第46卷　第2期　华侨大学学报（自然科学版）　Vol. 46　No. 2
2025年3月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Mar.　2025

DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.202503022

知识结构的粗糙集模型与方法研究综述

徐博驰[1]，李进金[1,2,3]

（1. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021；
2. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院，福建 泉州 362000；
3. 闽南师范大学 数学与统计学院，福建 漳州 363000）

摘要： 知识空间理论（KST）是一种研究教育规律的科学方法，而粗糙集理论（RST）是分析不确定性的重要数学框架。经过四十年的发展，这两种理论均取得一系列研究成果。文中分别梳理了知识空间理论与粗糙集理论的重要进展，以及近年来两者交叉研究的成果，分析了当前研究中存在的关键科学问题，并提出未来可能的重要研究方向。

关键词： 知识空间理论；知识结构；粗糙集理论；技能约简；变精度模型

中图分类号： TP 182　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2025)02-0121-12

Review of Research on Rough Set Models and Methods for Knowledge Structures

XU Bochi[1], LI Jinjin[1,2,3]

(1. School of Mathematics and Statistics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: Knowledge space theory (KST) is a scientific methodology for investigating educational principles, while rough set theory (RST) serves as a crucial mathematical framework for analyzing uncertainty. Over four decades of development, both theories have achieved significant research advancements. This paper systematically reviews the major progress in KST and RST respectively, synthesizes recent interdisciplinary research achievements, critically examines existing scientific challenges in current studies, and proposes potential research directions for future exploration. The findings aim to provide valuable references for further investigations in this interdisciplinary field.

Keywords: knowledge space theory; knowledge structure; rough set theory; skill reduction; variable precision model

知识空间理论（knowledge space theory，KST）是由比利时数学心理学家 Doignon 和美国数学心理学家 Falmagne 于1985年提出的一种旨在用于知识评估的数学理论[1]。KST 基于教育学和心理学等理论建立了一整套研究背景和意义非常明确的数学框架。这是一种有效的研究教育的数学理论，它不仅对教育评估和个性化学习有着深远的影响，还在计算机自适应教育认知诊断等领域展现出广泛的应

收稿日期： 2025-02-25

通信作者： 李进金(1960－)，男，教授，博士，博士生导师，主要从事信息技术和不确定性的数学理论与方法的研究。E-mail:jinjinlimnu@126.com。

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12271191，11871259)；福建省自然科学基金资助项目(2023J01122，2023J01125，2023J05175，2022J01306，2022J05169)

用。知识空间理论最成功的应用之一是人工智能学习和评估系统(assessment and learning in knowledge space,ALEKS)[2],目前已有超过2 500万名学生通过该系统学习数学、化学、统计和会计学等学科。KST已成为辅助学习和自适应测试等领域中[3-6]的重要理论。知识空间理论的初始发展源于纯粹行为主义视角,其核心目标在于形式化个体知识表征体系,随着后面概念化个体的内在能力,知识空间理论突破了单纯行为解释的局限。区别于粗糙集理论的核心研究聚焦于对近似算子的关注,以及特定集合的上、下近似特性分析,知识空间理论着重研究特定集合构成的结构化系统。

知识结构(knowledge structure)是知识空间理论中的核心概念,它为构建领域知识关联框架及评估学习者知识掌握程度提供了理论基础。经典的知识结构采用二元评价模式(完全正确/不正确),并以此发展出了一套成熟有效的理论。随着研究的深入,有研究者认为二元评价模式虽适用于简单问题评估,却难以准确反映复杂问题的部分掌握状态(如80%正确率)。针对教育学领域多维评价需求,学者提出多分知识结构(polytomous knowledge structure,PKS)的概念[7-9],通过引入多值响应机制(如Likert五级评分法[10])来实现评估维度的扩展。这种拓展不仅适用于传统认知评估,还可应用于心理咨询、态度测量等多元场景。通过设置多级响应值(如完全同意至完全不同意),使评价体系能更精准地反映个体实际认知水平。知识结构的有效构建不仅是该领域的关键研究课题,更是实现个性化学习路径规划的前提。

1 构建知识结构的基本方法

本节梳理了构建知识结构(二分)与多分知识结构的常用方法。为了讨论方便,用Q表示非空问题集,即知识域(domain),S表示非空技能集,$\mathscr{K}$表示由知识状态$\mathscr{K}(\mathscr{K}\subseteq Q)$构成的集族,且$\mathscr{K}$中至少包含$\varnothing$和$Q$,$(Q,\mathscr{K})$表示知识结构。满足并封闭的知识结构为知识空间(knowledge space),满足交封闭的知识结构为简单闭包空间(simple closure space),既满足并封闭又满足交封闭的知识结构为拟序空间(quasi ordinal space)。

1.1 知识结构的构建方法

知识结构的构建方法通常有专家问询法、数据驱动法、技能映射等方法。

基于专家问询法(query)构建知识结构的研究可追溯至知识空间理论的发展早期。Falmagne等[11]于1990年系统阐述了知识空间理论,首次提出通过专家咨询构建领域知识结构的可行性。在此基础上,Koppen等[12-13]确立了专家主导的构建范式,强调通过结构化问题序列获取专家对领域内问题关联性的专业判断。Kambouri等[14]进一步完善了该范式的理论基础,建立了专家响应与知识空间的映射机制。为提高构建效率,Dowling[15]通过逻辑推理机制优化问询流程,显著减少了冗余判断需求。针对专家判断可能存在的误差问题,Cosyn等[16]提出的PS-Query机制通过错误处理算法有效控制了判断失误对知识空间的影响。值得关注的是,Stefanutti等[17]创新性地提出增量式扩展算法,实现了已有知识空间向新问题域的高效拓展,避免了重复性问询过程。

数据驱动型知识结构构建方法通过统计建模实现潜在认知状态的逆向推导。其核心范式通常遵循三阶段建模框架:1)构建候选知识结构集;2)基于拟合准则测试筛选模型;3)确定最优拟合模型[18]。该方法假设观测数据由潜在真实知识结构与随机误差的叠加而成,其核心挑战在于同步推断知识结构与响应误差概率。现有的研究可分为两个分支。其中一个分支是将特定属性赋予数据底层的知识结构,典型技术包括基于问卷的布尔分析与项目树分析(item tree analysis,ITA)。如Schrepp[19]验证了布尔分析在二值问卷分析中的有效性,Theuns等[20]则基于共生矩阵构建知识结构。针对ITA方法,Schrepp[21]提出的ITA*算法通过优化推测关系筛选机制降低结构偏差,Sargin等[22]发展的归纳式ITA(IITA)进一步提升了模型稳健性。另一个分支是不施加任何限制,仅将观察到的响应模式作为构建结构的知识状态。如Chiusole等[23]提出的k-states方法突破观测模式限制,通过改进k-modes聚类算法[24]实现潜在知识状态的增量式提取。

基于技能映射的知识结构构建方法利用项目(item)与技能(skill)间的逻辑关系建立技能映射(skill map),并通过数学推导构建知识结构。技能映射对Q中的每一个项目(问题)q分配了一个技能子集,技能映射定义如下:

设技能集 S 是与 Q 对应的非空有限集合，2^S 是技能集 S 的幂集，τ 是从 Q 到 $2^S\setminus\{\varnothing\}$ 的映射，三元组 (Q,S,τ) 称为一个技能映射。

这种方法始于 Doignon[25] 提出的技能映射理论，其通过最小化技能分配实现知识结构唯一性生成，显著降低了传统问询方法的复杂度。Spoto 等[26-27] 建立技能-项目的映射框架，不仅实现心理诊断标准的量化表征，更通过可识别性验证完善了概率模型的评估体系。在方法论创新方面，Suck[28-30] 突破传统由项目到技能的单向研究范式，首创基于偏序技能集的知识结构逆向构建技术。针对复杂知识领域建模难题，Spoto 等[31] 开发迭代优化算法，通过最小化知识结构与观测数据的差异实现动态技能映射。在模型扩展维度方面，周银凤等[32-33] 基于知识空间理论与形式背景理论的对应关系，从析取模型和合取模型两个方面，讨论了知识结构的构建问题。

经典的技能是离散"掌握/未掌握"二分法，考虑到学习者的认知能力的获取是一个从低级到高级的不断发展趋向成熟的过程，并且不同个体对技能的潜在掌握程度存在显著差异，以及不同题目可能要求非二元化的技能阈值。Sun 等[34] 将技能模糊化，提出了模糊技能映射和模糊技能多值映射。前者对问题 q 分配了一个 S 上的模糊子集，后者对问题 q 分配了一个 S 上的模糊子集族，然后通过模糊技能映射和模糊技能多值映射来构造知识结构。Cao 等[35] 系统研究了模糊技能多值映射在知识结构建模中的应用，提出基于模糊技能多值映射的可识别与双可识别知识结构，通过消除冗余项目优化测评效率，并为相对独立知识点的评估提供理论框架。

1.2　多分知识结构的构建方法

与构造经典的二分知识结构不同，多分知识结构的研究起步更晚，构造的方式更加的复杂。多分知识状态将对问题 q 的解答赋予等级，使得知识状态成为从问题集到问题解决等级集的映射。Schrepp[36] 率先突破二值响应限制，通过线性序集构建多分响应层级结构，建立了具有某些封闭性质和推测关系的多层结构之间的本质联系。Stefanutti 等[7] 将响应维度拓展至完备格结构，其多分知识结构定义如下：

设 L 为完备格，1 和 0 分别为 L 上的极大极小元，多分知识状态定义为映射 $\mathscr{K}: Q\to L$，若 $\mathscr{K}\subseteq L^Q$ 至少包含 1_Q 和 0_Q，则三元组 $(Q,L,\mathscr{K})$ 称为多分知识结构。

Heller[8] 在此基础上引入拟序关系理论，构建广义多分知识空间框架，其通过考虑了粒度更细的优先关系，系统整合了 Schrepp[36] 和 Stefanutti 等[7] 的研究成果。从多分 KST 的伽罗瓦联络角度出发，Wang 等[37-38] 针对该框架的数学完备性问题，提出 CD-多分知识空间，并完善了文献[7]中伽罗瓦连络中闭元的不完全刻画问题。Bartl 等[39] 基于模糊逻辑中的完备剩余格研究了具有分级知识状态的知识空间。Ge[40] 通过定义多分属性完备性，构建了完备多分知识结构的概念。孙晓燕等[41] 整合程序性知识评价结果用于构建项目状态空间，进而构造多分知识结构。基于技能映射的知识结构构建方法在多分知识结构上也有推广，其理论较二分经典情形更为复杂，而许多经典的结果是无法直接作用到多分知识结构上。

在分析不同技能的重要性的基础上，通过扩展模糊技能映射[34]，如 Sun 等[42] 提出了一种利用模糊技能构建多分知识结构的方法。Stefanutti[9] 则通过公理化定义了属性映射，通过属性映射产生多分知识结构。与 Sun 等[42] 的模糊技能映射中技能模糊化不同的是，Stefanutti[9] 研究的属性是二分的（具备/不具备）。区别于映射方法，Chiusole 等[43] 开发自适应 k-median 聚类算法，通过数据分析方法构建多分知识结构。由于多分知识结构的研究起步更晚，以及理论更加复杂，许多方法尚在探索中。而在粗糙集理论中，一些理论方法与知识空间理论在数学上似乎存在某种联系。例如，二元关系的上（下）近似算子可以产生知识空间（简单闭包空间），通过格值模糊集的上（下）近似恰好可以看作多分知识状态。

知识空间理论还有一些其他的研究方向，由于这些方向目前没有使用粗糙集理论和方法的相应文章，因此这里不做过多的介绍。其他的研究方向可以参考李金海等[44] 的文章。

2　构建知识结构常用的粗糙集方法

本节主要梳理一些常用在构建知识结构中，以及未来可能用在知识空间理论中的一些粗糙集方法。

粗糙集理论(rough set theory,RST)由Pawlak[45]于1982年提出,为处理不精确、不完整信息与知识提供了重要数学框架。粗糙集理论本源植根于结构化数据建模,其方法论核心在于通过等价类划分的形式化机制实现知识发现。该理论通过建立基于不可区分关系的近似空间,运用上(下)近似算子量化分类不确定性,构建了基于边界域分析的可计算知识提取框架。

经典Pawlak粗糙集模型的核心理论基础是建立于近似空间所导出的对偶近似算子之上的。在经典Pawlak模型中,设U是非空有限论域,$R\subseteq U\times U$是U上的二元等价关系,R称为不可分辨关系,序对(U,R)称为Pawlak近似空间。下近似算子和上近似算子分别定义如下:

对任意的$X\subseteq U$,$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$,$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\varnothing\}$。

这里的关系作为等价关系存在,其严格的数学特性虽保证了理论严谨性,但在实际应用中呈现出显著的局限性,这一特性促使近似算子的广义定义成为粗糙集理论研究的关键方向。粗糙集理论扩展研究主要存在两种方法论路径:构造化方法(参见文献[47-52])与公理化方法(参见文献[53-55])。前者以论域中具体数学结构(包括但不限于二元关系、划分体系、覆盖系统、邻域系统及布尔子代数等)为构建基础,通过定义具体的近似算子来推导相应的粗糙集代数系统。后者则从抽象算子公理体系出发,以满足特定公理条件的一元集合算子对作为基本研究对象:一方面,近似算子满足的公理体系可保证对应类型二元关系的存在性;另一方面,通过构造性方法基于二元关系导出的近似算子必然满足与之对应的公理系统。这两种方法论形成了理论扩展研究的双向进路,共同推动着粗糙集理论体系的发展。更详细的粗糙集系统的基本理论可以参考文献[56]。

事实上,这两种方法前者是基于集合论的分析框架,后者为基于算子代数的抽象化描述体系。研究视角的差异性促使学者采用多元方法论路径,由此衍生出多种具有理论扩展性的粗糙集模型。值得关注的是,粗糙集理论在处理不确定性问题时展现出独特的理论特征——区别于概率统计、模糊集理论及证据理论等传统不确定性分析方法。该理论无需依赖数据集之外的先验知识(如概率分布函数或隶属度参数),从而在知识发现过程中保持更高的客观性。然而,其内在机制对原始数据的不精确性缺乏直接处理能力,这一理论局限恰与其他不确定性理论形成显著的互补效应。在此背景下,探究粗糙集理论与相关数学理论(包括但不限于概率论、模糊数学、证据理论)的内在关联性与协同机制,已成为推动不确定性分析领域发展的重要研究方向,相关成果将有效促进跨学科方法论的融合创新。此外,经典的Pawlak粗糙集还以各种方式得到了扩展:

论域(universe)由单论域扩展到双论域。典型研究成果包括:Wu等[57]对广义模糊粗糙集进行了系统研究,其他学者亦对此议题展开探讨(参见文献[58-60]);Li[61]构建了双论域框架下的粗糙近似算子理论体系;Li等[62]进一步探讨了双论域粗糙模糊近似算子的数学特性;Zhang等[63]系统阐述了双论域广义区间值模糊粗糙集的表征理论;Liu[64]提出基于双论域结构的粗糙集理论及其应用模型;Ali等[65]深化了广义粗糙集的数学性质研究;Hu等[66]基于区间值模糊逻辑算子构建了广义区间值模糊粗糙集理论框架。这一系列研究标志着双论域粗糙集理论体系的逐步完善与深化发展。这一扩展,在知识空间理论与粗糙集理论交叉研究中产生了将知识状态看作是技能集在项目集中的上近似或下近似集的观点。

研究对象经历了从分明集向模糊集的理论拓展进程。模糊集是由Zadeh[67]在1965年提出的概念,经过多年的理论发展,模糊集理论在不确定性建模领域同样具有核心价值[68]。1990年,Dubois等[69]率先实现粗糙集与模糊集的方法整合,开创性地提出了粗糙模糊集与模糊粗糙集理论体系。随后,Nanda等[70]系统构建了模糊粗糙集数学模型,而Moris等[71]则建立了模糊粗糙集的公理化体系。随着模糊粗糙集理论的一系列建立,模糊集也从经典的模糊集拓展到一些特殊的模糊集上。如Samanta等[72]深入探讨了直觉模糊粗糙集与粗糙直觉模糊集的交互机理;Cornelis等[73]建立了直觉模糊粗糙集的形式化描述框架;Dubois等[74]成功将模糊粗糙集理论拓展至区间值模糊集合领域;Zhang[75]提出区间值直觉模糊粗糙集建模方法;Zhang[76]系统研究了区间二型粗糙模糊集的数学特征;Yang等[77]构建了犹豫模糊粗糙集的构造化方法与公理化体系;Wang[78]基于扩展t-模运算建立了二型模糊粗糙集理论框架;Yang等[79-80]创新性地提出基于模糊覆盖的粗糙集模型。这一系列理论突破显著拓展了粗糙集方法在复杂不确定性建模中的应用边界。

关系(relation)实现了从经典等价关系向广义关系、模糊关系[81]、支配关系[82]、区间值模糊关系[60]，以及二型模糊关系及区间值二型模糊关系[83]的理论拓展。其中模糊关系和 L-模糊关系在知识空间理论与粗糙集理论交叉研究中有着重要应用，它们可以通过上(下)近似算子生成多分知识结构。其代表性研究成果包括：Radzikowska 等[50]基于剩余格理论提出 L-模糊粗糙集[84]概念；Greco 等[85]深入探讨了模糊粗糙集的数学性质；Kondo[86]建立了广义粗糙集的结构化理论体系；Kotłowski 等[87]开发了面向序分类问题的随机支配粗糙集模型；Leung 等[88]提出区间值信息系统下基于粗糙集的分类规则发现方法；Zhang[89]系统阐述了广义区间二型模糊粗糙集的表征理论；Du 等[90-91]针对不完备序信息系统提出了基于支配关系的粗糙集方法及其在规则归纳中的应用模型。作为对粗糙集概念的进一步概括推广，Qiao 等[92]从构造法和公理化方法两方面提出基于剩余格(residuated lattice)和共同剩余格(co-residuated lattice)上的($\odot$，&)-模糊粗糙集；Sun[93]讨论了 L-模糊近似算子的表示理论；Kondo[94]通过算子方法深入探讨了 L-模糊关系与 L-正规算子的代数特性。这一系列突破性研究显著拓展了粗糙集理论在多类型关系建模中的适用边界。

此外，算子上实现了从经典合取/析取运算向三角模与三角余模[63]以及扩展型三角模/余模[95-96]等的方法演进。由于这一部分目前没有与知识空间理论上应用的交叉研究，故而不做过多的介绍。将三角模与三角余模以及扩展型三角模/余模等方法在知识空间理论找到相应的背景意义，并应用到知识结构构造上也是未来一个研究方向。

3　知识结构的粗糙集模型与方法

近年来，随着知识空间理论与粗糙集理论的交叉研究不断深入，研究者发现了它们之间的紧密联系。早在 2009 年，王国胤等[97]就指出："粗糙集理论和知识空间理论都是研究知识结构的理论；但他们用于解决不同的实际问题。粗糙集主要研究如何对数据进行分析及知识发现；而知识空间着重对问题集进行分析，从而对个体知识状态进行评估。如何将知识空间理论和粗糙集理论结合正在成为一个新的研究方向。"

在知识空间理论中，技能映射的提出建立了知识状态中技能要素与测试项目间的关联机制。在技能映射中，可能还存在着冗余的技能，即使约简掉这些技能也不会改变现有的知识结构。粗糙集中属性约简的思想促进了知识空间理论中技能约简的研究。为此，Xu 等[98]结合粗糙集属性约简方法来寻找最小技能集。高纯等[99]也给出了一种最小技能集的生成方法。

值得注意的是，Yao 等[100]提出了一种基于集合论的粒空间统一框架，用于整合粗糙集分析与知识空间理论中的粒结构及近似方法。主要工作包括：将粒定义为满足特定条件的集合，通过逻辑语言和集合操作构建多层次粒结构，并形式化定义了粒空间三元组；基于等价关系划分的粒空间，提出了上(下)近似算子，以可定义粒逼近任意集合，并给出了其性质；通过知识空间理论中的推测关系与推测系统构建闭包结构和知识空间，扩展了粗糙集的近似方法，定义了非对偶的上(下)近似；对比了两类理论在粒结构构建与近似机制上的共性与差异，揭示了粒空间框架的通用性。

Liu[101]通过整合经典的知识空间理论与粗糙集理论，系统研究了粗糙集理论在知识结构建模中的应用，建立了知识空间理论与粗糙集、形式概念分析间的理论关联。主要工作包括：利用上(下)近似算子刻画知识结构的代数特性，证明了知识空间、闭包空间可被诠释为个体技能集合在序列关系下的上近似与下近似集族生成，进而将知识状态重新定义为项目域中内在技能集合的上(下)近似；提出覆盖约简算法，将最小技能映射问题转化为覆盖约简问题，应用了粗糙集中属性约简的思想实现了技能映射的优化；针对技能多映射的合取模型与析取模型，证明了知识结构在并/交运算下的封闭条件，解决了 Falmagne 等[6]提出的开放性问题；通过形式背景构建概念格，揭示了知识空间与 Alexandroff 拓扑、单调伽罗瓦联络的深层对应关系。

同时，随着多分知识结构的理论研究取得显著进展，粗糙集理论中的方法与多分知识结构是否也有相应的联系得到了人们的关注。Wang 等[102]提出了一种基于 L-模糊 S-近似算子构建多分知识结构的方法。S-近似空间是经典粗糙集的推广，经典粗糙集及其众多扩展如双论域粗糙集，T-粗糙集，变精度粗糙集等，都可以由 S-近似空间表示，S-近似空间定义如下：

S-近似空间是一个四元组 $G=(U,W,T,S)$，其中 U 和 V 是两个非空有限论域，知识映射 $T:U\to 2^W$，决策映射 $S:2^W\times 2^W\to\{0,1\}$。

设 A 是 W 的任意子集，A 的下近似和上近似分别定义为

$$\underline{G}(A)=\{x\in U\mid S(T(x),A)=1\},\qquad \overline{G}(A)=\{x\in U\mid S(T(x),A^c)=0\}。$$

他们的主要工作包括：将 L-模糊集嵌入 S-近似空间，定义了 L-模糊 S-近似算子，证明了其在 $S_{\min}$ 条件下满足并、交运算的封闭性及对偶性等关键性质；通过上(下)L-模糊 S-近似算子生成多分知识(闭包)空间，刻画了多分知识结构；提出四类特殊 L-模糊 S-近似算子，将其与模糊技能映射结合，构建了多分知识结构的析取模型与合取模型；通过实例验证模型的有效性，阐明模糊技能水平与问题解决能力的映射关系；最后，探讨了前向分级与后向分级知识结构的充要条件，扩展了传统 KST 在能力评估中的应用。

变精度模型是粗糙集理论中的一种重要模型[103-107]。杨桃丽等[108-110]针对知识空间理论中传统技能映射模型未充分考虑个体掌握技能数量差异的问题，引入粗糙集中变精度模型，提出基于技能包含度的概念。即

设 (Q,S,τ) 是一个技能映射，对 $q\in Q,T\subseteq S$，称 $D(T/\tau(q))=\dfrac{|\tau(q)\cap T|}{|\tau(q)|}$ 为关于 q 和 T 的技能包含度。然后依靠技能包含度的概念提出了 α-变精度模型：

设 (Q,S,τ) 是一个技能映射，对 $q\in Q,T\subseteq S,\alpha\in(0,1]$，由 T 通过变精度 α-模型诱导的知识状态为

$$K_T^\alpha=\{q\in Q\mid D(T/\tau(q))\geqslant\alpha\}。$$

对 $\alpha\in(0,1]$，显然有 $K_\varnothing^\alpha=\varnothing$，$K_S^\alpha=Q$。因此，由技能映射 (Q,S,τ) 通过变精度 α-模型诱导的所有知识状态的集合构成知识结构。即

$$\mathscr{K}^\alpha=\{\mathrm{K}_\mathrm{T}^\alpha\mid \mathrm{T}\subseteq \mathrm{S}\}。$$

这类知识结构的适用范围更广。其主要工作包括：提出技能包含度概念，定义为个体掌握的技能占问题所需技能的比例，量化技能掌握程度，构建变精度 α-模型；证明不同 α 值生成的知识结构具有对偶性；提出知识结构间的序关系，刻画其层次性与演化路径；设计算法自动计算技能包含度集并生成知识结构图；基于 COVID-19 监测数据的实验表明，模型能灵活区分不同个体的知识状态，生成对称且层次分明的知识结构，验证了方法的有效性；讨论了技能子集约简问题。

Xu 等[111]则针对模糊技能映射在知识结构建模中的局限性，将技能包含度这一概念扩展到模糊技能映射上。即设 (Q,S,τ) 为模糊技能映射。对 $\forall q\in Q$ 以及模糊技能集 A，称

$$D(A/\tau_q)=\frac{|\{s\in S\mid 0<\tau_q(s)\leqslant A(s)\}|}{|\{s\in S\mid \tau_q(s)>0\}|}$$

是关于 τ_q 和 A 的模糊技能包含度。其主要工作包括：提出了模糊技能包含度的新概念，并构建了变精度 α-模型以细化知识状态分类；通过定义技能包含度(即满足最低要求的技能占比)，量化了技能掌握水平，克服了模糊技能的析取与合取模型的极端约束；基于包含度构建了变精度 α-模型，将知识结构划分为不同层次，证明了其有限性及对偶性质，并通过实例验证了模型的有效性；进一步将该模型扩展至模糊技能多映射，提出变精度 α-能力模型，丰富了知识结构的刻画方式；说明了传统析取与合取模型为该文模型的特殊情形。

黄传义等[112]则基于变精度 α-模型提出了三种变精度 γ-模型，探讨了其构建知识结构的性质，并研究了这些模型之间的联系；通过研究矩阵乘法与技能包含度的关系，提出了基于变精度模型的矩阵方法来构建知识结构的方法。

4 未来研究方向

在粗糙集理论与知识空间理论交叉研究中，目前的研究问题主要集中在通过技能约简寻找最小技能集、变精度模型构造知识结构，以及通过粗糙集近似算子构建知识结构等。然而，还有许多粗糙集的方法并未引入到知识空间理论之中，许多有趣的问题也亟待解决。例如，与技能约简相对应，实际应用中问题(项目)集中也可能存在冗余问题的情况，这可能导致学生做了许多重复的问题而降低了学习效

率。如何通过粗糙集理论的思想对相似或相近的问题集进行约简，删除冗余问题以精简构建的知识结构，并减少计算量，也是一个有意义的问题。

此外，传统知识空间理论研究多基于理想假设，即个体作答无粗心错误或幸运猜测。然而，实际学习中，观测反应与潜在知识状态间的映射具有随机性，粗心算错与幸运猜对两类误差不可避免，响应(response)模式与真实的知识状态会有误差。Falmagne 等[6]提出基于马尔可夫链和潜在类别模型(LCM)的概率化知识空间理论框架，将状态概率与作答行为关联，给出了概率知识结构这一概念，建立了基本局部独立模型(BLIM)。

关于概率知识结构与 BLIM，知识空间理论中也有很多理论研究，参见文献[113-115]。在粗糙集理论中，概率模型也是一类重要问题，如 Slezak 等[116]针对经典粗糙集模型在概率信息处理上的局限性，提出基于先验概率的贝叶斯粗糙集模型，扩展了变精度粗糙集框架，为非参数化概率粗糙集方法的研究提供了新思路与工具；Liu 等[117]提出基于损失差异的四级概率规则选择准则，通过该准则生成十类概率粗糙集模型，形成双向概率决策模型与三支概率决策模型两组模型，通过优化决策风险构建新框架；Ma 等[118]提出了在一种双论域概率粗糙集框架下的贝叶斯风险决策方法，扩展了传统单论域模型，建立了其与贝叶斯风险决策的理论对应关系，证明任意模型均存在匹配的最小风险决策问题，并涵盖单论域广义概率粗糙集的特例。这两种理论中的概率模型融合，也是一个有趣的研究方向，不但可以扩展两种理论的广度，还会使得这两种理论发展出更强的生命力。

5　结束语

知识空间理论(KST)与粗糙集理论(RST)作为认知建模与不确定性分析的两大数学框架，经过四十年的发展，已形成较为系统的理论体系。文中首先系统梳理了 KST 在知识结构构建这一核心问题的研究进展，主要包括：知识结构构建范式从二分向多分体系的演进，显著拓展了教育诊断与认知评估的应用边界；多分知识空间理论框架的建立，为复杂知识层级建模提供了形式化工具；基于技能映射的模型深化了知识状态与技能习得的关联分析。随后，文中总结了 RST 的部分理论与方法，并探讨了其在 KST 研究中的潜在应用，特别是技能约简、变精度模型及基于粗糙集算子构造知识结构的方法。

当前，该交叉研究领域正面临跨学科方法论整合的需求，亟待结合形式概念分析、认知诊断理论等工具，构建更具适应性的计算教育学框架。未来，粗糙集方法与多分知识空间理论的交叉融合研究或将成未来突破重点。随着人工智能技术的不断发展，相信该领域今后会涌现出更多、更好的 KST 与 RST 交叉创新方法，并在教育技术等领域发挥重要作用，为知识评估与个性化学习提供更加精准和高效的数学工具。

参考文献：

[1] DOIGNON J P，FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies，1985，25(2)：175-196. DOI：10.1016/S0020-7373(85)80031-6.

[2] REDDY A A，HARPER M. ALEKS-based placement at the university of illinois[C]//Knowledge Spaces：Applications in Education. New York：Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2013：51-68.

[3] 刘艳花，杨贯中. 基于扩展知识空间理论的技能自适应测试过程[J]. 计算机系统应用，2010，19(7)：69-73. DOI：10.3969/j. issn. 1003-3254. 2010. 07. 016.

[4] 刘译蓬. 基于知识空间理论的认知诊断自适应测试选题方法研究[D]. 锦州：渤海大学，2019.

[5] 谈成群，谢深泉. 超文本教学系统中学生知识的自适应测评研究[J]. 计算机工程与设计，2007，28(20)：5072-5075. DOI：10. 3969/j. issn. 1000-7024. 2007. 20. 077.

[6] FALMAGNE J C，DOIGNON J P. Learning spaces：Interdisciplinary applied mathematics[M]. Berlin：Springer-Verlag，2011.

[7] STEFANUTTI L，ANSELMI P，DE CHIUSOLE D，*et al*. On the polytomous generalization of knowledge space theory [J]. Journal of Mathematical Psychology，2020，94：102306.

[8] HELLER J. Generalizing quasi-ordinal knowledge spaces to polytomous items[J]. Journal of Mathematical Psychology，2021，101：102515. DOI：10. 1016/j. jmp. 2021. 102515.

[9] STEFANUTTI L,SPOTO A,ANSELMI P,*et al*. Towards a competence based polytomous knowledge structure theory[J]. Journal of Mathematical Psychology,2023,115:102781. DOI:10.1016/j.jmp.2023.102781.

[10] LIKERT R. A technique for the measurement of attitudes[J]. Archives of Psychology,1932,22(140):5-55.

[11] FALMAGNE J C,KOPPEN M,VILLANO M,*et al*. Introduction to knowledge spaces: How to build, test, and search them[J]. Psychological Review,1990,97(2):201-224. DOI:10.1037/0033-295X.97.2.201.

[12] KOPPEN M,DOIGNON J P. How to build a knowledge space by querying an expert[J]. Journal of Mathematical Psychology,1990,34(3):311-331. DOI:10.1016/0022-2496(90)90035-8.

[13] KOPPEN M. Extracting human expertise for constructing knowledge spaces: An algorithm[J]. Journal of Mathematical Psychology,1993,44(3):383-407. DOI:10.1006/jmps.1993.1001.

[14] KAMBOURI M,KOPPEN M,VILLANO M,*et al*. Knowledge assessment: Tapping human expertise by the Query routine[J]. International Journal of Human-Computer Studies, 1994, 40(1): 119-151. DOI: 10.1006/ijhc.1994.1006.

[15] DOWLING C E. Applying the basis of a knowledge space for controlling the questioning of an expert[J]. Journal of Mathematical Psychology,1993,37(1):21-48. DOI:10.1006/jmps.1993.1002.

[16] COSYN E,THIERY N. A practical procedure to build a knowledge structure[J]. Journal of Mathematical Psychology,2000,37(1):1-20. DOI:10.1006/jmps.1998.1252.

[17] STEFANUTTI L,KOPPEN M. A procedure for the incremental construction of a knowledge space[J]. Journal of Mathematical Psychology,2003,47(3):265-277. DOI:10.1016/S0022-2496(02)00022-6.

[18] ÜNLÜ A,SARGIN A. DAKS: An r package for data analysis methods in knowledge space theory[J]. Journal of Statistical Software,2010,37(2):1-31. DOI:10.1016/j.jnca.2010.03.015.

[19] SCHREPP M. Explorative analysis of empirical data by boolean analysis of questionaires[J]. Zeitschrift für Psychologie,2002,210(2):99-109. DOI:10.1026/0044-3409.210.2.99.

[20] THEUNS P. Building a knowledge space *via* Boolean analysis of co-occurrence data[M]. DOWLING C E, ROBERTS F S,THEUNS P. Recent Progress in Mathematical Psychology: Psychophysica, Knowledge, Representation, Cognition and Measurement. New York: Psychology Press,1998:173-194.

[21] SCHREPP M. On the empirical construction of implications between bi-valued test items[J]. Mathematical Social Sciences,1999,38(3):361-375. DOI:10.1016/S0165-4896(99)00025-6.

[22] SARGIN A,ÜNLÜ A. Inductive item tree analysis: Corrections, improvements, and comparisons[J]. Mathematical Social Sciences,2009,58(3):376-392. DOI:10.1016/j.mathsocsci.2009.06.001.

[23] DE CHIUSOLE D,STEFANUTTI L,SPOTO A. A class of *k*-modes algorithms for extracting knowledge structures from data[J]. Behavior Research Methods,2017,49(4):1212-1226. DOI:10.3758/s13428-016-0780-7.

[24] CHATURVEDI A,GREEN P E,CAROLL J D. *k*-modes clustering[J]. Journal of Classification,2001,18(1):35-55. DOI:10.1007/s00357-001-0004-3.

[25] DOIGNIN J P. Knowledge spaces and skill assignments[C]//Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology. New York: Springer-Verlag,1994:111-121.

[26] SPOTO A,STEFANUTTI L,VIDOTTO G. Knowledge space theory, formal concept analysis, and computerized psychological assessment[J]. Behavior Research Methods,2010,42(1):342-350. DOI:10.3758/BRM.42.1.342.

[27] SPOTO A,STEFANUTTI L,VIDOTTO G. On the unidentifiability of a certain class of skill map-based probabilistic knowledge structures[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2012, 56(4), 248-255. DOI: 10.1016/j.jmp.2012.05.001.

[28] SUCK R. Parsimonious set representations of orders, a generalization of the interval order concept, and knowledge spaces[J]. J Discrete Applied Mathematics,2003,127:373-386. DOI:10.1016/S0166-218X(02)00255-X.

[29] SUCK R. Set representations of orders and a structural equivalent of saturation[J]. Journal of Mathematical Psychology,2004,48:159-166. DOI:10.1016/j.jmp.2004.03.001.

[30] SUCK R. Skills first: An alternative approach to construct knowledge spaces[J]. Journal of Mathematical Psychology,2021,101:102517. DOI:10.1016/j.jmp.2021.102517.

[31] SPOTO A,STEFANUTTI L,VIDOTTO G. An iterative procedure for extracting skill maps from data[J]. Behavior Research Methods,2016,48(2):729-741. DOI:10.3758/s13428-015-0609-9.

[32] 周银凤,李进金,冯丹露,等.形式背景下的学习路径与技能评估[J].模式识别与人工智能,2021,34(12):1069-

1084. DOI:10. 16451/j. cnki. issn1003-6059. 202112001.

[33] 周银凤,李进金.形式背景下的技能约简与评估[J].计算机科学与探索,2022,16(3):692-702. DOI:10. 3778/j. issn. 1673-9418. 2008024.

[34] SUN Wen,LI Jinjin,GE Xun,*et al*. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps[J]. Fuzzy Sets and Systems,2021,407:50-66. DOI:10. 1016/j. fss. 2020. 10. 004.

[35] CAO Xiyan,LIN Fucai,SUN Wen,*et al*. A note on knowledge structures delineated by fuzzy skill multimaps[J]. Fuzzy Sets and Systems,2025,505:109282. DOI:10. 1016/j. fss. 2025. 109282.

[36] SCHREPP M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives[J]. Journal of Mathematical Psychology,1997,41(3):237-243. DOI:10. 1006/jmps. 1997. 1169.

[37] WANG Bo,LI Jinjin,SUN Wen,*et al*. Notes on the polytomous generalization of knowledge space theory[J]. Journal of Mathematical Psychology,2022,109:102672. DOI:10. 1016/j. jmp. 2022. 102672.

[38] WANG Bo,LI Jinjin,SUN Wen. CD-polytomous knowledge spaces and corresponding polytomous surmise systems [J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,2023,76(1):87-105. DOI:10. 1111/bmsp. 12283.

[39] BARTL E,BELOHLAVEK R. Knowledge spaces with graded knowledge states[J]. Information Sciences,2011, 181(8):1426-1439. DOI:10. 1109/KAM. 2008. 106.

[40] GE Xun. On galois connections between polytomous knowledge structures and polytomous attributions[J]. Journal of Mathematical Psychology,2022,110:102708. DOI:10. 1016/j. jmp. 2022. 102708.

[41] 孙晓燕,李进金.基于程序性知识学习的项目状态转移函数与多分知识结构[J].模式识别与人工智能,2022,35(3):223-242. DOI:10. 16451/j. cnki. issn1003-6059. 202203003.

[42] SUN Wen,LI Jinjin,LIN Fucai,*et al*. Constructing polytomous knowledge structures from fuzzy skills[J]. Fuzzy Sets and Systems,2023,461:108395. DOI:10. 1016/j. fss. 2022. 09. 003.

[43] DE CHIUSOLE D,SPOTO A,STEFANUTTI L. Extracting partially ordered clusters from ordinal polytomous data[J]. Behavior Research Methods,2020,52:503-520. DOI:10. 3758/s13428-019-01248-8.

[44] 李金海,张瑞,智慧来,等.知识空间理论研究综述[J].模式识别与人工智能,2024,37(2):106-127. DOI:10. 16451/j. cnki. issn1003-6059. 202402002.

[45] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[46] PAWLAK Z. Rough set: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston:Kluwer Academic Publishers, 1991.

[47] ORŁOWSKA E. Incomplete Information: Rough set analysis[M]. Berlin:Springer Verlag,1998.

[48] KRYSZKIEWICZ M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences,1998,112 (1/2/3/4):39-49. DOI:10. 1016/S0020-0255(98)10019-1.

[49] YAO Yiyu. A comparative study of fuzzy sets and rough sets[J]. Information Sciences,1998,109(1/2/3/4):227-242. DOI:10. 1016/S0020-0255(98)10023-3.

[50] RADZIKOWSKA A M,KERRE E E. Transactions on rough sets Ⅱ[M]. Berlin: Springer,2004.

[51] ZHU W. Generalized rough sets based on relations[J]. Information Sciences,2007,177(22):4997-5011. DOI:10. 1016/j. ins. 2007. 05. 037.

[52] ESTAJI A A,KHODAII S,BAHRAMI S. On rough set and fuzzy sublattice[J]. Information Sciences,2011,181 (18):3981-3994. DOI:10. 1016/j. ins. 2011. 04. 043.

[53] YAO Yiyu. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences,1998,109(1/2/3/4):21-47. DOI:10. 1016/S0020-0255(98)00012-7.

[54] THIELE H. On axiomatic characterizations of crisp approximation operators[J]. Information Sciences,2000,129 (1/2/3/4):221-226. DOI:10. 1016/S0020-0255(00)00019-0.

[55] SHE Yanhong,WANG Guojun. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Computers & Mathematics with Applications,2009,58(1):189-201. DOI:10. 1016/j. camwa. 2009. 03. 100.

[56] 吴伟志,米据生.粗糙集的数学结构[M].北京:科学出版社,2019.

[57] WU Weizhi,MI Jusheng,ZHANG Wenxiu. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences,2003,151:263-282. DOI:10. 1016/S0020-0255(02)00379-1.

[58] RADZIKOWSKA A M,KERRE E E. A comparative study of fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2002, 126(2):137-155. DOI:10. 1016/S0165-0114(01)00032-X.

[59] MI Jusheng,ZHANG Wenxiu. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Sciences,2004,160(1/2/3/4):235-249. DOI:10. 1016/j. ins. 2003. 08. 017.

[60] WU Weizhi,ZHANG Wenxiu. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences,2004,159(3/4):233-254. DOI:10. 1016/j. ins. 2003. 08. 005.

[61] LI Tongjun. Rough approximation operators on two universes of discourse and their fuzzy extensions[J]. Fuzzy Sets and Systems,2008,159(22):3033-3050. DOI:10. 1016/j. fss. 2008. 04. 008.

[62] LI Tongjun,ZHANG Wenxiu. Rough fuzzy approximations on two universes of discourse[J]. Information Sciences, 2008,178(3):892-906. DOI:10. 1016/j. ins. 2007. 09. 006.

[63] ZHANG Hongying,ZHANG Wenxiu,WU Weizhi. On characterization of generalized interval-valued fuzzy rough sets on two universes of discourse[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2009,51(1):56-70. DOI: 10. 1016/j. ijar. 2009. 07. 002.

[64] LIU Guilong. Rough set theory based on two universal sets and its applications[J]. Knowledge-Based Systems, 2010,23(2):110-115. DOI:10. 1016/j. knosys. 2009. 06. 011.

[65] ALI M I,DAVVAZ B,SHABIR M. Some properties of generalized rough sets[J]. Information Sciences,2013,224: 170-179. DOI:10. 1016/j. ins. 2012. 10. 026.

[66] HU Baoqing,WONG H. Generalized interval-valued fuzzy rough sets based on interval-valued fuzzy logical operators[J]. International Journal of Fuzzy Systems,2013,15(4):381-391.

[67] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control,1965,8(3):338-353. DOI:10. 1016/S0019-9958(65)90241-X.

[68] ZHAI Jun,CHEN Yan,WANG Qinglian,*et al*. Fuzzy ontology models using intuitionistic fuzzy set for knowledge sharing on the semantic web[C]//12th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design. Xi′an: IEEE Press,2008:465-469. DOI:10. 1109/CSCWD. 2008. 4537023.

[69] DUBOIS D,PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems,1990, 17(2/3):191-209. DOI:10. 1016/0165-0114(90)90146-W.

[70] NANDA S,MAJUMDAR S. Fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,45:157-160. DOI:10. 1016/0165-0114(92)90114-J.

[71] MORSI N N,YAKOUT M M. Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1998,100(1/2/3): 327-342. DOI:10. 1016/S0165-0114(97)00104-8.

[72] SAMANTA S K,MONDAL T K. Intuitionistic fuzzy rough sets and rough intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Fuzzy Mathematics,2001,9(3):561-582.

[73] CORNELIS C,COCK M D,KERRE E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: At the crossroads of imperfect knowledge [J]. Expert Systems,2003,20:260-270. DOI:10. 1111/1468-0394. 00250.

[74] DUBOIS D,PRADE H. Interval-valued fuzzy sets, possibility theory and imprecise probability[C]//Proceedings of the Joint 4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and the 11th Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications. Barcelona: DBLP,2005:314-319.

[75] ZHANG Zhiming. An interval-valued intuitionistic fuzzy rough set model[J]. International Journal of General Systems,2010,39(2):135-164. DOI:10. 1080/03081070903393832.

[76] ZHANG Zhiming. On interval type-2 rough fuzzy sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 35: 1-13. DOI: 10. 1016/j. knosys. 2012. 04. 002.

[77] YANG Xibei,SONG Xiaoning,QI Yunsong,*et al*. Constructive and axiomatic approaches to hesitant fuzzy rough set[J]. Soft Computing,2014,18:1067-1077. DOI:10. 1007/s00500-013-1127-2.

[78] WANG Chunyong. Type-2 fuzzy rough sets based on extended t-norms[J]. Information Sciences,2015,305:165-183. DOI:10. 1016/j. ins. 2015. 01. 024.

[79] YANG Bin,HU Baoqing. A fuzzy covering-based rough set model and its generalization over fuzzy lattice[J]. Information Sciences,2016,367/368:463-486. DOI:10. 1016/j. ins. 2016. 05. 053.

[80] YANG Bin,HU Baoqing. On some types of fuzzy covering-based rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2017,312: 36-65. DOI:10. 1016/j. fss. 2016. 10. 009.

[81] BEZDEK J C,HARRIS J D. Fuzzy partitions and relations: An axiomatic basis for clustering[J]. Fuzzy Sets and Systems,1978,1(2):111-127. DOI:10. 1016/0165-0114(78)90012-X.

[82] GRECO S,MATARAZZO B,SLOWINSKI R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research,2001,129(1):1-47. DOI:10.1016/S0377-2217(00)00167-3.

[83] HU Baoqing,WANG Chunyong. On type-2 fuzzy relations and interval-valued type-2 fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2014,236:1-32. DOI:10.1016/j.fss.2013.07.011.

[84] GOGUEN J A. *L*-fuzzy set[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1967,18:145-174. DOI:10.1016/0022-247X(67)90189-8.

[85] GRECO S,INUIGUCHI M,SLOWINSKI R. Fuzzy rough sets and multiple-premise gradual decision rules[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2006,41:179-211. DOI:10.1016/j.ijar.2005.06.014.

[86] KONDO M. On the structure of generalized rough sets[J]. Information Sciences,2006,176(5):589-600. DOI:10.1016/j.ins.2005.01.001.

[87] KOTŁOWSKI W,DEMBCZYSKI K,GRECO S,*et al*. Stochastic dominance-based rough set model for ordinal classification[J]. Information Sciences,2008,178(21):4019-4037. DOI:10.1016/j.ins.2008.06.013.

[88] LEUNG Y,FISCHER M M,WU Weizhi,*et al*. A rough set approach for the discovery of classification rules in interval-valued information systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2008,47(2):233-246. DOI:10.1016/j.ijar.2007.05.001.

[89] ZHANG Zhiming. On characterization of generalized interval type-2 fuzzy rough sets[J]. Information Sciences,2013,219:124-150. DOI:10.1016/j.ins.2012.07.013.

[90] DU Wensheng,HU Baoqing. Dominance-based rough set approach to incomplete ordered information systems[J]. Information Sciences,2016,346/347:106-129. DOI:10.1016/j.ins.2016.01.098.

[91] DU Wensheng,HU Baoqing. Dominance-based rough fuzzy set approach and its application to rule induction[J]. European Journal of Operational Research,2017,261(2):690-703. DOI:10.1016/j.ejor.2016.12.004.

[92] QIAO Junsheng,HU Baoqing. Granular variable precision *L*-fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2018,336:54-86. DOI:10.1016/j.fss.2016.12.002.

[93] SUN Yan,SHI Fugui. Representations of *L*-fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences,2023,645:119324.

[94] KONDO M. *L*-fuzzy relations on residuated lattices[C]//54th IIEEE nternational Symposium on Multiple-Valued Logic(ISMVL). Brno: IEEE Press,2024:115-119.

[95] WALKER C L,WALKER E A. The algebra of fuzzy truth values[J]. Fuzzy Sets and Systems,2005,149:309-347. DOI:10.1016/j.fss.2003.12.003.

[96] STARCZEWSKI J T. Extended triangular norms[J]. Information Sciences,2009,179(6):742-757. DOI:10.1016/j.ins.2008.11.009.

[97] 王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1246. DOI:10.3724/SP.J.1016.2009.01229.

[98] XU Feifei,MIAO Duoqiang,YAO Yiyu,*et al*. Analyzing skill sets with or-relation tables in knowledge spaces[C]//8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Hong Kong: IEEE Press,2009:174-180. DOI:10.1109/COGINF.2009.5250759.

[99] 高纯,王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索,2010,4(12):1109-1114. DOI:10.3778/j.issn.1673-9418.2010.12.005.

[100] YAO Yiyu,MIAO Duoqiang,XU Feifei. Granular structures and approximations in rough sets and knowledge spaces[M]//ABRAHAM A,FALCÓN R,BELLO R. Rough Set Theory: A True Landmark in Data Analysis. Berlin: Spring-Verlag,2009:71-84.

[101] LIU Guilong. Rough set approaches in knowledge structures[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2021,138:78-88. DOI:10.1016/j.ijar.2021.08.003.

[102] WANG Gongxun,LI Jinjin,XU Bochi. Constructing polytomous knowledge structures from *L*-fuzzy *S*-approximation operators[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2025,179:109363. DOI:10.1016/j.ijar.2025.109363.

[103] MIESZKOWICZ-ROLKA A,ROLKA L. Variable precision rough sets in analysis of inconsistent decision tables[M]//RUTKOWSKI L,KACPRZYK J. Advances in Soft Computing. Heidelberg: Physica-Verlag,2003:304-309.

[104] MIESZKOWICZ-ROLKA A,ROLKA L. Variable precision fuzzy rough sets[M]//PETERS J F,SKOWRON A,GRZYMAŁA-BUSSE J W,*et al*. Transactions on Rough Sets Ⅰ. Berlin: Spring-Verlag,2004:144-160.

[105] ZHANG Hongying,LEUNG Y,ZHOU Lei. Variable-precision-dominance-based rough set approach to interval-valued information systems[J]. Information Sciences,2013,244:75-91. DOI:10.1016/j.ins.2013.04.031.

[106] LIU Guilong,LIU Jie. A variable precision reduction type for information systems[M]//KNIGHT K,ZHANG C,HOLMES G,*et al*. Artificial Intelligence. Singapore: Springer-Verlag,2019:240-247.

[107] SUN Bingzhen,MA Weimin,CHEN Xiangtang. Variable precision multigranulation rough fuzzy set approach to multiple attribute group decision-making based on λ-similarity relation[J]. Computers & Industrial Engineering,2019,127:326-343. DOI:10.1016/j.cie.2018.10.009.

[108] 杨桃丽,李进金,李招文,等.基于技能构建知识结构的两种变精度模型与技能子集约简[J].模式识别与人工智能,2022,35(8):671-687. DOI:10.16451/j.cnki.issn1003-6059.2022080001.

[109] YANG Taoli,LI Jinjin,LI Zhaowen,*et al*. The inclusion degrees of skill maps and knowledge structures[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,2023,45(4):5765-5781. DOI:10.3233/JIFS-222149.

[110] 杨桃丽.构建知识结构的两种变精度模型[D].漳州:闽南师范大学,2023.

[111] XU Bochi,LI Jinjin. The inclusion degrees of fuzzy skill maps and knowledge structures[J]. Fuzzy Sets and Systems,2023,465:108540.

[112] 黄传义,黄韩亮,杨竞菁,等.变精度模型构建的知识结构[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):43-54. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024135.

[113] STEFANUTTI L,ROBUSTO E. Recovering a probabilistic knowledge structure by constraining its parameter space[J]. Psychometrika,2009,74(1):83-96. DOI:10.1007/s11336-008-9095-7.

[114] ANSELMI P,STEFANUTTI L,DE CHIUSOLE D,*et al*. The assessment of knowledge and learning in competence spaces: The gain-loss model for dependent skills[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,2017,70(3):457-479. DOI:10.1111/bmsp.12095.

[115] SPOTO A,STEFANUTTI L,VIDOTTO G. On the unidentifiability of a certain class of skill map-based probabilistic knowledge structures[J]. Journal of Mathematical Psychology,2012,56(4):248-255. DOI:10.1016/j.jmp.2012.05.001.

[116] SLEZAK D,ZIARKO W. The investigation of the bayesian rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2005,40:81-91. DOI:10.1016/j.ijar.2004.11.004.

[117] LIU Dun,LI Tianrui,RUAN Da. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences,2011,181(17):3709-3722. DOI:10.1016/j.ins.2011.04.039.

[118] MA Weimin,SUN Bingzhen. On relationship between probabilistic rough set and Bayesian risk decision over two universes[J]. International Journal of General Systems,2012,41(3):225-245. DOI:10.1080/03081079.2011.634067.

(**责任编辑:** 黄仲一　**英文审校:** 黄心中)