第 46 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 46　No. 2
2025 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar.　2025

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202401003

Roper-Suffridge 算子和 ε-星形映照

陈铭新，林雄，王建飞

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 应用正定二次型构造比复单位球 B^n 更广泛的区域,并在该域上利用双曲度量证明了 Roper-Suffridge 算子保凸性、保星形和保 ε-星形性。该结果丰富了已有 Roper-Suffridge 算子的研究,给出了推广 Roper-Suffridge 算子的不一样思路。

关键词： 双全纯映照；Roper-Suffridge 算子；ε-星形映照；双曲度量；正定二次型

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2025)02-0237-04

Roper-Suffridge Operators and ε-Starlike Mappings

CHEN Mingxin, LIN Xiong, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The positive definite quadratic form is utilized to construct a domain that is wider than the complex unit ball B^n, and preserved the convexity, starlikeness, and ε-starlikeness by Roper-Suffridge operators are proved through the application of hyperbolic metric. This result enriches the existing research on Roper-Suffridge operators and provides a different approach to extending Roper-Suffridge operators.

Keywords: biholomorphic mapping; Roper-Suffridge operator; ε-starlike mapping; hyperbolic metric; positive definite quadratic form

1　记号与概念

记 $D\subset\mathbf{C}$ 为单位圆盘,$B^n=\left\{\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2<1\right\}$ 为 n 维复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 中的复单位球。当 $n=1$ 时,$B^1=D$。

设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$,若对于任意的 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$ 和 $t\in[0,1]$,均有 $(1-t)\boldsymbol{z}+t\boldsymbol{w}\in\Omega$,则称域 Ω 为凸域。若 $\boldsymbol{0}\in\Omega$,且对于任意的 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$ 和 $t\in[0,1]$,均有 $(1-t)\boldsymbol{z}\in\Omega$,则称域 Ω 为关于原点的星形域。又设 $\varepsilon\in[0,1]$,若对于任意的 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$ 和 $t\in[0,1]$,均有 $(1-t)\boldsymbol{z}+\varepsilon t\boldsymbol{w}\in\Omega$,则称域 Ω 为 ε-星形域。不难看出,1-星形域就是凸域,0-星形域就是星形域,故 ε-星形域统一处理了凸域与星形域。

设 $\boldsymbol{f}:B^n\to\mathbf{C}^n$ 是双全纯映照,若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{I}_n$,则称 $\boldsymbol{f}$ 是正规化的,其中,$\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{0})$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 处的 Jacobi 矩阵;$\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位矩阵。记 $S(B^n)$ 为 B^n 上的所有正规化双全纯映照的集合。分别用 $K(B^n)$,$S^*(B^n)$,$E_\varepsilon^*(B^n)$ 表示 B^n 上的正规化双全纯凸映照、星形映照和 ε-星形映照,即

$$K(B^n)=\{\boldsymbol{f}\in S(B^n):\boldsymbol{f}(B^n)\text{是凸域}\},$$

收稿日期： 2024-01-04

通信作者： 陈铭新(1967-),男,副教授,博士,主要从事单复变与多复变函数论的研究。E-mail:chernmx@hqu.edu.cn。

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12071161)

$$S^*(B^n)=\{\boldsymbol{f}\in S(B^n):\boldsymbol{f}(B^n)\text{是星形域}\},$$
$$E_\varepsilon^*(B^n)=\{\boldsymbol{f}\in S(B^n):\boldsymbol{f}(B^n)\text{是 }\varepsilon\text{-星形域}\}。$$

不难看出,当 $0\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant 1$ 时,有如下关系成立:

$$K(B^n)\subset E_{\varepsilon_2}^*(B^n)\subset E_{\varepsilon_1}^*(B^n)\subset S^*(B^n)。$$

2 Roper-Suffridge 算子和主要结果

1995 年,Roper 等[1]引入算子

$$\Phi_n(f)(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})=\left(f(z_1),\sqrt{f'(z_1)}\boldsymbol{z}_0\right)。$$

其中:f 是 D 上的双全纯函数,$\boldsymbol{z}=(z_1,\boldsymbol{z}_0)\in B^n$,$\boldsymbol{z}_0=(z_2,z_3,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$,幂函数取 $\sqrt{f'(0)}=1$ 的解析单值分支。

现称该算子为 Roper-Suffridge 算子,具有以下 3 个重要性质:

1) 若 $f\in K(D)$,则 $\boldsymbol{F}\in K(B^n)$;

2) 若 $f\in S^*(D)$,则 $\boldsymbol{F}\in S^*(B^n)$;

3) 若 $f\in E_\varepsilon^*(D)$,则 $\boldsymbol{F}\in E_\varepsilon^*(B^n)$。

Roper 等[1]首次证明了性质 1)。之后,Graham 等[2]简化了性质 1)的证明,并证明了性质 2)。Gong 等[3]引入了 ε-星形映照,推广了 Roper-Suffridge 算子,解决了 Graham 等[2]的公开问题,并给出了性质 3)的证明。王建飞等[4]给出了性质 3)的简洁证明。由于对 $\mathbf{C}^n$ 上具体凸映照、星形映照和 ε-星形映照的研究较少,而用 Roper-Suffridge 算子可构造出许多这样的映照。这引起多复变专家研究 Roper-Suffridge 算子的兴趣[5-14]。因此,本文研究 Roper-Suffridge 算子在比 B^n 更广泛的域上的保凸性、保星形和保 ε-星形性,所得主要结果如下。

定理 1 假设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n-1$ 阶实对称正定矩阵。记

$$H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)=(|z_2|,|z_3|,\cdots,|z_n|)\boldsymbol{A}(|z_2|,|z_3|,\cdots,|z_n|)^{\mathrm{T}}。$$

若 $f\in E_\varepsilon^*(D)$,则

$$\Phi_n(f)(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})=\left(f(z_1),\sqrt{f'(z_1)}\boldsymbol{z}_0\right)\in E_\varepsilon^*(\Omega_{\boldsymbol{A}})。$$

其中:$\boldsymbol{z}_0=(z_2,z_3,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$,$\Omega_{\boldsymbol{A}}=\{(z_1,\boldsymbol{z}_0)\in\mathbf{C}^n:|z_1|^2+H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)<1\}$,幂函数取 $\sqrt{f'(0)}=1$ 的解析单值分支。

注 1 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{n-1}$,则 $\Omega_{\boldsymbol{A}}=B^n$,此时,定理 1 退化为性质 3)。

注 2 当 $\varepsilon=1$ 时,定理 1 表明 $f\in K(D)$,则 $\boldsymbol{F}\in K(\Omega_{\boldsymbol{A}})$;当 $\varepsilon=0$ 时,定理 1 表明 $f\in S^*(D)$,则 $\boldsymbol{F}\in S^*(\Omega_{\boldsymbol{A}})$。

3 双曲度量的基本知识

证明定理 1,需要引入双曲度量,给出双曲度量的定义及其重要性质。

定义 1[5,15]设 $\Omega\subsetneqq\mathbf{C}$ 单连通域,$f:D\to\Omega$ 为双全纯函数且 $f(D)=\Omega$。那么,称

$$\lambda_\Omega(z)|\mathrm{d}z|=\frac{|\mathrm{d}w|}{(1-|w|^2)|f'(w)|},\qquad z=f(w),\quad w\in D$$

为 Ω 上的双曲度量。不难看出,$\lambda_\Omega(z)$与 f 的选择无关。特别地,$\lambda_D(z)|\mathrm{d}z|=\dfrac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$。

双曲度量有以下 2 个重要性质[15].

1) 共形不变性。设 $\Omega_1,\Omega_2\subsetneqq\mathbf{C}$ 为单连通域,$f:\Omega_1\to\Omega_2$ 双全纯且 $f(\Omega_1)=\Omega_2$,则

$$\lambda_{\Omega_1}(z)=\lambda_{\Omega_2}(f(z))|f'(z)|,\qquad\forall z\in\Omega_1。$$

2) Schwarz-Pick 估计。设 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 是单连通域。若 $f:D\to\Omega$ 为全纯的,则

$$\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2},\qquad\forall z\in D。$$

特别地,若 $\Omega=D$,则 $|f'(z)|\leqslant\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$,即为 D 上的 Schwarz-Pick 引理。

关于 ε-星形域，有引理 1[4]。

引理 1[4-5]　假设 $G\subsetneqq \mathbf{C}$ 为 ε-星形域 $(\varepsilon\in[0,1])$，则对于任意的 $z_1,z_2\in G$ 和 $t\in[0,1]$，恒有

$$\frac{1}{\lambda_G((1-t)z_1+\varepsilon t z_2)}\geqslant\frac{1-t}{\lambda_G(z_1)}+\frac{\varepsilon t}{\lambda_G(z_2)}。$$

特别地，当 $\varepsilon=1$ 时，引理 1 表示 $\dfrac{1}{\lambda_G(z)}$ 是 G 上的凹函数，该结果首次由 Gustafsson[16] 发现。

4　主要结果的证明

定理 1 的证明：令

$$\begin{cases}u_1=f(z_1),\\ \boldsymbol{u}_0=\sqrt{f'(z_1)}\,\boldsymbol{z}_0,\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{u}_0=(u_2,u_3,\cdots,u_n)$。

于是

$$\left.\begin{aligned}&u_1=f(z_1),\\ &H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)=|f'(z_1)|\,H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

记 $G=f(D)$，由双曲度量的共形不变性，有

$$\lambda_G(f(z_1))\,|f'(z_1)|=\frac{1}{1-|z_1|^2}。\tag{2}$$

由式(1)，(2)可知，

$$\lambda_G(u_1)\frac{H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)}{H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)}=\frac{1}{1-|z_1|^2},$$

即 $H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)\lambda_G(u_1)=H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)\dfrac{1}{1-|z_1|^2}<1$。于是，$H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)-\dfrac{1}{\lambda_G(u_1)}<0$。表明域 $\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{A}})$ 为

$$\widetilde{\Omega}=\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{A}})=\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}):\boldsymbol{z}\in\Omega_{\boldsymbol{A}}\}=\left\{(u_1,\boldsymbol{u}_0):H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)-\frac{1}{\lambda_G(u_1)}<0\right\}。\tag{3}$$

要证明 $\boldsymbol{F}\in E_\varepsilon^*(\Omega_{\boldsymbol{A}})$，只需证明 $\widetilde{\Omega}$ 为 ε-星形域。即证明对于任意的 $(u_1,\boldsymbol{u}_0),(v_1,\boldsymbol{v}_0)\in\widetilde{\Omega}$ 和 $t\in[0,1]$，均有

$$(1-t)(u_1,\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon t(v_1,\boldsymbol{v}_0)\in\widetilde{\Omega}。$$

事实上，由引理 1 可得

$$-\frac{1}{\lambda_G((1-t)u_1+\varepsilon t v_1)}\leqslant-\frac{1-t}{\lambda_G(u_1)}-\frac{\varepsilon t}{\lambda_G(v_1)}。\tag{4}$$

另一方面，由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵，从而 $H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{z}_0)=(|z_2|,|z_3|,\cdots,|z_n|)\boldsymbol{A}(|z_2|,|z_3|,\cdots,|z_n|)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上的凸函数。于是

$$\begin{aligned}H_{\boldsymbol{A}}((1-t)\boldsymbol{u}_0+\varepsilon t\boldsymbol{v}_0)&\leqslant(1-t)H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)+tH_{\boldsymbol{A}}(\varepsilon\boldsymbol{v}_0)\leqslant(1-t)H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon^2 tH_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v}_0)\leqslant\\ &(1-t)H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon tH_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v}_0)。\end{aligned}\tag{5}$$

由式(3)～(5)可得

$$\begin{aligned}&H_{\boldsymbol{A}}((1-t)\boldsymbol{u}_0+\varepsilon t\boldsymbol{v}_0)-\frac{1}{\lambda_G((1-t)u_1+\varepsilon t v_1)}\leqslant(1-t)H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon tH_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v}_0)-\frac{1-t}{\lambda_G(u_1)}-\frac{\varepsilon t}{\lambda_G(v_1)}=\\ &(1-t)\left(H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_0)-\frac{1}{\lambda_G(u_1)}\right)+\varepsilon t\left(H_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v}_0)-\frac{1}{\lambda_G(v_1)}\right)<0。\end{aligned}$$

于是有 $(1-t)(u_1,\boldsymbol{u}_0)+\varepsilon t(v_1,\boldsymbol{v}_0)\in\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{A}})$。故 $\boldsymbol{F}\in E_\varepsilon^*(\Omega_{\boldsymbol{A}})$。

5　主要结果的应用

为说明定理 1 的结果比单位球 B^n 的结果更广泛，现给出 $n=3$ 的结果。取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$，$a\in\mathbf{R}$ 且

$|a|<1$,则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵。此时,

$$H_{\boldsymbol{A}}(z_2,z_3)=|z_2|^2+2a|z_2z_3|+|z_3|^2,$$

$$\Omega_{\boldsymbol{A}}=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbf{C}:|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^3+2a|z_2z_3|<1\}。$$

应用定理 1,可得推论 1。

推论 1　设 $a\in\mathbf{R}$ 且 $|a|<1$,若 $f\in E_\varepsilon^*(D)$,则

$$\Phi_3(f)(\boldsymbol{z})=F(\boldsymbol{z})=\left(f(z_1),\sqrt{f'(z_1)}z_2,\sqrt{f'(z_1)}z_3\right)\in E_\varepsilon^*(\Omega_{\boldsymbol{A}}),$$

其中,$\Omega_{\boldsymbol{A}}=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbf{C}:|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^3+2a|z_2z_3|<1\}$,幂函数取 $\sqrt{f'(0)}=1$ 的解析单值分支。特别地,若 $a=0$,则 $\Omega_{\boldsymbol{A}}=B^3$。

参考文献:

[1]　ROPER K A,SUFFRIDGE T J. Convex mappings on the unit ball of $\mathbf{C}^n$[J]. Journal d'Analyse Mathématique,1995,65(1):333-347. DOI:10.1007/BF02788776.

[2]　GRAHAM I,KOHR G. Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator[J]. Journal d'Analyse Mathématique,2000,81(1):331-342. DOI:10.1007/BF02788995.

[3]　GONG Sheng,LIU Taishun. On the Roper-Suffridge extension operator[J]. Journal d'Analyse Mathématique,2002,88(1):397-404. DOI:10.1007/BF02786583.

[4]　WANG Jianfei,LIU Taishun. The Roper-Suffridge extension operator and its applications to convex mappings in $\mathbf{C}^2$[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2018,370(11):7743-7759. DOI:10.1090/tran/7221.

[5]　王建飞,刘太顺,唐笑敏. 双曲度量和 Roper-Suffridge 算子[J]. 中国科学(数学),2022,52(4):369-380. DOI:10.1360/SSM-2020-0243.

[6]　GRAHAM I,HAMADA H,KOHR G,*et al*. Extension operators for locally univalent mappings[J]. Michigan Mathematical Journal,2002,50(1):37-55. DOI:10.1307/mmj/1022636749.

[7]　GRAHAM I,HAMADA H,KOHR G. Extension operators and subordination chains[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2012,386(1):278-289. DOI:10.1016/j.jmaa.2011.07.064.

[8]　LIU Taishun,XU Qinghua. Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006,322(1):107-120. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.08.055.

[9]　GRAHAM I,HAMADA H,KOHR G. Parametric representation of univalent mappings in several complex variables[J]. Canadian Journal of Mathematics,2002,54(2):324-351. DOI:10.4153/CJM-2002-011-2.

[10]　FENG Shuxia,LIU Taishun. The generalized Roper-Suffridge extension operator[J]. Acta Mathematica Scientia(English Edition),2008,28(1):63-80. DOI:10.1016/S0252-9602(08)60007-7.

[11]　LIU Mingsheng,ZHU Yucan. On the extension operator in Banach spaces[J]. Advances in Mathematics,2005,34(4):506-508. DOI:10.11845/sxjz.2005.34.04.0506.

[12]　刘名生,朱玉灿. 有界完全 Reinhardt 域上推广的 Roper-Suffridge 算子[J]. 中国科学(A 辑: 数学),2007,37(10):1193-1206. DOI:10.1360/za2007-37-10-1193.

[13]　MUIR J R. A modification of the Roper-Suffridge extension operator[J]. Computational Methods and Function Theory,2005,5(1):237-251. DOI:10.1007/BF03321096.

[14]　HAMADA H,KOHR G. Roper-Suffridge extension operator and the lower bound for the distortion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2004,300(2):454-463. DOI:10.1016/j.jmaa.2004.06.052.

[15]　BEARDON F,MINDA D. The hyperbolic metric and geometric function theory[C]// Proceedings of the International Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi: Narosa Publishing House,2007:9-56.

[16]　GUSTAFSSON B. On the convexity of a solution of Liouville's equation[J]. Duke Mathematical Journal,1990,60(2):303-311. DOI:10.1215/S0012-7094-90-06012-0.

(**责任编辑:** 黄晓楠　　**英文审校:** 黄心中)