

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202403012



# 广义(2+1)维 Hirota-Maccari 系统的动力学及混沌行为

张冬梅, 梁建莉

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 采用微分方程定性理论和动力系统分支方法研究广义(2+1)维 Hirota-Maccari 系统的动力学及混沌行为, 获得对应行波系统的分支相图, 得到系统的周期波解和孤立波解的精确表达式。通过数值模拟研究不同参数条件下的行波解波形及其性质的变化, 对该系统增加一个周期扰动项之后, 利用 Matlab 软件得到扰动系统在一些特殊参数条件下的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面。结果表明: 该系统在特定参数条件下的运动是准周期的。

**关键词:** 广义(2+1)维 Hirota-Maccari 系统; 行波解; 孤立波解; 混沌行为

**中图分类号:** O 175.29

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5013(2025)01-0113-08

## Dynamics and Chaotic Behavior of Generalized (2+1)-Dimensional Hirota-Maccari System

ZHANG Dongmei, LIANG Jianli

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The dynamics and chaotic behavior of generalized (2+1)-dimensional Hirota-Maccari system are studied by the qualitative theory of differential equations and the bifurcation method of dynamical systems, the bifurcations of phase portraits of the corresponding traveling wave system are obtained, and the exact expressions of the periodic wave solutions and solitary wave solutions of the system are obtained. Numerical simulation is carried out to study the wave forms and properties of traveling wave solutions under different parameter conditions. After adding periodic perturbation term to the system, 2D phase portrait, 3D phase portrait and Poincare section of the perturbed system are obtained by Matlab software under the special parameter conditions. The results show that the motion of the system is quasi-periodic under specific parameter conditions.

**Keywords:** generalized (2+1)-dimensional Hirota-Maccari system; traveling wave solution; solitary wave solution; chaotic behavior

### 1 预备知识

光孤子可以作为长距离光纤通信和光数据传输的信息载体。单模光纤中两个最重要的物理因素是群速度色散和自相位调制。光孤子消除了由于群速度色散引起的脉冲展宽, 自相位调制促进了脉冲压缩。群速度色散和自相位调制之间的精确平衡是实现光纤中光孤子的基础。光孤子可以用非线性偏微

**收稿日期:** 2024-03-02

**通信作者:** 梁建莉(1979-), 女, 副教授, 博士, 主要从事微分方程与动力系统的研究。E-mail: aalison18@163.com。

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金资助项目(11901215); 福建省自然科学基金资助项目(2022J01303)

分方程(NLPDE)进行描述,这激发了学者们对 NLPDE 的研究兴趣。

广义(2+1)维 Hirota-Maccari 系统<sup>[1]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} iu_t + u_{xy} + iu_{xxx} + uv - i|u|^2 u_x &= 0, \\ 3v_x + (|u|^2)_y &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: $x, y$  为空间变量; $t$  为时间变量; $u(x, y, t)$  为复函数; $v(x, y, t)$  为实函数。

系统(1)是一种特殊的非线性薛定谔方程,用于模拟局部空间中孤立波的运动,即在光纤通信、等离子体物理、非线性光学、流体力学等领域中具有有限频率密度扰动的大振幅低混合波的相互作用<sup>[2]</sup>,也解释了飞秒孤子脉冲在单模光纤中传播的动力学行为。许多学者用不同的方法得到系统(1)的解析解和孤子解,例如,( $1/G''$ )-expansion 法<sup>[3]</sup>、new Kudryashov 法和 tanh-coth 法<sup>[4]</sup>、Jacobi elliptic function expansion 法<sup>[5]</sup>、KP 约化法<sup>[6]</sup>、改进  $\tan(\varphi(\xi)/2)$ -expansion 法<sup>[7]</sup>、Sinh-Gordon 法<sup>[8]</sup>及其他处理 NLPDE 的方法<sup>[9-16]</sup>。本文采用微分方程定性理论和动力系统分支方法,分析系统(1)的行波解和动力学行及其扰动系统的混沌行为。

2 定性分析与分支相图

对系统(1)进行行波变换,令

$$u(x, y, t) = e^{i\theta} U(\xi), \quad v(x, y, t) = V(\xi). \tag{2}$$

式(2)中: $\xi = \mu(x + y - ct)$ ,  $\theta = rt + ax + by$ ,  $\mu, c, a, b, r$  为常数,通常  $c, r$  为波速,  $a, b$  为波频。

把式(2)代入系统(1)的第 2 个方程并积分一次,可得

$$V(\xi) = -U^2(\xi)/3. \tag{3}$$

再把式(2),(3)代入系统(1)的第 1 个方程,将实部和虚部进行分离,并对虚部积分一次,可得

$$\left. \begin{aligned} U'' &= \frac{a^3 - r - ab}{(3a - 1)\mu^2} U + \frac{1}{3\mu^2} U^3, \\ U'' &= \frac{c - a - b + 3a^2}{\mu^2} U + \frac{1}{3\mu^2} U^3. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$\text{令} \quad \alpha = \frac{a^3 - r - ab}{(3a - 1)\mu^2} = \frac{c - a - b + 3a^2}{\mu^2}, \quad \beta = \frac{1}{3\mu^2} > 0, \tag{5}$$

则系统(1)转化为

$$U'' = \alpha U + \beta U^3. \tag{6}$$

令  $Y = U'$ , 可得平面动力系统为

$$\frac{dU}{d\xi} = Y, \quad \frac{dY}{d\xi} = \alpha U + \beta U^3, \tag{7}$$

其首次积分为

$$H(U, Y) = Y^2 - \alpha U^2 - \frac{1}{2} \beta U^4 = h. \tag{8}$$

式(8)中: $h$  为积分常数。

显然,系统(7)有平衡点(0,0)。由式(5)可知, $\beta > 0$ ,当  $\alpha < 0$  时,系统(7)有平衡点  $(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$ 。令  $\mathbf{M}(U, Y)$  是系统(7)在平衡点( $U, Y$ )处的线性化系统的雅可比(Jacobi)矩阵,则有

$$\mathbf{M}(U, Y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha + 3\beta U^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

记 Jacobi 矩阵的行列式  $\mathbf{J}(U, Y) = |\mathbf{M}(U, Y)|$ , 由此可得

$$J(0, 0) = -\alpha, \quad J(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0) = 2\alpha.$$

根据平面动力系统平衡点类型的判定方法,可得定理 1。

**定理 1** 1) 当  $\alpha < 0$  时,系统(7)有 3 个平衡点  $O(0, 0)$ ,  $A(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$  和  $B(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$ , 且  $O$  为中

心,  $A$  和  $B$  为鞍点。2) 当  $\alpha=0$  时, 系统 (7) 只有一个平衡点  $O(0,0)$ , 且为拓扑鞍点。3) 当  $\alpha>0$  时, 系统 (7) 只有一个平衡点  $O(0,0)$ , 且为鞍点。

证明: 1) 当  $\alpha<0$  时, 此时, 系统 (7) 有 3 个平衡点。对于  $O(0,0)$ , Jacobi 矩阵  $\mathbf{M}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ , 此时, 它有一对纯虚特征根  $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{-\alpha}$ , 则  $O$  为中心。同理,  $\mathbf{M}(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\alpha & 0 \end{bmatrix}$ , 此时, 它有一对相反的实特征根  $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-2\alpha}$ , 则  $A$  和  $B$  为鞍点。

2) 当  $\alpha=0$  时, 系统 (7) 只有一个平衡点  $O(0,0)$ , Jacobi 矩阵  $\mathbf{M}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 此时, 它有两个零特征值, 且系统 (7) 变为

$$\frac{dU}{d\xi}=Y, \quad \frac{dY}{d\xi}=\beta U^3。$$

由文献 [17] 中节 2.11 的定理 2 可知, 当  $\beta>0$  时,  $O$  为拓扑鞍点。

3) 当  $\alpha>0$  时, 系统 (7) 只有一个平衡点  $O(0,0)$ , Jacobi 矩阵  $\mathbf{M}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ , 此时, 它有一对相反的实特征根  $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\alpha}$ , 则  $O$  为鞍点。

根据式 (8) 确定的能量函数, 记 3 个平衡点处的能量分别为

$$h_0=H(0,0)=0, \quad h_1=H(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},0)=\frac{\alpha^2}{2\beta}, \quad h_2=H(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},0)=\frac{\alpha^2}{2\beta}。$$

结合上述定性分析, 通过对能量函数赋予不同的数值, 可以得到系统 (7) 在对应参数条件下的相图, 如图 1 所示。

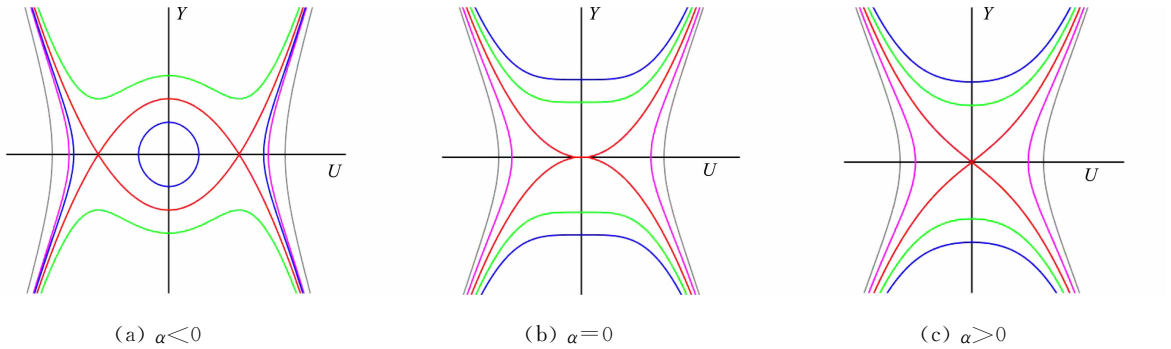


图 1 系统 (7) 的相图分支

Fig. 1 Bifurcations of phase portraits of system (7)

3 系统 (1) 的行波解及其精确表达式

对于一个给定的实数  $h$ , 由式 (8) 给出的方程  $H(U,Y)=h$  定义系统 (7) 中代表不同轨道的能量曲线。根据式 (8) 可得  $Y^2=\frac{\beta}{2}\left(U^4+\frac{2\alpha}{\beta}U^2+\frac{2h}{\beta}\right)$ 。以  $U(0)=U_0$  为初始条件, 由式 (7) 的第 1 个方程可得

$$\xi=\int_{U_0}^U\left[\frac{dU}{\sqrt{\frac{\beta}{2}\left(U^4+\frac{2\alpha}{\beta}U^2+\frac{2h}{\beta}\right)}}\right]。 \tag{9}$$

由式 (9) 可计算各种行波解的精确表达式。主要研究以下两种情形 (情形 1, 2)。

**情形 1** 图 1(a) 中, 当  $h\in(h_0,h_1)$  时, 由  $H(U,Y)=h$  定义的能量曲线是一族包围平衡点  $O(0,0)$  的周期轨和两个开轨道。此时, 式 (9) 为

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}}\xi=\int_{-U_2}^U\frac{dU}{\sqrt{(U_1-U)(U_2-U)(U+U_1)(U+U_2)}}。$$

上式中:  $U_1, U_2, -U_1, -U_2$  为能量曲线与  $U$  轴的交点, 且  $-U_1<-U_2<U<U_2<U_1$ 。

通过计算,可得系统(7)的周期波解为

$$U(\xi)=\frac{-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}{1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}.\tag{10}$$

式(10)中: $k^2=\frac{4U_1U_2}{(U_1+U_2)^2}$ ; $\eta^2=\frac{2U_2}{U_1+U_2}$ ; $\omega=\frac{(U_1+U_2)}{4}\cdot\sqrt{2\beta}$ ;  $\operatorname{sn}(\cdot,k)$ 为 Jacobi 椭圆函数。

由式(3)可得

$$V(\xi)=-\frac{(-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k))^2}{3(1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k))^2}.\tag{11}$$

此时, $V(\xi)$ 为一个周期波解。式(10),(11)对应的波形图,如图 2(a),2(b)所示。

由式(10),(11)可得系统(1)的解为

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,t) &= \exp(i(rt+ax+by)) \cdot \frac{-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\mu(x+y-ct),k)}{1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\mu(x+y-ct),k)}, \\ v(x,y,t) &= -\frac{(-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\mu(x+y-ct),k))^2}{3(1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\mu(x+y-ct),k))^2}. \end{aligned} \right\}\tag{12}$$

由式(12)可得  $u$  的模  $|u|$  和强度分布  $|u|^2=U^2$  分别为

$$|u|=|U|=\left|\frac{-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}{1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}\right|,\tag{13}$$

$$|u|^2=U^2=\left(\frac{-U_2+U_1\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}{1-\eta^2\operatorname{sn}^2(\omega\xi,k)}\right)^2.\tag{14}$$

此时,  $|u|$  和  $|u|^2$  均为周期函数,且  $|u|$  为一个周期尖波,  $|u|^2$  为一个周期波,其波形图,如图 2(c),2(d)所示。

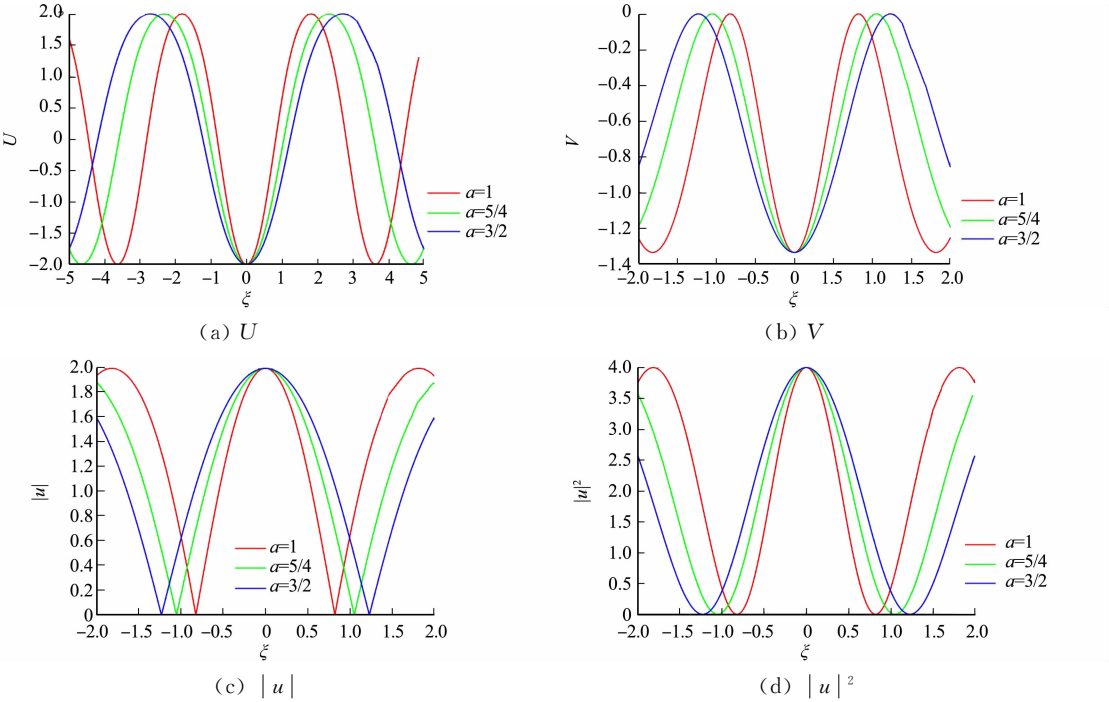


图 2 式(10),(11),(13),(14)对应的波形图

Fig. 2 Waveform diagrams corresponding to formula (10), (11), (13), (14)

通过数值模拟可知,当波频( $a$ )越大时,它们的周期越大,但振幅没有改变。换言之, $V, |u|, |u|^2$  的周期与  $a$  成正比例关系,但振幅与  $a$  无关。

**情形 2** 图 1(a)中,当  $h=h_1$  时,由  $H(U,Y)=h$  定义的能量曲线是两条异宿轨,此时,式(9)可写为  $\sqrt{\frac{\beta}{2}}\xi=\pm\int_0^U\frac{dU}{(U_1-U)(U-U_2)}$ ,其中, $U_1=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, U_2=-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ 。经计算,可得系统(7)的扭波解( $U_+$ )和反扭波解( $U_-$ )分别为

$$U_+=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot \tanh\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\xi\right), \quad U_-=-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot \tanh\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\xi\right), \tag{15}$$

其波形图如图 3(a),3(b)所示。

由式(3)可得

$$V(\xi)=\frac{\alpha}{3\beta}\cdot \tanh^2\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\xi\right). \tag{16}$$

因为  $\alpha<0,\beta>0$ ,所以此时的  $V(\xi)$  为一个亮孤立波解,其波形图如图 3(c)所示。

由式(15),(16)可得系统(1)的解为

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,t) &= \pm \exp(i(rt+ax+by)) \cdot \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \tanh\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\mu(x+y-ct)\right), \\ v(x,y,t) &= \alpha \tanh^2\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\mu(x+y-ct)\right)/3\beta. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

由式(17)可得  $|u|$  和  $|u|^2=U^2$  分别为

$$|u|=|U|=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot \left|\tanh\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\xi\right)\right|, \tag{18}$$

$$|u|^2=U^2=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot \tanh^2\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\xi\right). \tag{19}$$

此时,  $|u|$  为一个反孤立尖波,  $|u|^2$  为暗孤立波,其波形图如图 3(d),3(e)所示。

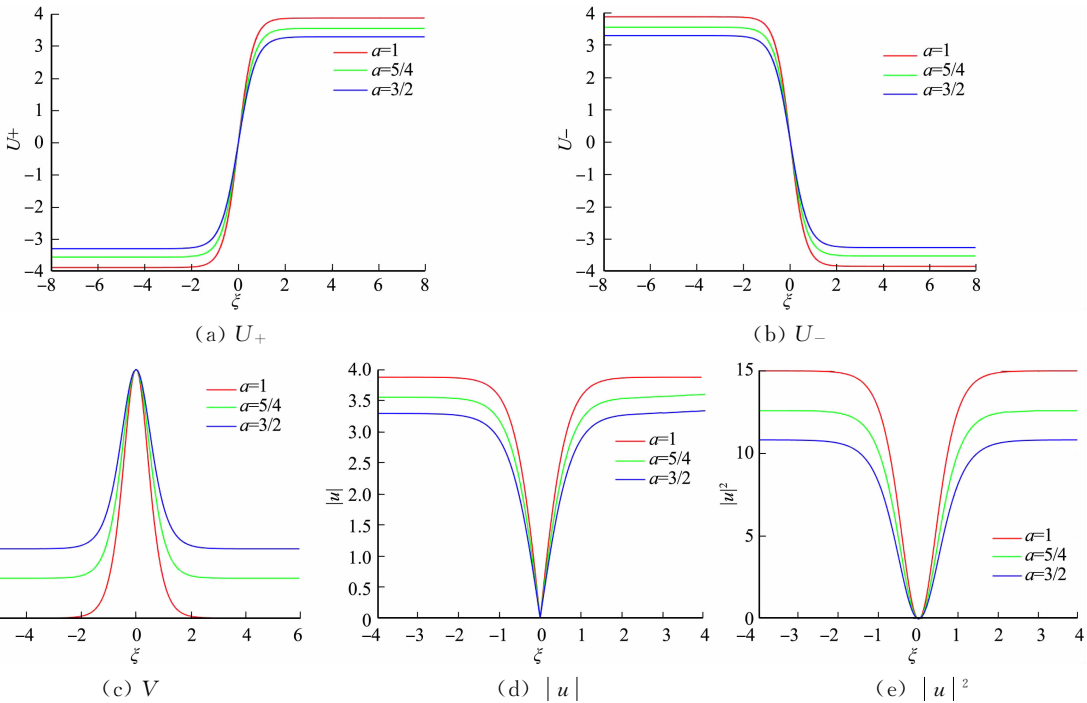


图 3 式(15),(16),(18),(19)对应的波形图

Fig. 3 Waveform diagrams corresponding to formula (15), (16), (18), (19)

背景上的孤立(尖)波是一种行波,其振幅在  $|x|$  中呈指数衰减到非零值,若其振幅在  $|x|$  中呈指数衰减到正值,称该孤立(尖)波为正背景下的,若其振幅在  $|x|$  中呈指数衰减到负值,称该孤立(尖)波为负背景下的。通过数值模拟可得,波函数( $V$ )是在负背景下的亮孤立波,当波频( $a$ )越大时,振幅(高度)越小;  $|u|$  是在正背景下的反孤立尖波,当波频  $a$  越大时,它的振幅(高度)也是越小;  $|u|^2$  是在正背景下的暗孤立波,当波频( $a$ )越大时,它的振幅(高度)也是越小。此外,当  $a$  越大时,  $|u|$  的图像在  $x=0$  处左右的倾斜程度越小。

探究波频( $a$ )与波速( $c$ )之间的关系。由式(5)可得

$$c=\frac{-8a^3+6a^2+(2b-1)a-b-r}{3a-1},$$

$$c'(a)=\frac{-48a^3+42a^2-12a+b+3r+1}{(3a-1)^2}=\frac{-6a(8a^2-7a+2)+b+3r+1}{(3a-1)^2}。$$

当  $b,r$  充分小时,对任意  $a>0$ ,都有  $c'<0$ ;当  $b,r$  充分小时,波频越大,波速反而越小。

**定理 2** 1) 当  $\alpha<0$  时,由  $H(U,Y)=h\in(h_0,h_1)$  定义的能量曲线是一族包围平衡点  $O(0,0)$  的周期轨和两个开轨道,此时,系统(7)存在由式(10)给出的精确周期波解族。

2) 当  $\alpha<0$  时,由  $H(U,Y)=h=h_1$  定义的能量曲线是两条连接  $A\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},0\right)$  和  $B\left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}},0\right)$  的异宿轨,此时,系统(7)存在由式(15)给出的精确扭波解和反扭波解。

4 系统(1)的扰动系统的混沌行为

在系统(1)的右边加上扰动项,可得

$$\left. \begin{aligned} iu_t+u_{xy}+iu_{xxx}+uv-i|u|^2u_x&=f_1, \\ 3v_x+(|u|^2)_y&=f_2。 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

式(20)中: $f_1,f_2$  为扰动项。

把式(2)代入系统(20)并积分一次,将实部和虚部进行分离,可得

$$\left. \begin{aligned} U''&=\frac{a^3-r-ab}{(3a-1)\mu^2}U+\frac{1}{3\mu^2}U^3+f_1, \\ U''&=\frac{c-a-b+3a^2}{\mu^2}U+\frac{1}{3\mu^2}U^3+f_2。 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

现考虑周期扰动,令  $f_i=\gamma\cos(k\xi),i=1,2$ 。若参数满足以下条件

$$\alpha=\frac{a^3-r-ab}{(3a-1)\mu^2}=\frac{c-a-b+3a^2}{\mu^2},\quad \beta=\frac{1}{3\mu^2}>0,$$

则系统(20)转化为带扰动项的平面扰动系统,即

$$\frac{dU}{d\xi}=Y,\quad \frac{dY}{d\xi}=\alpha U+\beta U^3+\gamma\cos(k\xi)。 \tag{22}$$

式(22)中: $\gamma,k$  分别为系统(22)的振幅和频率。

庞加莱映射是一种经典的分析动力系统的方法,通过庞加莱截面上截点的情况可以判断系统是否发生混沌。由文献[18]中节 2.10 可得引理 1。

- 引理 1** 1) 若庞加莱截面上有且仅有一个不动点或少数离散点,则系统的运动是周期的。  
2) 若庞加莱截面上是一封闭曲线,则系统的运动是准周期的。  
3) 若庞加莱截面上是一些成片的密集点,则系统的运动是混沌。

现研究振幅  $\gamma$  和频率  $k$  对系统(22)运动的影响。令  $\alpha=-2,\beta=1/3$ ,并保持不变,并令  $\gamma=0.5,0.8,1.4;k=0.6,0.8,\pi,2\pi$ ,分别可得系统(22)的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面,如图 4~7 所示。

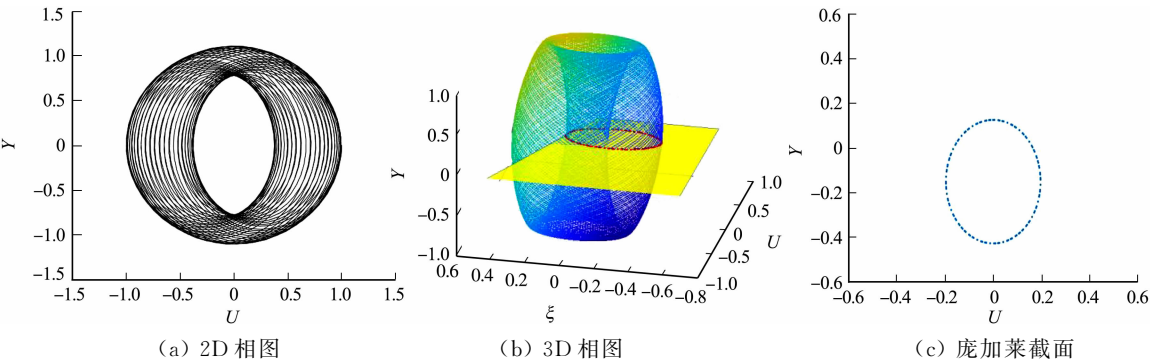


图 4 系统(22)的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面( $\gamma=0.5,k=0.6$ )

Fig. 4 2D phase portrait, 3D phase portrait and Poincare section of system (22) ( $\gamma=0.5,k=0.6$ )

由图 4~7 可知:在这些特定参数条件下,系统(22)的庞加莱截面是一封闭曲线。因此,系统(22)在这些特定参数条件下的运动是准周期的。



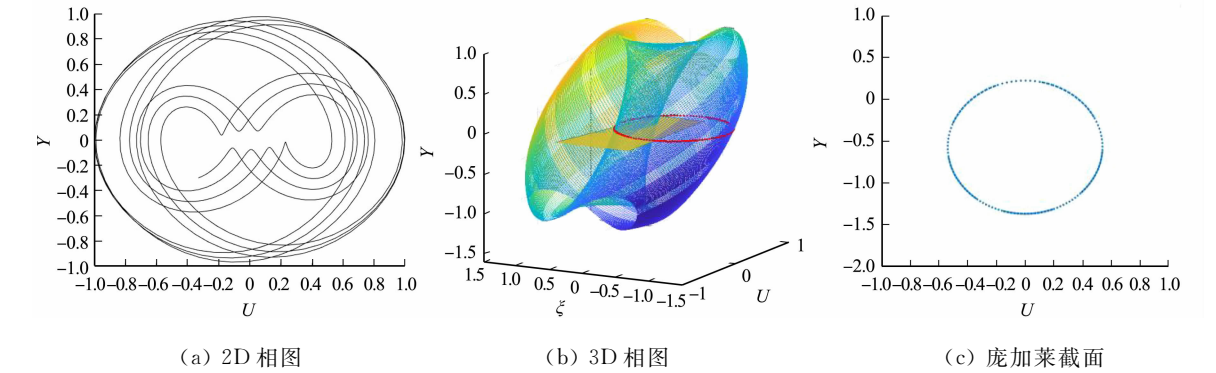


图 5 系统(22)的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面( $\gamma=0.8, k=0.8$ )

Fig. 5 2D phase portrait, 3D phase portrait and Poincare section of system (22) ( $\gamma=0.8, k=0.8$ )

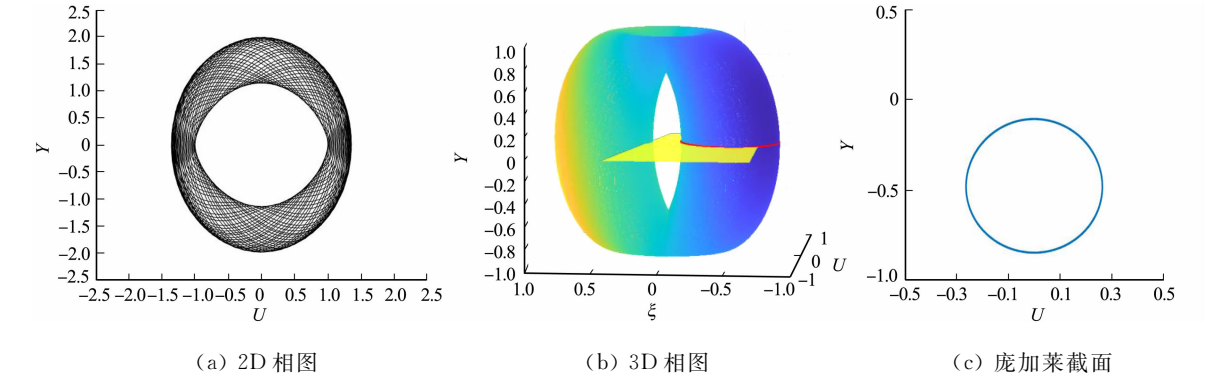


图 6 系统(22)的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面( $\gamma=1, k=\pi$ )

Fig. 6 2D phase portrait, 3D phase portrait and Poincare section of system (22) ( $\gamma=1, k=\pi$ )

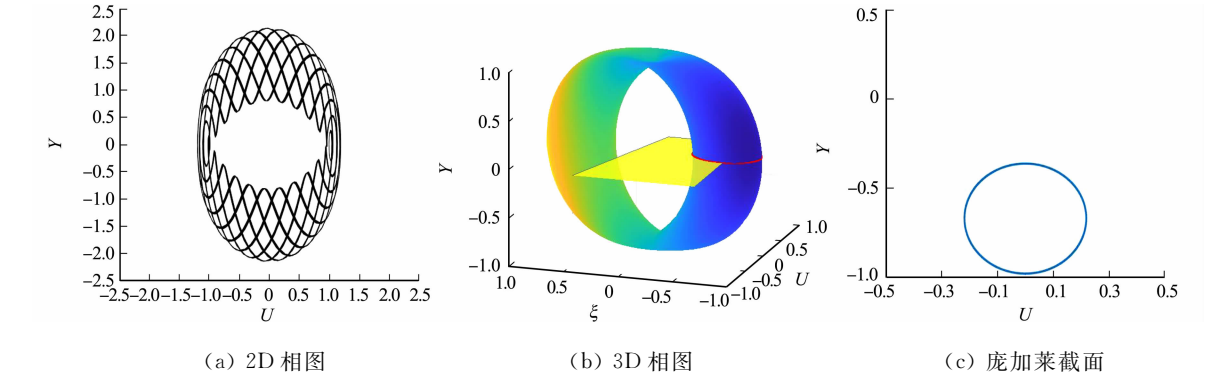


图 7 系统(22)的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面( $\gamma=4, k=2\pi$ )

Fig. 7 2D phase portrait, 3D phase portrait and Poincare section of system (22) ( $\gamma=4, k=2\pi$ )

## 5 结束语

采用平面动力系统的方法研究广义(2+1)维 Hirota-Maccari 方程的分支与行波解,并分析它对应的周期扰动系统,得出该扰动系统在特定参数条件下的 2D 相图、3D 相图和庞加莱截面,可得该扰动系统在特定参数条件下的运动是准周期的。此外,对得到的行波解进行数值模拟,研究不同参数条件下的行波解波形及其性质的变化,并解释相关的物理性质。

## 参考文献:

[1] YU Xin,GAO Yitian,SUN Zhiyuan,*et al.* *N*-soliton solutions for the (2+1)-dimensional Hirota-Maccari equation in fluids, plasmas and optical fibers[J].*Journal of Mathematical Analysis and Applications*,2011,378(2):519-527. DOI:10.1016/j.jmaa.2010.12.019.

[2] MACCARI A. A generalized Hirota equation in 2+1 dimensions[J].*Journal of Mathematical Physics*,1998,39(12):

6547-6551, DOI:10.1063/1.532664.

- [3] YOKUS A, BASKONUS H M. Dynamics of traveling wave solutions arising in fiber optic communication of some nonlinear models[J]. *Soft Computing*, 2022, 26(24):13605-13614. DOI:10.1007/S00500-022-07320-4.
- [4] OZDEMIR N, SECER A, OZISIK M, *et al.* Two analytical schemes for the optical soliton solution of the (2+1) Hirota-Maccari system observed in single-mode fibers[J]. *Universe*, 2022, 8(11):12. DOI:10.3390/universe8110584.
- [5] TARLA S, ALI K K, YILMAZER R, *et al.* Investigation of the dynamical behavior of the Hirota-Maccari system in single-mode fibers[J]. *Optical and Quantum Electronics*, 2022, 54(10):061005. DOI:10.1007/S11082-022-04021-Y.
- [6] XIA Pei, ZHANG Yi, ZHANG Heyan, *et al.* Some novel dynamical behaviors of localized solitary waves for the Hirota-Maccari system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108(1):533-541. DOI:10.1007/s11071-022-07208-w.
- [7] RAZA N, JHANGEER A, REZAZADEH H, *et al.* Explicit solutions of the (2+1)-dimensional Hirota-Maccari system arising in nonlinear optics[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2019, 33(30):1950360(1-21). DOI:10.1142/S0217979219503600.
- [8] YEL G, CATTANI C, BASKONUS H M, *et al.* On the complex simulations with dark-bright to the Hirota-Maccari system[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2021, 16(6):613. DOI:10.1115/1.4050677.
- [9] DEMIRAY S T, PANDIR Y, BULUT H. All exact travelling wave solutions of Hirota equation and Hirota-Maccari system[J]. *Optik*, 2016, 127(4):1848-1859. DOI:10.1016/j.ijleo.2015.10.235.
- [10] AMNA I, NAVEED A, UMAR K, *et al.* Optical solutions of Schrödinger equation using extended Sinh-Gordon equation expansion method[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, 8:73. DOI:10.3389/fphy.2020.00073.
- [11] ALOTAIBI H. Traveling wave solutions to the nonlinear evolution equation using expansion method and addendum to Kudryashov's method[J]. *Symmetry-Basel*, 2021, 13(11):2126. DOI:10.3390/sym13112126.
- [12] CHEN Yong, YAN Zhenya. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2006, 29(4):948-964. DOI:10.1016/j.chaos.2005.08.071.
- [13] VINITA, RAY S S. Optimal system of Lie subalgebra for symmetry reductions, group invariant solutions and exact solutions to the coupled Hirota-Maccari system driving pulse propagation in optical fiber[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2022, 36(17):2250093. DOI:10.1142/S021797922250093X.
- [14] SULAIMAN A T, YEL G, BULUT H. M-fractional solitons and periodic wave solutions to the Hirota-Maccari system[J]. *Modern Physics Letters B*, 2019, 33(5):1950052. DOI:10.1142/S0217984919500520.
- [15] NESLIHAN O, HANDENUR E, AYDIN S, *et al.* Optical solitons and other solutions to the Hirota-Maccari system with conformable, M-truncated and beta derivatives[J]. *Modern Physics Letters B*, 2022, 36(11):2150625. DOI:10.1142/S0217984921506259.
- [16] GHANBARI B. Abundant soliton solutions for the Hirota-Maccari equation via the generalized exponential rational function method[J]. *Modern Physics Letters B*, 2019, 33(9):19501069. DOI:10.1142/S0217984919501069.
- [17] PERKO L. *Differential equations and dynamical systems*[M]. 3rd ed. New York:Springer, 2001.
- [18] 刘秉正. *非线性动力学与混沌基础*[M]. 长春:东北师范大学出版社, 1994.

(责任编辑: 钱筠      英文审校: 黄心中)