

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202404038



经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程 的精确行波解

吴奇益, 温振庶, 王世荣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用 Riccati-展开法和 F-展开法, 得到了经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson (DSW) 方程的各种形式的精确行波解。结果表明: F-展开法得到的解比 Riccati-展开法得到的解更丰富。

关键词: 经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程; Riccati-展开法; F-展开法; 精确行波解

中图分类号: O 175.29

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2025)03-0356-05

Exact Traveling Wave Solutions of Classical Drinfel'd-Sokolov-Wilson Equation

WU Qiyi, WEN Zhenshu, WANG Shirong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Both Riccati-expansion method and F-expansion method are used to obtain the exact traveling wave solution of the classical Drinfel'd-Sokolov-Wilson (DSW) equation in various forms. The results show that the solutions obtained by F-expansion method are richer than those by Riccati-expansion method.

Keywords: classical Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation; Riccati-expansion method; F-expansion method; exact traveling wave solution

1 预备知识

经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson (DSW) 方程是一类重要的浅水波方程^[1-2], 其形式为

$$\left. \begin{aligned} u_t + pvv_x &= 0, \\ v_t + ruv_x + su_xv + qv_{xxx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中: p, q, r 和 s 都是非零常数。

目前, 已有许多关于 DSW 方程(1)及其变形的研究。Jimbo 等^[3]证明了 DSW 方程(1)是 Kadomtsev-Petviashvili 族的一员; Hirota 等^[4]得到了其孤子结构; 文献[5-10]分别采用直接代数方法、 (G'/G) -展开法、改进的 Jacobian 椭圆函数法和改进的 F-展开法, 找到了 DSW 方程(1)的一些精确解; Alrebdi 等^[11]研究了 DSW 方程(1)的孤子结构和动力学行为。从动力系统的角度出发, Wen 等^[12-14]研究了 DSW 方程(1)及其分数阶方程的许多精确行波解, 包括孤立波、扭波和各种形式的周期波, 还找到了其 M/W-型孤立波^[13]和 M/W-型周期波^[14]。此外, 文献[15-16]还考虑奇异扰动的 DSW 方程的孤立波、

收稿日期: 2024-04-14

通信作者: 温振庶(1984-), 男, 教授, 博士, 主要从事微分方程与动力系统的研究。E-mail: wenzhenshu@hqu.edu.cn。

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2021J01302)

扭波和周期波的持续性。虽然已经找到了 DSW 方程(1)的部分解,但是基于新方法可能会找到新的解。因此,本文分别利用 Riccati-展开法^[17]和 F-展开法^[18],得到方程(1)各种形式的精确行波解。

为了研究方程(1)的行波解,利用变换 $u(x,t)=u(\xi), v(x,t)=v(\xi), \xi=x-ct$,把方程(1)写为

$$\left. \begin{aligned} -cu'+pvv' &= 0, \\ -cv'+ruv'+su'v+qv''' &= 0。 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

假定 $u(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 可以展开成关于 $F(\xi)$ 的多项式,即

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^m a_i F^i(\xi), \quad a_m \neq 0; \quad v(\xi)=\sum_{i=0}^n b_i F^i(\xi), \quad b_n \neq 0。 \tag{3}$$

式(3)中: a_0, a_1, \cdots, a_m 和 b_0, b_1, \cdots, b_n 是待确定的常数,且 $F(\xi)$ 是 1 个一阶常微分方程的解。

2 利用 Riccati-展开法求解 DSW 方程(1)

假设 $F(\xi)$ 满足一阶常微分方程

$$F'=b+F^2。 \tag{4}$$

式(4)中: b 是常数。关于方程(4)的解,参考文献[17]中的式(4)~(6)。

利用 u' 与 vv' , 以及 uv' 、 $u'v$ 与 v''' 之间的齐次平衡,可得式(3)中的最高次幂分别为 $m=2$ 和 $n=1$ 。把式(3)代入式(2)中,并利用式(4),得到

$$(b_0 b_1 p - a_1 c) b + (b_1^2 p - 2 a_2 c) b F(\xi) + (b_0 b_1 p - a_1 c) F^2(\xi) + (b_1^2 p - 2 a_2 c) F^3(\xi) = 0 \tag{5}$$

和

$$\begin{aligned} &((a_0 r + 2 b q - c) b_1 + a_1 b_0 s) b + (a_1 b_1 (r + s) + 2 a_2 b_0 s) b F(\xi) + ((a_0 r + 2 b q - c) b_1 + a_1 b_0 s + \\ &(a_2 (r + 2 s) + 6 q) b b_1) F^2(\xi) + (a_1 b_1 (r + s) + 2 a_2 b_0 s) F^3(\xi) + (a_2 (r + 2 s) + 6 q) b_1 F^4(\xi) = 0。 \end{aligned} \tag{6}$$

令式(5)和(6)中 $F^k(\xi) (k=0, 1, 2, 3, 4)$ 的系数为 0,得到

$$\left. \begin{aligned} b_0 b_1 p - a_1 c &= 0, \\ b_1^2 p - 2 a_2 c &= 0, \\ (a_0 r + 2 b q - c) b_1 + a_1 b_0 s &= 0, \\ a_1 b_1 (r + s) + 2 a_2 b_0 s &= 0, \\ (a_0 r + 2 b q - c) b_1 + a_1 b_0 s + (a_2 (r + 2 s) + 6 q) b b_1 &= 0, \\ (a_2 (r + 2 s) + 6 q) b_1 &= 0。 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

方程组(7)的解为

$$a_0 = \frac{c - 2 b q}{r}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6 q}{r + 2 s}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \pm \sqrt{\frac{-12 c q}{p(r + 2 s)}}。 \tag{8}$$

利用式(3)和(8),以及文献[17]中的式(4)~(6),得到 DSW 方程(1)如下形式的解。

定理 1 1) 如果 $b < 0$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(\xi) = \frac{c - 2 b q}{r} + \frac{6 b q}{r + 2 s} \tanh^2(\sqrt{-b} \xi), \quad v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{12 b c q}{p(r + 2 s)}} \tanh(\sqrt{-b} \xi) \tag{9}$$

和

$$u(\xi) = \frac{c - 2 b q}{r} + \frac{6 b q}{r + 2 s} \coth^2(\sqrt{-b} \xi), \quad v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{12 b c q}{p(r + 2 s)}} \coth(\sqrt{-b} \xi)。 \tag{10}$$

2) 如果 $b = 0$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(\xi) = \frac{c}{r} - \frac{6 q}{(r + 2 s) \xi^2}, \quad v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-12 c q}{p(r + 2 s)}} \frac{1}{\xi}。 \tag{11}$$

3) 如果 $b > 0$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(\xi) = \frac{c - 2 b q}{r} - \frac{6 b q}{r + 2 s} \tan^2(\sqrt{b} \xi), \quad v(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-12 b c q}{p(r + 2 s)}} \tan(\sqrt{b} \xi) \tag{12}$$

和

$$u(\xi)=\frac{c-2bq}{r}-\frac{6bq}{r+2s}\cot^2(\sqrt{b}\xi), \quad v(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-12bcq}{p(r+2s)}}\cot(\sqrt{b}\xi).$$

(13)

3 利用 F-展开法求解 DSW 方程(1)

假设 $F(\xi)$ 满足一阶常微分方程

$$(F')^2=q_0+q_2F^2+q_4F^4.$$

(14)

式(14)中: q_0 、 q_2 和 q_4 是常数。根据式(14),有 $F'F''=q_2FF'+2q_4F^3F'$ 。进一步有

$$F''=q_2F+2q_4F^3.$$

(15)

方程(14)的解参考文献[18]中的表 1。利用 u' 与 vv' ,以及 uv' 、 $u'v$ 与 v''' 之间的齐次平衡,可得式(3)中的最高次幂分别为 $m=2$ 和 $n=1$ 。把式(3)代入式(2)中,并利用式(15),得到

$$(b_0b_1p-a_1c)F'(\xi)+(b_1^2p-2a_2c)F(\xi)F'(\xi)=0$$

(16)

和

$$(a_0b_1r+a_1b_0s-b_1c+b_1qq_2)F'(\xi)+((a_1+b_1)s+2a_2b_0s)F(\xi)F'(\xi)+$$
$$(a_2(r+2s)+6qq_4)b_1F^2(\xi)F'(\xi)=0.$$

(17)

令式(16)和式(17)中 $F^k(\xi)F'(\xi)$ ($k=0,1,2$) 的系数为 0,得到

$$\left. \begin{aligned} b_0b_1p-a_1c &= 0, \\ b_1^2p-2a_2c &= 0, \\ a_0b_1r+a_1b_0s-b_1c+b_1qq_2 &= 0, \\ (a_1+b_1)s+2a_2b_0s &= 0, \\ (a_2(r+2s)+6qq_4)b_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(18)

方程组(18)的解为

$$a_0=\frac{c-qq_2}{r}, \quad a_1=0, \quad a_2=-\frac{6qq_4}{r+2s}, \quad b_0=0, \quad b_1=\pm\sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}}.$$

(19)

利用式(3)和式(19),以及文献[18]中的表 1,得到 DSW 方程(1)如下形式的解。

定理 2 假定 k 为 Jacobian 椭圆函数的模量(modulus)。

1) 如果 $q_0=1$ 、 $q_2=-(1+k^2)$ 、 $q_4=k^2$,那么,DSW 方程(1)有解

$$u(x,t)=\frac{c-qq_2}{r}-\frac{6qq_4}{r+2s}sn^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}}sn\xi$$

(20)

和

$$u(x,t)=\frac{c-qq_2}{r}-\frac{6qq_4}{r+2s}cd^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}}cd\xi.$$

(21)

特别地,当 $k \rightarrow 1$ 时,式(20)变成

$$u(x,t)=\frac{c+2q}{r}-\frac{6q}{r+2s}\tanh^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}}\tanh\xi.$$

(22)

2) 如果 $q_0=1-k^2$ 、 $q_2=2k^2-1$ 、 $q_4=-k^2$,那么,DSW 方程(1)有解

$$u(x,t)=\frac{c-qq_2}{r}-\frac{6qq_4}{r+2s}cn^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}}cn\xi.$$

(23)

特别地,当 $k \rightarrow 1$ 时,式(23)变成

$$u(x,t)=\frac{c-q}{r}+\frac{6q}{r+2s}\operatorname{sech}^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{12cq}{p(r+2s)}}\operatorname{sech}\xi.$$

(24)

3) 如果 $q_0=k^2-1$ 、 $q_2=2-k^2$ 、 $q_4=-1$,那么,DSW 方程(1)有解

$$u(x,t)=\frac{c-qq_2}{r}-\frac{6qq_4}{r+2s}dn^2\xi, \quad v(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}}dn\xi.$$

(25)

特别地,当 $k \rightarrow 1$ 时,式(25)变成式(24)。

4) 如果 $q_0=k^2$ 、 $q_2=-(1+k^2)$ 、 $q_4=1$,那么,DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} ns^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} ns \xi \quad (26)$$

和

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} dc^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} dc \xi. \quad (27)$$

特别地, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 式(26)和(27)分别变成

$$u(x, t) = \frac{c+q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \csc^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \csc \xi \quad (28)$$

和

$$u(x, t) = \frac{c+q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \sec^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \sec \xi. \quad (29)$$

而当 $k \rightarrow 1$ 时, 式(26)变成

$$u(x, t) = \frac{c+2q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \coth^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \coth \xi. \quad (30)$$

5) 如果 $q_0 = -k^2$, $q_2 = 2k^2 - 1$, $q_4 = 1 - k^2$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} nc^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} nc \xi. \quad (31)$$

特别地, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 式(31)变成式(29)。

6) 如果 $q_0 = -1$, $q_2 = 2 - k^2$, $q_4 = k^2 - 1$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} nd^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} nd \xi. \quad (32)$$

7) 如果 $q_0 = 1$, $q_2 = 2 - k^2$, $q_4 = 1 - k^2$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} sc^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} sc \xi. \quad (33)$$

特别地, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 式(33)变成

$$u(x, t) = \frac{c-2q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \tan^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \tan \xi. \quad (34)$$

8) 如果 $q_0 = 1$, $q_2 = 2k^2 - 1$, $q_4 = -k^2(1 - k^2)$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} sd^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} sd \xi. \quad (35)$$

9) 如果 $q_0 = 1 - k^2$, $q_2 = 2 - k^2$, $q_4 = 1$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} cs^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} cs \xi. \quad (36)$$

特别地, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 式(36)变成

$$u(x, t) = \frac{c-2q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \cot^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \cot \xi. \quad (37)$$

而当 $k \rightarrow 1$ 时, 式(36)变成

$$u(x, t) = \frac{c-q}{r} - \frac{6q}{r+2s} \operatorname{csch}^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cq}{p(r+2s)}} \operatorname{csch} \xi. \quad (38)$$

10) 如果 $q_0 = -k^2(1 - k^2)$, $q_2 = 2k^2 - 1$, $q_4 = 1$, 那么, DSW 方程(1)有解

$$u(x, t) = \frac{c - qq_2}{r} - \frac{6qq_4}{r+2s} ds^2 \xi, \quad v(x, t) = \pm \sqrt{\frac{-12cqq_4}{p(r+2s)}} ds \xi. \quad (39)$$

特别地, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 式(39)变成式(28), 而当 $k \rightarrow 1$ 时, 式(39)变成式(38)。

4 结束语

基于 Riccati-展开法和 F-展开法, 分别得到了经典的 DSW 方程的各种形式的精确行波解。通过比

较定理 1 和定理 2,虽然 F-展开法得到的解比 Riccati-展开法的更丰富,但是 Riccati-展开法得到的有理函数形式的解在 F-展开法中却没得到。另外,相比于以前的结果^[5-10],得到的解很多都是新的。

参考文献:

- [1] DRINFEL'D V, SOKOLOV V. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type[J]. Journal of Soviet Mathematics, 1985, 30(2): 1975-2036. DOI: 10. 1007/BF02105860.
- [2] WILSON G. The affine lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma[J]. Physics Letters A, 1982, 89(7): 332-334. DOI: 10. 1016/0375-9601(82)90186-4.
- [3] JIMBO M, MIWA T. Solitons and infinite dimensional Lie algebras[J]. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 1983, 19(3): 943-1001. DOI: 10. 2977/PRIMS/1195182017.
- [4] HIROTA R, GRAMMATICOS B, RAMANI A. Soliton structure of the Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(6): 1499-1505. DOI: 10. 1063/1. 527110.
- [5] YAO Ruoxia, LI Zhibin. New exact solutions for three nonlinear evolution equations[J]. Physics Letters A, 2002, 297(3): 196-204. DOI: 10. 1016/S0375-9601(02)00294-3.
- [6] LIU Chunping, LIU Xiaoping. Exact solutions of the classical Drinfel'd-Sokolov-Wilson equations and the relations among the solutions[J]. Physics Letters A, 2002, 303(2): 197-203. DOI: 10. 1016/S0375-9601(02)01233-1.
- [7] FAN Engui. An algebraic method for finding a series of exact solutions to integrable and nonintegrable nonlinear evolution equations[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(25): 7009-7026. DOI: 10. 1088/0305-4470/36/25/308.
- [8] YAO Yuqin. Abundant families of new traveling wave solutions for the coupled Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 24(1): 301-307. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2004. 09. 024.
- [9] ZHAO Xueqin, ZHI Hongyan. An improved F-expansion method and its application to coupled Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(2): 309-314. DOI: 10. 1088/0253-6102/50/2/05.
- [10] 温振庶. 经典的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程的非线性波解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2016, 37(4): 519-522. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201604026.
- [11] ALREBDI H, RAFIQ M, FATIMA N, *et al.* Soliton structures and dynamical behaviors for the integrable system of Drinfel'd-Sokolov-Wilson equations in dispersive media[J]. Results in Physics, 2023, 46: 106269. DOI: 10. 1016/j. rinp. 2023. 106269.
- [12] WEN Zhenshu, LIU Zhengrong, SONG Ming. New exact solutions for the classical Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(6): 2349-2358. DOI: 10. 1016/j. amc. 2009. 08. 025.
- [13] WEN Zhenshu. The generalized bifurcation method for deriving exact solutions of nonlinear space-time fractional partial differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 366: 124735. DOI: 10. 1016/j. amc. 2019. 124735.
- [14] WEN Zhenshu, LI Huijun, FU Yanggeng. Abundant explicit periodic wave solutions and their limit forms to space-time fractional Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(8): 6406-6421. DOI: 10. 1002/mma. 7192.
- [15] HUANG Zihong, WEN Zhenshu. Persistence of kink and periodic waves to singularly perturbed two-component Drinfel'd-Sokolov-Wilson system[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2023, 30(3): 980-995. DOI: 10. 1007/s44198-023-00111-x.
- [16] HUANG Zihong, WEN Zhenshu. Single and double-peak solitary waves of two-component Drinfel'd-Sokolov-Wilson system with Kuramoto-Sivashinsky perturbation[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2023, 33(1): 2350007. DOI: 10. 1142/s0218127423500074.
- [17] FAN Engui. Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using symbolic computation[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2001, 16(2): 149-155. DOI: 10. 1007/s11766-001-0021-3.
- [18] 温振庶. 耦合的修正变系数 KdV 方程的非线性波解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2014, 35(5): 597-600. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 2014. 05. 0597.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)