



# 应用重心插值的 Burgers 方程数值解法

滕宇航, 赖艺颖, 黄浪扬

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 利用重心插值构造求解 Burgers 方程的无网格数值方法。在时间方向用 Crank-Nicolson 差分法对方程进行离散, 在空间方向用重心插值切比雪夫配点法逼近函数本身及其空间导数。对全离散数值格式进行相容性分析。数值算例表明: 与经典的有限差分方法比较, 重心插值配点法用较少的节点就能达到较高的精度。

**关键词:** Burgers 方程; 重心插值配点法; Crank-Nicolson 差分法; 相容性分析

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2025)01-0104-09

## Numerical Solution Method of Burgers Equation Using Barycentric Interpolation

TENG Yuhang, LAI Yiyang, HUANG Langyang

(School of Mathematical Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The meshless numerical method of Burgers equation is solved using barycentric interpolation construction. The equation is discretized using the Crank-Nicolson difference method in the time direction. The function is approximated to itself and so is its spatial derivative using barycentric interpolation Chebyshev collocation method in spatial direction. The compatibility analysis of the fully discrete numerical value scheme is performed. Numerical experiments show that, compared with the classical finite difference method, the barycentric interpolation collocation method can achieve higher accuracy with fewer nodes.

**Keywords:** Burgers equation; barycentric interpolation collocation method; Crank-Nicolson difference method; compatibility analysis

Burgers 方程是一类描述对流与扩散相互作用的非线性偏微分方程<sup>[1]</sup>, 是 Navier-Stokes 方程中忽略压力项后的简化形式。考虑如下 Burgers 方程, 即

$$\left. \begin{aligned} u_t + u \cdot \nabla u &= v \Delta u, & (X, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u(X, t) &= g(t), & t \in [0, T], \\ u(X, 0) &= f(X), & X \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中:  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d=1, 2$ ) 为有界凸区域, 边界分段光滑。

Burgers 方程在流体力学、气体动力学、交通流等众多领域都有着重要的作用和地位。许多学者对该问题做了大量研究, 并提出了数值解法。陈莲<sup>[2]</sup>建立两种求解 Burgers 方程的 Crank-Nicolson 差分法格式, 并对其进行误差分析。Wang 等<sup>[3]</sup>建立一种求解粘性 Burgers 方程的能量守恒型四阶隐式紧差

收稿日期: 2023-11-03

通信作者: 黄浪扬(1976-), 男, 副教授, 主要从事偏微分方程保结构算法的研究。E-mail: hly6@163.com。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 福建省自然科学基金面上资助项目(2022J01308); 中央高校基  
本科研业务费专项基金资助项目(ZQN702)

分格式。Zhang 等<sup>[4]</sup>利用线性化紧致差分格式求解具有 Burgers 型非线性项的二维 Sobolev 方程。Xu 等<sup>[5]</sup>建立两种求解非线性 Burgers 方程的修正的非协调有限元全离散格式，并对其进行超收敛分析。Wang 等<sup>[6]</sup>建立一种求解 Burgers 方程的多区域 Galerkin 方法，并分析其收敛性及稳定性。Zhao 等<sup>[7]</sup>利用时空连续 Galerkin 方法对二维 Burgers 方程进行数值求解，并给出先验误差估计。Wang 等<sup>[8]</sup>利用弱伽辽金有限元方法求解一类时间分数阶的广义 Burgers 方程。

以上求解 Burgers 方程的数值方法都是基于网格剖分建立离散格式，Chebyshev 节点的重心 Lagrange 插值公式可以有效克服 Runge 现象。很多学者将其推广到求解各类微分方程与积分方程，如 Volterra 积分方程<sup>[9]</sup>、Allen-Cahn 方程<sup>[10-13]</sup>、Black-Scholes 方程<sup>[14]</sup>、分数阶微分方程<sup>[15-16]</sup>等。Ömer<sup>[17]</sup>应用重心插值配点法数值求解了二维和三维 Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) 方程。基于此，本文对应用重心插值的 Burgers 方程数值解法进行研究。

## 1 重心 Lagrange 插值

### 1.1 重心 Lagrange 插值函数

设插值节点为  $x_j$ ，对应的实数为  $y_j (j=0, 1, \cdots, n)$ ，使用多项式插值，则在次数不超过  $n$  的多项式空间中，存在唯一的重心 Lagrange 插值函数  $p(x)$ ，满足  $p(x_j)=y_j, j=0, 1, \cdots, n$ 。重心 Lagrange 插值函数为

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{(x-x_j)} y_j / \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{(x-x_i)} = \sum_{j=0}^n D_j(x) y_j。 \tag{2}$$

式(2)中： $D_j(x)$ 为重心 Lagrange 插值基函数； $\omega_j$ 为重心 Lagrange 插值函数的重心权， $\omega_j$ 为

$$\omega_j = \left( \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i) \right)^{-1}。 \tag{3}$$

由于重心 Lagrange 插值函数的重心权只与插值节点分布有关，在利用重心插值逼近未知函数时，采用第二类 Chebyshev 节点，即

$$x_j = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right), \quad j=0, 1, \cdots, n。 \tag{4}$$

可以得到重心 Lagrange 插值函数的重心权为

$$\left. \begin{aligned} \omega_j &= (-1) \delta_j, \\ \delta_j &= \begin{cases} 1/2, & j=0 \text{ 或 } n, \\ 1, & \text{其他。} \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

对式(2)进行求导，得到函数  $p(x)$ 在插值节点  $x_i$  处的导数， $p^s(x_i)$ 为

$$p^s(x_i) = \frac{d^s p(x_i)}{dx^s} = \sum_{j=0}^n D_j^{(s)}(x_i) y_j = \sum_{j=0}^n D_{i,j}^{(s)} y_j。 \tag{6}$$

将其写成矩阵形式即为

$$\boldsymbol{p}^{(s)} = \boldsymbol{D}^{(s)} \boldsymbol{p}。 \tag{7}$$

式(7)中： $\boldsymbol{D}^{(s)}$ 为关于节点  $x_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 的  $s$  阶微分矩阵， $\boldsymbol{D}^{(s)} = (D_{i,j}^{(s)})_{n \times n}, s=1, 2$ 。

通过对重心 Lagrange 插值基函数求导，分别得到一、二阶微分矩阵的元素<sup>[11]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} D_{i,j}^{(1)} &= \frac{\omega_j / \omega_i}{x_i - x_j}, \quad i \neq j, \\ D_{i,i}^{(1)} &= - \sum_{j=0, j \neq i}^n D_{i,j}^{(1)}, \\ D_{i,j}^{(2)} &= 2(D_{i,i}^{(1)} D_{i,j}^{(1)} - \frac{D_{i,j}^{(1)}}{x_i - x_j}), \quad i \neq j, \\ D_{i,i}^{(2)} &= - \sum_{j=0, j \neq i}^n D_{i,j}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

### 1.2 逼近性质

设  $p(x, y)$ 是  $u(x, y)$ 的重心 Lagrange 插值函数，满足  $p(x_m, y_n)=u(x_m, y_n)$ ，则定义误差函数为

$$e(x,y)=u(x,y)-p(x,y)。$$
(9)

**引理 1**<sup>[18]</sup> 如果  $u(x,y) \in C^{\overline{m}+1}([a,b] \times [c,d])$ , 其中,  $\overline{m} = \max\{m,n\}$ , 则

$$|e(x,y)| \leq \|u^{(\overline{m}+1)}\|_{\infty} (C_1 \left(\frac{el_x}{2m}\right)^m + C_2 \left(\frac{el_y}{2n}\right)^n)。$$
(10)

式(10)中:  $e$  为自然对数;  $l_x$  代表区间  $[a,b]$  的一半;  $l_y$  代表区间  $[c,d]$  的一半。

同理可以得到

$$\left. \begin{aligned} |e_x(x,y)| &\leq C_1^* \| \partial_x^{(m+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-1)}\right)^{m-1} + C_2 \| \partial_y^{(n+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_y}{2n}\right)^n, \\ |e_{x,x}(x,y)| &\leq C_1^{**} \| \partial_x^{(m+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)}\right)^{m-2} + C_2 \| \partial_y^{(n+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_y}{2n}\right)^n, \\ |e_y(x,y)| &\leq C_1 \| \partial_x^{(m+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2m}\right)^m + C_2^* \| \partial_y^{(n+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_y}{2(n-1)}\right)^{n-1}, \\ |e_{y,y}(x,y)| &\leq C_1 \| \partial_x^{(m+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2m}\right)^m + C_2^{**} \| \partial_y^{(n+1)} u \|_{\infty} \left(\frac{el_y}{2(n-2)}\right)^{n-2}. \end{aligned} \right\}$$
(11)

式(11)中:  $C_1, C_1^*, C_1^{**}, C_2, C_2^*, C_2^{**}$  为常数。

2 二维 Burgers 方程的离散格式

考虑二维 Burgers 方程, 对时间区域进行  $K$  等分, 记步长为  $\tau = \frac{T}{K}$ ,  $T$  为时间计算的终点。空间区域采用第二类 Chebyshev 节点分别离散为  $m+1$  个计算节点  $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$  和  $n+1$  个计算节点  $c=y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ , 得到计算节点  $(x_i, y_j, t_k)$ ,  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq K$ 。

2.1 半离散格式及相容性分析

记函数  $u(x,y,t)$  在节点  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  上的值为  $u(x_i, y, t) = u_i(y, t)$ , 则函数  $u(x,y,t)$  在节点  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  上的重心插值函数为

$$u(x,y,t) = \sum_{s=0}^m L_s(x) u_s(y,t)。$$
(12)

式(12)中:  $L_s(x)$  表示  $x$  方向的重心插值基函数。

将式(12)代入方程(1)中, 并令方程在点  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  上精确成立, 得到常微分方程组, 即

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^m L_s(x_i) \frac{\partial u_s(y,t)}{\partial t} + \sum_{s=0}^m L_s(x_i) u_s(y,t) \Big( \sum_{s=0}^m L'_s(x_i) u_s(y,t) + \sum_{s=0}^m L_s(x_i) \frac{\partial^2 u_s(y,t)}{\partial y^2} \Big) = \\ v \Big( \sum_{s=0}^m L''_s(x_i) u_s(y,t) + \sum_{s=0}^m L_s(x_i) \frac{\partial^2 u_s(y,t)}{\partial y^2} \Big)。 \end{aligned}$$
(13)

式(13)中:  $L'_s(x_i) = C_{s,i}^{(1)}$  为关于节点  $x_0, x_1, \cdots, x_m$  的一阶微分矩阵  $\mathbf{C}^{(1)}$  中的元素, 类似地,  $L''_s(x_i) = C_{s,i}^{(2)}$  为二阶微分矩阵  $\mathbf{C}^{(2)}$  中的元素。

记  $u_{i,j}(t) = u_i(y_j, t)$ , 函数  $u_i(y,t)$  在节点  $y_0, y_1, \cdots, y_n$  的重心插值函数为

$$u_i(y,t) = \sum_{r=0}^n T_r(y) u_{i,r}(t)。$$
(14)

式(14)中:  $T_r(y)$  表示  $y$  方向的重心插值基函数。

将式(14)代入式(13), 微分矩阵形式为

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} + \text{diag}(\mathbf{U}(t)) (\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{I}_{n+1} + \mathbf{I}_{m+1} \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \mathbf{U}(t) = v (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_{n+1} + \mathbf{I}_{m+1} \otimes \mathbf{D}^{(2)}) \mathbf{U}(t)。$$
(15)

式(15)中:

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{U}_0(t) \cdots \mathbf{U}_m(t)]^T;$$

$$\mathbf{U}_i(t) = [u_{i,0}(t) \cdots u_{i,n}(t)]^T (i=0, \cdots, m);$$

$\mathbf{D}^{(k)}$  为关于节点  $y_0, y_1, \cdots, y_n$  的  $k$  阶微分矩阵。

为了方便进行相容性分析, 算子定义为

$$\Gamma u(x,y,t):=u_t+u(u_x+u_y)-v(u_{x,x}+u_{y,y}). \tag{16}$$

令  $u(x_m,y_n,t)$  为  $u(x,y,t)$  的数值解, 则可以得到

$$\Gamma u(x_m,y_n,t)=0. \tag{17}$$

**定理 1** 若  $u(x,y,t)\in C^{(\overline{m}+1)}([a,b]\times[c,d])\times C^{(0)}(0,T]$ , 其中,  $\overline{m}=\max\{m,n\}$ , 假设  $u(x_m,y_n,t)$  有界, 则误差估计为

$$\begin{aligned} |u(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)| &\leqslant C_1^{**}\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}+ \\ C_2^{**}\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_y}{2(n-2)}\right)^{n-2}. \end{aligned} \tag{18}$$

证明:

$$\begin{aligned} \Gamma u(x,y,t)-\Gamma u(x_m,y_n,t) &=u_t(x,y,t)-u_t(x_m,y_n,t)+ \\ &u(x,y,t)u_x(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)u_x(x_m,y_n,t)+ \\ &u(x,y,t)u_y(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)u_y(x_m,y_n,t)+ \\ &v(u_{xx}(x_m,y_n,t)-(x,y,t))+v(u_{yy}(x_m,y_n,t)-u_{yy}(x,y,t))= \\ &R_1+R_2+R_3+R_4+R_5. \end{aligned} \tag{19}$$

式(19)中:

$$\begin{aligned} R_1 &=u_t(x,y,t)-u_t(x_m,y_n,t)=u_t(x,y,t)-u_t(x_m,y,t)+ \\ &u_t(x_m,y,t)-u_t(x_m,y_n,t)=e_t(x_m,y,t)+e_t(x_m,y_n,t). \end{aligned} \tag{20}$$

由引理 1, 有

$$\begin{aligned} |R_1| &=|e_t(x_m,y,t)+e_t(x_m,y_n,t)|\leqslant \\ &C_1\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2m}\right)^m+C_2\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_y}{2n}\right)^n. \end{aligned} \tag{21}$$

$R_2$  的估计为

$$\begin{aligned} |R_2| &=|u(x,y,t)u_x(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)u_x(x_m,y_n,t)|\leqslant \\ &|u_x(x,y,t)||u(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)|+ \\ &|u(x_m,y_n,t)||u_x(x,y,t)-u_x(x_m,y_n,t)|\leqslant \\ &C_1^*\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2(m-1)}\right)^{m-1}+C_2\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_y}{2n}\right)^n. \end{aligned} \tag{22}$$

同理有

$$\begin{aligned} |R_3| &=|u(x,y,t)u_y(x,y,t)-u(x_m,y_n,t)u_y(x_m,y_n,t)|\leqslant \\ &C_1\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2m}\right)^m+C_2^*\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_y}{2(n-1)}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

类似地, 对于  $R_4, R_5$  的估计分别为

$$\begin{aligned} |R_4| &=|ve_{x,x}(x_m,y,t)+ve_{x,x}(x_m,y_n,t)|\leqslant C\leqslant \\ &C_1^{**}\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}+C_2\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty-\left(\frac{el_y}{2n}\right)^n. \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} |R_5| &=|ve_{y,y}(x_m,y,t)+ve_{y,y}(x_m,y_n,t)|\leqslant \\ &C_1\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_x}{2m}\right)^m+C_2^{**}\|\partial_y^{(n+1)}u\|_\infty\left(\frac{el_y}{2(n-2)}\right)^{n-2}. \end{aligned} \tag{25}$$

将式(21)~(25)代入式(19), 则定理得证。

2.2 全离散格式及相容性分析

**定理 2** 设  $u(x,y,t)\in C^{(\overline{m}+1)}([a,b]\times[c,d])\times C^{(2)}(0,T]$ , 假设  $u(x_m,y_n,t)$  有界, 使用重心插值配点法求解的数值解为  $u^h(x_i,y_j,t_k)$ , 则如下式子成立, 即

$$|u(x,y,t)-u^h(x_i,y_j,t_k)|\leqslant C\left\{\tau^2+\|u^{(\overline{m}+1)}\|_\infty\left[\left(\frac{el_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}+\left(\frac{el_y}{2(n-2)}\right)^{n-2}\right]\right\}. \tag{26}$$

证明: 对方程时间方向采用 Crank-Nicolson 差分法离散得到的数值解为  $u^{k+1}=u(x,y,t_{k+1})$ , 则

$$\delta u_t^{(k+1)/2} + u^{(k+1)/2}(u_x^{(k+1)/2} + u_y^{(k+1)/2}) - v(u_{x,x}^{(k+1)/2} + u_{y,y}^{(k+1)/2}) = R^k.$$

(27)

式(27)中: $\delta u_t^{(k+1)/2} = \frac{1}{\tau}(u(x,y,t_{k+1}) - u(x,y,t_k))$ ,  $R^k = \delta u_t^{(k+1)/2} - u_t^{(k+1)/2}$  是时间方向的截断误差。

由 Taylor 展开,可得

$$|R^k| \leq C\tau^2.$$

(28)

空间方向利用重心 Lagrange 插值配点法离散,有

$$\delta u_t^h(x_i, y_j, t_k) + u(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})(u_x(x_i, y_j, t_{(k+1)/2}) + u_y(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})) - v(u_{x,x}(x_i, y_j, t_{(k+1)/2}) + u_{y,y}(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})) = R^k + \epsilon^{i,j}.$$

(29)

式(29)中: $\epsilon^{i,j}$  为空间截断误差。

由式(27),(29),可以得到

$$\delta u_t^{(k+1)/2} - \delta u_t^h(x_i, y_j, t_k) + u^{(k+1)/2}(u_x^{(k+1)/2} + u_y^{(k+1)/2}) - u(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})(u_x(x_i, y_j, t_{(k+1)/2}) + u_y(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})) - v(u_{x,x}^{(k+1)/2} + u_{y,y}^{(k+1)/2}) + v(u_{x,x}(x_i, y_j, t_{(k+1)/2}) + u_{y,y}(x_i, y_j, t_{(k+1)/2})) = -\epsilon^{i,j}.$$

(30)

类似定理 2 的推导,有

$$|\epsilon^{i,j}| \leq C \|u^{(\bar{m}+1)}\|_{\infty} \left[ \left( \frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} + \left( \frac{el_y}{2(n-2)} \right)^{n-2} \right].$$

(31)

结合式(28),(31),则定理得证。

记  $u^k(x,y) = u(x,y,t_k)$ ,  $k=0,1,\cdots,K$ ,采用 Crank-Nicolson 差分法对时间离散,对方程中的非线性项线性化处理,得到时间半离散格式,即

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \frac{u^k(u_x^{k+1} + u_y^{k+1}) + u^{k+1}(u_x^k + u_y^k)}{2} = \frac{v(u_{x,x}^{k+1} + u_{y,y}^{k+1} + u_{x,x}^k + u_{y,y}^k)}{2}.$$

(32)

将微分矩阵代入时间半离散格式,有 Burgers 方程全离散格式,即

$$\left( \mathbf{I} + \frac{\tau}{2}(\text{diag}(\mathbf{U}^k)\mathbf{A}^* + \text{diag}(\mathbf{A}^*\mathbf{U}^k)) - \frac{\tau v}{2}\mathbf{B}^* \right) \mathbf{U}^{k+1} = (\mathbf{I} + \frac{\tau v}{2}\mathbf{B}^*)\mathbf{U}^k.$$

(33)

式(33)中: $\mathbf{A}^* = \mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{I}_{n+1} + \mathbf{I}_{m+1} \otimes \mathbf{D}^{(1)}$ ;  $\mathbf{B}^* = \mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_{n+1} + \mathbf{I}_{m+1} \otimes \mathbf{D}^{(2)}$ 。

### 3 数值算例

为验证重心插值配点法求解 Burgers 方程的有效性和合理性,通过算例对重心插值配点法稳定性进行验证,与 Crank-Nicolson 差分法对比说明重心插值配点法的高精度。记  $U_e, U^h$  分别为精确解及数值解,定义在无穷范数意义下的绝对误差和相对误差分别为

$$E_{\infty} = \|U_e - U^h\|_{\infty}, \quad E_r = \frac{\|U_e - U^h\|_{\infty}}{\|U_e\|_{\infty}}.$$

上式中: $\|\cdot\|_{\infty}$  表示无穷范数。

**算例 1** 考虑  $d=1$  时的一维 Burgers 方程(1),取  $T=1, a=0, b=1$ ,初始条件为

$$u(x,0) = \frac{2v\pi \sin \pi x}{2 + \cos \pi x}.$$

边界条件为  $u(0,t) = u(1,t) = 0$ ,方程的精确解为

$$u(x,t) = \frac{2v\pi e^{-\pi^2 \tau} \sin \pi x}{2 + e^{-\pi^2 \tau} \cos \pi x}.$$

当  $v=0.01$ ,固定空间节点  $n=16$  时,改变时间步长,可得到重心插值配点法的时间收敛阶,如表 1 所示。由表 1 可知:随着  $K$  的增加,利用重心插值配点法求出的方程数值解与精确解的绝对误差的数量级从  $10^{-3}$  减到  $10^{-5}$ ,因此,时间收敛阶为二阶精度。

当固定时间步长  $\tau=0.001$  时,改变空间节点数量,可得到重心插值配点法与有限差分法的误差,如

表 1 重心插值配点法时间收敛阶

Tab.1 Time convergence orders of barycentric interpolation collocation method

$K$	$E_{\infty}$	Rate
4	$3.44 \times 10^{-3}$	—
8	$7.09 \times 10^{-4}$	2.28
16	$1.68 \times 10^{-4}$	2.08
32	$4.15 \times 10^{-5}$	2.01
64	$1.04 \times 10^{-5}$	2.00

表 2 所示。由表 2 可知: 重心插值配点法在空间选取 10 个节点时, 最大绝对误差即可达到  $10^{-6}$  量级, 而有限差分法空间选取 128 个节点时, 最大绝对误差才能达到  $10^{-6}$  量级, 这表明重心插值配点法在空间上用较少的点可达到更高的精度。

表 2 重心插值配点法与有限差分法的误差

Tab. 2 Errors of barycentric interpolation collocation method and finite difference method

重心插值配点法			有限差分法		
$n$	$E_{\infty}$	$E_{\tau}$	$n$	$E_{\infty}$	$E_{\tau}$
4	$1.69 \times 10^{-4}$	$5.38 \times 10^{-3}$	8	$3.43 \times 10^{-4}$	$1.08 \times 10^{-2}$
6	$9.51 \times 10^{-5}$	$2.77 \times 10^{-3}$	16	$9.05 \times 10^{-5}$	$2.85 \times 10^{-3}$
8	$1.33 \times 10^{-5}$	$3.69 \times 10^{-4}$	32	$2.30 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^{-4}$
10	$1.32 \times 10^{-6}$	$3.65 \times 10^{-5}$	64	$5.76 \times 10^{-6}$	$1.81 \times 10^{-4}$
12	$2.06 \times 10^{-7}$	$5.74 \times 10^{-6}$	128	$1.44 \times 10^{-6}$	$4.52 \times 10^{-5}$

重心插值配点法数值解与精确解( $\tau=0.05, n=20$ ), 如图 1 所示。由图 1 可知: 两种解吻合。

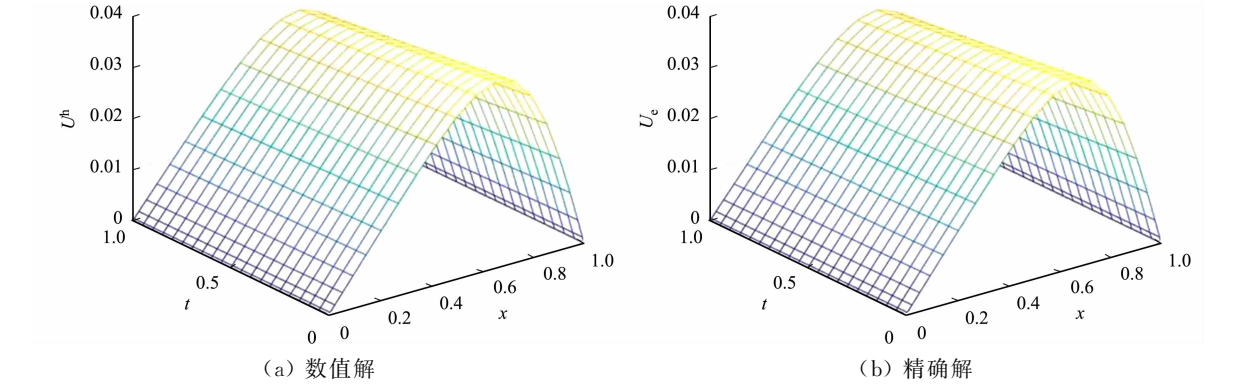


图 1 重心插值配点法数值解与精确解( $\tau=0.05, n=20$ )

Fig. 1 Numerical solution and exact solution of barycentric interpolation collocation method ( $\tau=0.05, n=20$ )

绝对误差( $\tau=0.05, n=20$ ), 如图 2 所示。空间收敛阶( $\tau=0.001, v=0.01$ ), 如图 3 所示。由图 3 可知: 重心插值配点法具有指数收敛速度。不同参数下重心插值配点法的数值解, 如图 4 所示。

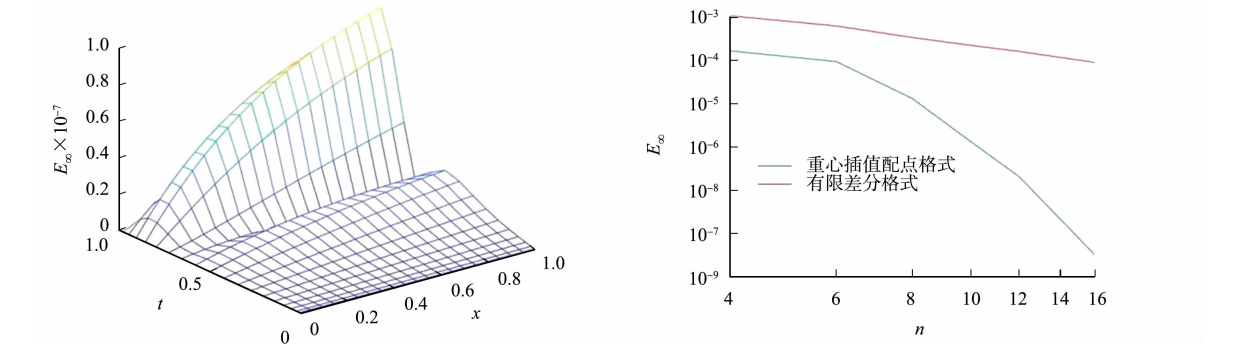


图 2 绝对误差( $\tau=0.05, n=20$ )

图 3 空间收敛阶( $\tau=0.001, v=0.01$ )

Fig. 2 Absolutely error ( $\tau=0.05, n=20$ )

Fig. 3 Spatial convergence order ( $\tau=0.001, v=0.01$ )

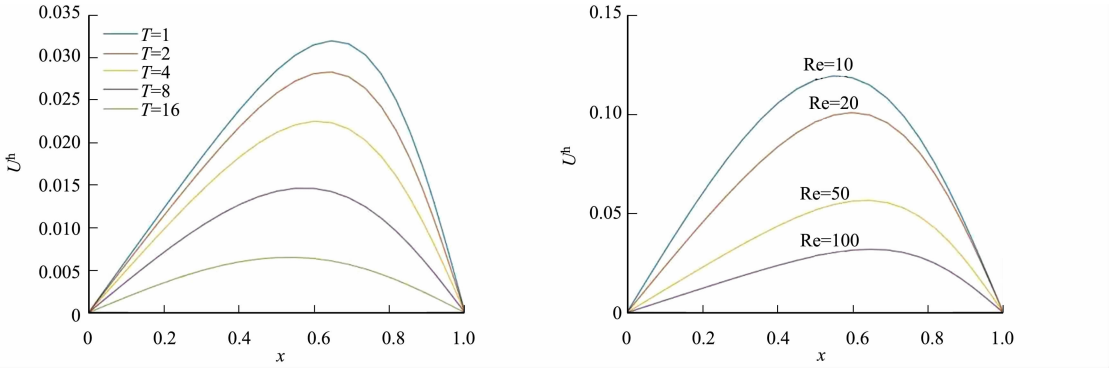
图 4(a)为最终时间  $T=1, 2, 4, 8, 16$  的数值解图像, 图 4(b)为不同的雷诺数  $Re=10, 20, 50, 100$  的数值解图像。由图 4 可知: 随着  $T, Re$  的增大, 数值解保持稳定, 说明了数值法的稳定性。

重心插值配点法的数值解与精确解的等势图( $v=0.1$ ), 如图 5 所示。

**算例 2** 考虑如下二维 Burgers 方程, 即

$$\begin{cases} u_t + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

初值条件和边值条件由精确解确定, 方程的精确解为

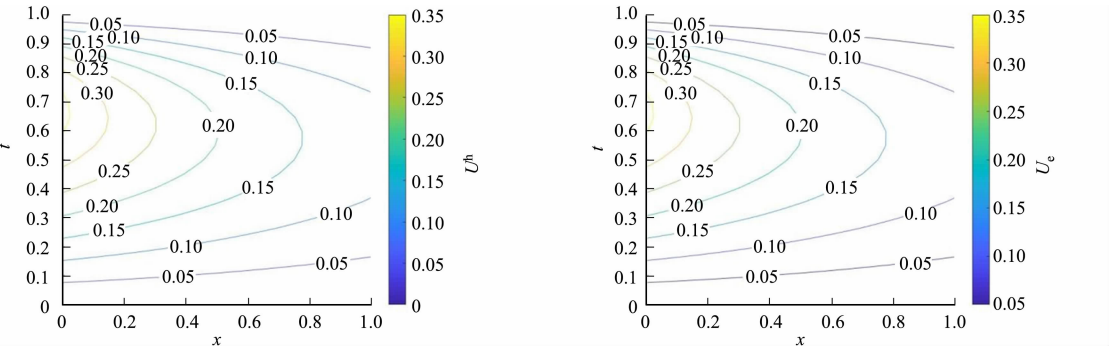


(a) 不同时间的数值解( $\tau=0.01,n=20$ )

(b) 不同雷诺数的数值解( $\tau=0.05,n=32$ )

图 4 不同参数下重心插值配点法的数值解

Fig. 4 Numerical solution of barycentric interpolation collocation method of different parameters



(a) 数值解

(b) 精确解

图 5 重心插值配点法的数值解与精确解的等势图( $v=0.1$ )

Fig. 5 Isopotential diagram of numerical solution and exact solution of barycentric interpolation collocation method ( $v=0.1$ )

$$u(x,y,t)=\frac{2v\pi\sin[\pi(x+y)]e^{-2v\pi^2t}}{2+\cos[\pi(x+y)]e^{-2v\pi^2t}}.$$

表 3 重心插值配点法时间收敛阶

Tab. 3 Time convergence order of barycentric interpolation collocation scheme

$K$	$E_{\infty}$	Rate
8	$3.22\times10^{-3}$	—
16	$6.71\times10^{-4}$	2.264
32	$1.62\times10^{-4}$	2.049
48	$7.19\times10^{-5}$	2.004
64	$4.03\times10^{-5}$	2.011

重心插值配点法时间收敛阶,如表 3 所示。

当  $v=0.1$ ,空间节点数  $m=n$ ,固定空间节点数  $n=16$  时,改变时间节点数,重心插值配点法与有限差分法的误差( $\tau=0.001$ ),如表 4 所示。

由表 4 可知:当  $n$  取 8 时,重心插值配点法的误差具有  $10^{-4}$  量级,而有限差分法的误差只有  $10^{-3}$  量级;重心插值配点法  $n=12$  时误差有  $10^{-5}$  量级,而有限差分法在  $n=64$  时误差只有  $10^{-5}$  量级。

表 4 重心插值配点法与有限差分法的误差( $\tau=0.001$ )

Tab. 4 Errors of barycentric interpolation collocation method and finite difference scheme ( $\tau=0.001$ )

重心插值配点法			有限差分法		
$n$	$E_{\infty}$	$E_{\tau}$	$n$	$E_{\infty}$	$E_{\tau}$
4	$4.45\times10^{-3}$	$1.23\times10^{-2}$	4	$1.96\times10^{-2}$	$5.71\times10^{-2}$
6	$1.10\times10^{-3}$	$3.20\times10^{-3}$	8	$4.94\times10^{-3}$	$1.38\times10^{-2}$
8	$2.66\times10^{-4}$	$7.34\times10^{-4}$	16	$1.27\times10^{-3}$	$3.52\times10^{-3}$
10	$5.05\times10^{-5}$	$1.39\times10^{-4}$	32	$3.17\times10^{-4}$	$8.75\times10^{-4}$
12	$1.00\times10^{-5}$	$2.77\times10^{-5}$	64	$7.93\times10^{-5}$	$2.19\times10^{-4}$

重心插值配点法的数值解与精确解( $\tau=0.001,n=32$ ),如图 6 所示。由图 6 可知:数值解与精确解是相符的。

绝对误差( $\tau=0.001, n=32$ ),如图 7 所示。由图 7 可知:数值解与精确解是相符的。

空间收敛阶( $\tau=0.001$ ),如图 8 所示。由图 8 可知:重心插值配点法在求解二维问题时,空间具有指数收敛。

算例 2 结果表明:重心插值配点法在二维问题中,具有高精度性与有效性,且可通过更少的节点得到相对高的精度,与理论分析相符。

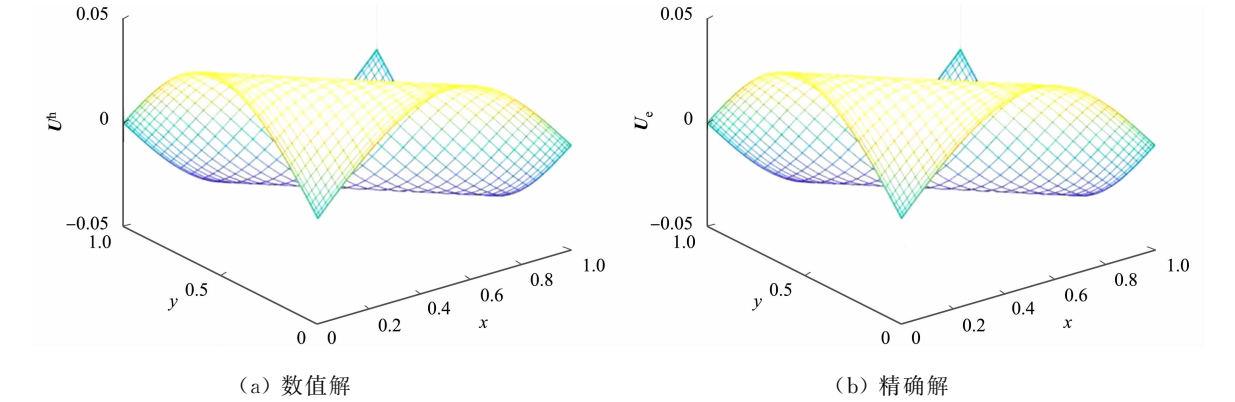


图 6 重心插值配点法的数值解与精确解( $\tau=0.001, n=32$ )

Fig. 6 Numerical solution and exact solution of barycentric interpolation collocation method ( $\tau=0.001, n=32$ )

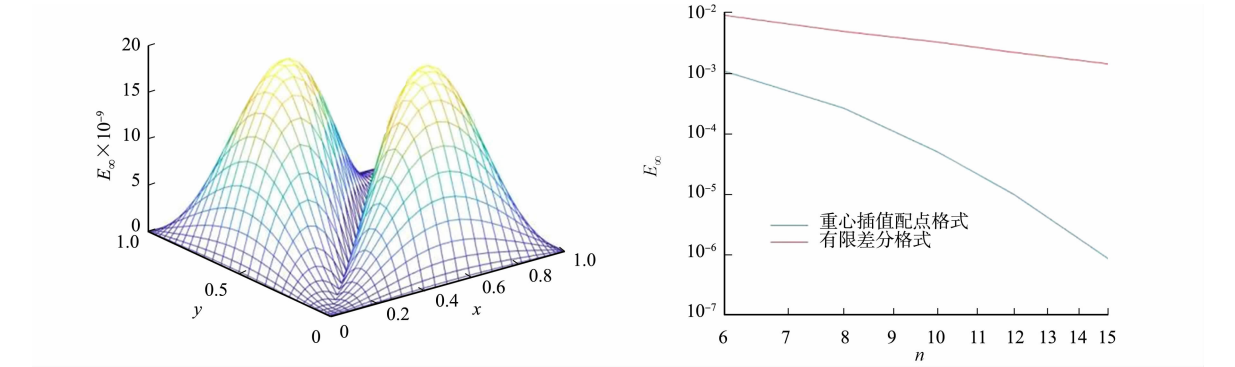


图 7 绝对误差( $\tau=0.001, n=32$ )

Fig. 7 Absolutely error ( $\tau=0.001, n=32$ )

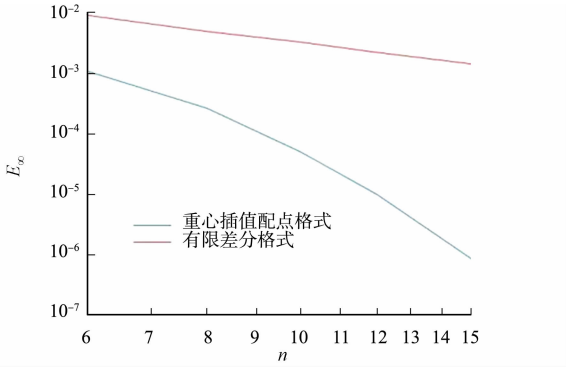


图 8 空间收敛阶( $\tau=0.001$ )

Fig. 8 Spatial convergence order ( $\tau=0.001$ )

## 5 结束语

将 Crank-Nicolson 差分法与重心插值切比雪夫配点法相结合,提出了一种求解 Burgers 的有效数值法,对方程的非线性项进行线性化处理,避免迭代带来大计算量,并给出了全离散法的相容性分析。通过数值算例验证数值法的有效性及高精度,通过与 Crank-Nicolson 差分法进行比较,重心插值法可以用较少的节点得到较高的精度。

### 参考文献:

[1] BURGERS J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence[J]. Advances in Applied Mechanics, 1948,1:171-199. DOI:10.1016/S0065-2156(08)70100-5.

[2] 陈莲. 一维 Burgers 方程的几种有限差分解法[D]. 南充:西华师范大学,2020.

[3] WANG Xuping,ZHANG Qifeng,SUN Zhizhong. The pointwise error estimates of two energy-preserving fourth-order compact schemes for viscous Burgers equation[J]. Advances in Com-putational Mathematics,2021,47(2):23. DOI:10.1007/S10444-021-09848-9.

[4] ZHANG Qifeng,QIN Yifan,SUN Zhizhong. Linearly compact scheme for 2D Sobolev equation with Burgers' type nonlinearity[J]. Numerical Algorithms,2022,91(3):1081-1114. DOI:10.1007/S11075-022-01293-Z.

[5] XU Chao,PEU Lifang. Unconditional superconvergence analysis of two modified finite element fully discrete schemes for nonlinear Burgers' equation[J]. Applied Numerical Mathematics,2023,185:1-17. DOI:10.1016/j.ap-



num. 2022. 11. 008.

[6] WANG Chuan,WANG Tianjun. A multi-domain Galerkin method with numerical integration for the Burgers equation[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2023, 100 (5): 927-947. DOI: 10. 1080/00207160. 2023. 2171265.

[7] ZHAO Zhihui,LI Hong. Numerical study of two-dimensional Burgers equation by using a continuous Galerkin method[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2023, 149 (1): 38-48. DOI: 10. 1016/J. CAMWA. 2023. 08. 030.

[8] WANG Haifeng,XU Da,ZHOU Jun,*et al.* Weak Galerkin finite element method for a class of time fractional generalized Burgers equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37 (1): 732-749. DOI: 10. 1002/num. 22549.

[9] 于孟文,张新东. 重心插值配点法求解 Volterra 积分方程[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2023, 42 (1): 75-80. DOI: 10. 14100/j. cnki. 1008-9659. 2023. 01. 010.

[10] DENG Yangfang,WENG Zhifeng. Barycentric interpolation collocation method based on Crank-Nicolson scheme for the Allen-Cahn equation[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6 (4): 3857-3873. DOI: 10. 3934/MATH. 2021229.

[11] 黄蓉,邓杨芳,翁智峰. SAV/重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 应用数学和力学, 2023, 44 (5): 573-582. DOI: 10. 21656/1000-0887. 430149.

[12] 邓杨芳,姚泽丰,汪精英,等. 二维 Allen-Cahn 方程的有限差分法/配点法求解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, 41 (5): 690-694. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202001001.

[13] 翁智峰,姚泽丰,赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40 (1): 133-140. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201806043.

[14] 赖舒琴,华之维,翁智峰. 重心插值配点法求解 Black-Scholes 方程[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33 (5): 1-8. DOI: 10. 19728/j. issn1672-6634. 2020. 05. 001.

[15] 黄蓉,翁智峰. 时间分数阶 Allen-Cahn 方程的重心插值配点法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2022, 43 (4): 553-560. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202104060.

[16] LI Jin,SU Xiaoning,ZHAO Kaiyan. Barycentric interpolation collocation algorithm to solve fractional differential equations[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2023, 205: 340-367. DOI: 10. 1016/J. MATCOM. 2022. 10. 005.

[17] ÖMER O. Application of a collocation method based on linear barycentric interpolation for solving 2D and 3D Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) equations numerically[J]. Engin-Engineering Computations, 2021, 38 (5): 2394-2414. DOI: 10. 1108/EC-06-2020-0312.

[18] YI Shichao,YAO Linquan. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher order time fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2019, 35 (5): 1694-1716. DOI: 10. 1002/num. 22371.

(责任编辑：陈志贤      英文审校：黄心中)