）