第 45 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 45　No. 6
2024 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov.　2024

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202311003

Halin 图的无包含边染色

彭燕，谈漪，陈莉莉

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 探究给定最大度的 Halin 图的无包含边色数的上界，通过分析极小反例图的结构，在给定部分子图的染色下，对剩余图进行特殊染色。结果表明：最大度为 Δ 的 Halin 图的无包含边色数不超过 $\Delta+2$。

关键词： Halin 图；无包含边染色；无包含边色数；极小反例图

中图分类号： O 157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2024)06-0812-04

Inclusion-Free Edge Coloring of Halin Graph

PENG Yan, TAN Yi, CHEN Lili

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The upper bound of the inclusion-free chromatic index of Halin graph with the given maximum degree is explored. By analyzing the structure of the minimal counterexample graph, the special coloring to the remaining graph is done under the coloring of the given partial subgraphs. The results show that the inclusion-free chromatic index of Halin graph with the maximum degree Δ is are not more than $\Delta+2$.

Keywords: Halin graph; inclusion-free edge coloring; inclusion-free chromatic index; minimal counterexample graph

1　预备知识

设 G 是简单无向图，$V(G)$，$E(G)$，$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集、最大度和最小度，映射 $\varphi:E(G)\to C=\{1,2,3,\cdots,k\}$ 为图 G 的一个正常边染色，即对任意相邻边 e_1 和 e_2，有 $\varphi(e_1)\neq\varphi(e_2)$。对任意顶点 $v\in V(G)$，v 关联的边的颜色集记为 $S_\varphi(v)$，即 $S_\varphi(v)=\{\varphi(e)\mid$边 e 与顶点 v 关联$\}$。

若图 G 存在一个正常的边染色 φ，且满足对任意边 $uv\in E(G)$，有 $S_\varphi(u)\not\subseteq S_\varphi(v)$ 及 $S_\varphi(v)\not\subseteq S_\varphi(u)$，则称 φ 为图 G 的无包含边染色。使图 G 具有无包含边染色所需的最小颜色数称为图 G 的无包含边色数，记为 $\chi'_{\subset}(G)$。

无包含边染色的概念是由 Przybyło 等[1]于 2020 年提出的。实际上，Zhang[2]在 2008 年就提出 Smarandachely 邻点边染色。Gu 等[3]将边染色定义为严格邻点可区别边染色，这类边染色是对邻点可区别边染色的推广。对于无孤立边的图 G，它的邻点可区别边染色是图 G 的一个正常边染色 φ，且满足对任意边 $uv\in E(G)$，有 $S_\varphi(u)\neq S_\varphi(v)$。使图 G 具有邻点可区别边染色所需的最小颜色数称为图 G 的邻点可区别边色数，记为 $\chi'_a(G)$。

Zhang[2]确定了路、圈、树、完全图及完全二部图的邻点可区别边色数，提出猜想 1。

猜想 1[2]　设 G 是不为 C_5 的简单连通图，且 $|V(G)|\geqslant3$，则 $\chi'_a(G)\leqslant\Delta(G)+2$。

定理 1[4]　设 G 是没有孤立边的图，且 $\Delta(G)=3$，则 $\chi'_a(G)\leqslant5$。

收稿日期： 2023-11-03

通信作者： 陈莉莉(1986-)，女，副教授，博士，主要从事图染色的研究。E-mail:lily60612@126.com。

基金项目： 中央高校基本科研业务经费专项资金资助项目(ZQN-903)

Balister 等[4]证明对于最大度为 3 的图、所有的二部图，猜想 1 是成立的(定理 1)。Hatami[5]使用概率方法证明任意一个最大度 $\Delta\geqslant 10^{20}$ 的图 G，有 $\chi'_a(G)\leqslant\Delta+300$。AKbari 等[6]证明任意没有孤立边的图 G，$\chi'_a(G)\leqslant 3\Delta$，Zhang 等[7]将这个上界改进到 $2.5\Delta+5$。Joret 等[8]证明当图 G 的最大度 Δ 充分大时，$\chi'_a(G)\leqslant\Delta+19$。对于特殊图方面，文献[9-12]得到更多的结果。

若图 G 的最小度 $\delta(G)\geqslant 2$，则 $\chi'_{\subset}(G)\geqslant\chi'_a(G)$，等号成立当且仅当 G 是正则图。Przybyło 等[1]证明若图 G 是完全二部图，那么 $\chi'_{\subset}(G)=\left\lceil\left(1+\frac{1}{\delta-1}\right)\Delta\right\rceil$。对最大度 $\Delta\geqslant 2$ 的完全二部图 $K_{2,\Delta}$，将其中一条边剖分一次，得到的新图记为 $\widehat{K}_{2,\Delta}$(图 1)。由图 1 可知：$\chi'_{\subset}(\widehat{K}_{2,\Delta})=2\Delta+1$。

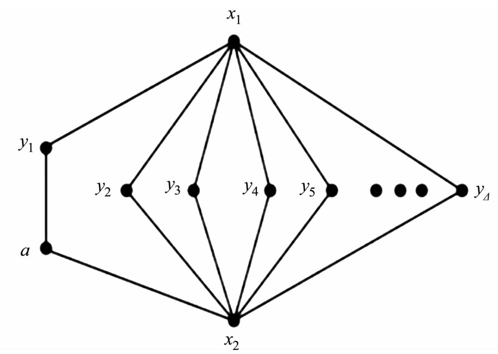

图 1　图 $\widehat{K}_{2,\Delta}$

Fig. 1　$\widehat{K}_{2,\Delta}$ diagram

Przybyło 等[1]提出一般图的无包含边色数的猜想，即猜想 2。

猜想 2[1]　设图 G 是 $\delta(G)\geqslant 2$ 且最大度为 Δ 的连通图。如果 G 不同构于 $\widehat{K}_{2,\Delta}$，那么 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant\left\lceil\left(1+\frac{1}{\delta-1}\right)\Delta\right\rceil$。

Chen 等[13]和 Gu 等[3]分别独立地证明了猜想 2 对于次立方图是成立的，Chen 等[14]考虑二部图的无包含边染色，得到猜想 2 对于$(2,\Delta)$-二部图是成立的。更多结果参考文献[14-16]。

Halin 图是一类平面图，由树 T 和圈 C 构成，树 T 没有 2 度顶点，C 是连接树 T 上所有叶子点构成的圈，且圈 C 是该平面图外部面的边界。对于 Halin 图 $G=T\cup C$，如果任意的顶点 $v\in V(G)$ 不是树 T 的叶子点，那么称顶点 v 为内点，否则，称顶点 v 为叶子点。定理 2 为 Halin 图的无包含边染色的结果。

定理 2　设图 G 是最大度为 Δ 的 Halin 图，则 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant\Delta+2$。

由于 $\Delta+2\leqslant\Delta+\left\lceil\frac{\Delta}{\delta-1}\right\rceil$，所以，若定理 2 成立，则猜想 2 对于 Halin 图是成立的。

2　定理 2 的证明

首先，考虑次立方 Halin 图。由 Halin 图的定义，次立方 Halin 图是 3-正则图。由于对任意的正则图 G，有 $\chi'_a(G)=\chi'_{\subset}(G)$。又由定理 1，对任意无孤立边的次立方图 G，有 $\chi'_a(G)\leqslant 5$，从而得到引理 1。

引理 1　设图 $G=T\cup C$ 是次立方 Halin 图，则 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant 5$。

对于次立方 Halin 图 G，其最大度 Δ 为 3，从而 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant 5=\Delta+2$，定理 2 成立。因此，始终假设 Halin 图 G 的最大度 Δ 至少为 4。

引理 2　对任意的 $k\geqslant 4$，设 Halin 图 $G=T\cup C$ 的最大度为 k，且只含一个内点，则 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant k+2$。

证明：假设顶点 v 是 Halin 图 G 的唯一内点，$v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 v 的所有邻点，不失一般性，设圈 $C=v_1v_2\cdots v_k$。对 $i=1,2,\cdots,k$，令 $\varphi(vv_i)=i$。如果 k 是偶数，则当 $i=1,3,\cdots,k-1$ 时，令 $\varphi(v_iv_{i+1})=k+1$，当$i=2,4,\cdots,k-2$ 时，令 $\varphi(v_iv_{i+1})=k+2$，最后，令 $\varphi(v_kv_1)=k+2$；如果 k 是奇数，则当 $i=1,3,\cdots,k-2$时，令 $\varphi(v_iv_{i+1})=k+1$，当 $i=2,4,\cdots,k-1$ 时，令 $\varphi(v_iv_{i+1})=k+2$，最后，令 $\varphi(v_kv_1)=2$。易验证，φ 是图 G 的一个无包含边染色，因此 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant k+2$。

均假设图 G 至少含有 2 个内点，有引理 3。

引理 3　设 Halin 图 $G=T\cup C$ 至少含 2 个内点，则 G 中存在一个内点 w，w 只有一个邻点是内点，其余邻点都是树 T 的叶子点。

证明：假设 G 中不存在这样的内点，即任意内点的邻点中至少有 2 个是内点。设 G 的所有内点导出的子图为 T'，由假设可得 $\delta(T')\geqslant 2$，因此 T' 不是树。但是，T' 是 T 的子图，即 T' 是树，矛盾。因此，假设不成立。引理 3 得证。

称满足引理 3 的内点 w 为完美点。

引理 4　设 Halin 图 $G=T\cup C$ 至少含 2 个内点，且最大度 $\Delta\geqslant 4$，则 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant\Delta+2$。

证明：假设 $G=T\cup C$ 是满足引理条件的极小反例。设 w 是图 G 的一个完美点，u 是 w 的邻点中的唯一内点，$v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 w 在圈 C 上的邻点，对 $i=1,\cdots,k-1$，$v_iv_{i+1}\in E(G)$。设 v_1 在圈上的另一个邻点为 x，v_k 在圈上的另一个邻点为 y。记 x 的邻点为 v_1,x_1,x_2；y 的邻点为 v_k,y_1,y_2。不失一般性，假设 x_2,y_2 在圈 C 上。完美点 w 及邻点，如图 2 所示。假设 $F=\{1,2,\cdots,\Delta+2\}$ 为含有 $\Delta+2$ 种颜色的色集。

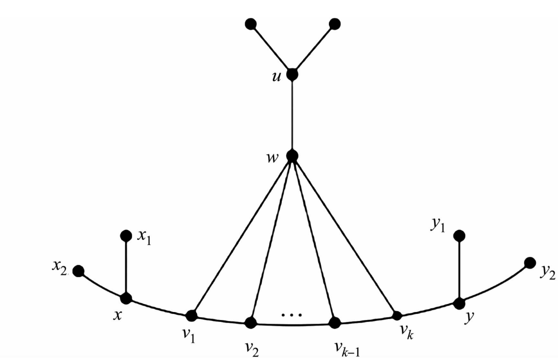

图 2　完美点 w 及邻点

Fig. 2　Perfect point w and adjacent points

情形 1　当 $d(w)=3$ 时，令 $G'=G-\{v_1,v_2\}+\{xw,yw\}$，显然，$G'$ 仍是 Halin 图且 $|V(G')|<|V(G)|$。由 G 的极小性，有 $\chi'_{\subset}(G')\leqslant\Delta(G')+2\leqslant\Delta+2$。设 φ' 是定义在色集 F 上的 G' 的一个无包含边染色，不失一般性，假设 $\varphi'(xw)=a$，$\varphi'(yw)=b$，$\varphi'(wu)=c$。

首先，对任意的边 $e\in E(G)\cap E(G')$，令 $\varphi(e)=\varphi'(e)$。对于边 xv_1,yv_2，令 $\varphi(xv_1)=a$，$\varphi(yv_2)=b$。因为 $S_{\varphi'}(w)\not\subseteq S_{\varphi'}(u)$，所以 $\{a,b\}$ 中至少存在一个颜色不在 $S_{\varphi'}(u)$ 中，不妨设 $a\notin S_{\varphi'}(u)$。将边 wv_2 染颜色 a，从而 $a\notin S_{\varphi}(u)$ 但 $a\in S_{\varphi}(w)$。又因为 $d(w)\leqslant d(u)$，所以 $S_{\varphi}(u)\not\subseteq S_{\varphi}(w)$ 且 $S_{\varphi}(w)\not\subseteq S_{\varphi}(u)$。

其次，因为 $\Delta\geqslant4$，所以 $\Delta+2\geqslant6$，从而 $|F\backslash\{a,b,c,\varphi(xx_1),\varphi(xx_2)\}|\geqslant1$。因此，可以在 $F\backslash\{a,b,c,\varphi(xx_1),\varphi(xx_2)\}$ 中选取一个颜色 d，将边 wv_1 染颜色 d。因为 $d\notin S_{\varphi}(x)$，但 $d\in S_{\varphi}(v_1)$，所以 $S_{\varphi}(v_1)\not\subseteq S_{\varphi}(x)$ 且 $S_{\varphi}(x)\not\subseteq S_{\varphi}(v_1)$。

最后，如果 $a\notin S_{\varphi}(y)$，则可以在 $F\backslash\{a,b,c,d\}$ 中选一个颜色 d_1 对边 v_1v_2 进行染色。若 $a\in S_{\varphi}(y)$，不妨设 $\varphi(yy_1)=a$，则可以在 $F\backslash\{a,b,c,d,\varphi(yy_2)\}$ 选一个颜色 d'_1 对边 v_1v_2 进行染色。易验证，该染色 φ 是 G 的一个无包含边染色，且使用颜色总数为 $\Delta+2$，因此 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant\Delta+2$，与假设矛盾。

情形 2　当 $d(w)\geqslant4$ 时，令 $G'=G-\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}+\{xw,yw\}$，显然，$G'$ 仍是 Halin 图且 $|V(G')|<|V(G)|$。由 G 的极小性，可得 $\chi'_{\subset}(G')\leqslant\Delta(G')+2\leqslant\Delta+2$。设 φ' 是定义在色集 F 上的 G' 的一个无包含边染色，不失一般性，假设 $\varphi'(xw)=a$，$\varphi'(yw)=b$，$\varphi'(wu)=c$。

首先，对任意的边 $e\in E(G)\cap E(G')$，令 $\varphi(e)=\varphi'(e)$。对于边 xv_1,wv_k,yv_k,wv_1，令 $\varphi(xv_1)=\varphi(wv_k)=a$，$\varphi(yv_k)=\varphi(wv_1)=b$。因为 $S_{\varphi'}(w)\not\subseteq S_{\varphi'}(u)$，所以 $\{a,b\}$ 中至少存在一个颜色不在 $S_{\varphi'}(u)$ 中，不妨设 $a\notin S_{\varphi'}(u)$。同理，因为 $S_{\varphi'}(u)\not\subseteq S_{\varphi'}(w)$，所以 $S_{\varphi'}(u)$ 中至少存在一个颜色不在 $\{a,b,c\}$ 中，记这些颜色中的一个为 γ。由于 $|\{wv_2,\cdots,wv_{k-1}\}|=k-2$，且 $d(w)=k+1\leqslant\Delta$，因此 $k-2\leqslant\Delta-1-2=\Delta-3$。又因为 $|F\backslash\{a,b,c,\gamma\}|\geqslant\Delta+2-4=\Delta-2$，所以可以用 $F\backslash\{a,b,c,\gamma\}$ 中的不同颜色分别对边 $wv_2,\cdots,wv_{k-1}$ 进行染色。不失一般性，对 $i=2,3,\cdots,k-1$，令 $\varphi(wv_i)=d_i$。在当前染色下，$S_{\varphi}(u)\not\subseteq S_{\varphi}(w)$ 且 $S_{\varphi}(w)\not\subseteq S_{\varphi}(u)$。

其次，假设 $\varphi(xx_1)=c_1$，$\varphi(xx_2)=c_2$，$\varphi(yy_1)=c_3$，$\varphi(yy_2)=c_4$。易知，$|F\backslash S_{\varphi}(w)|\geqslant2$，不妨假设 $\{\alpha,\beta\}\in F\backslash S_{\varphi}(w)$。

如果 $\{c_1,c_2\}=\{\alpha,\beta\}$，则 $S_{\varphi}(x)=\{a,\alpha,\beta\}$。由于 $b\in S_{\varphi}(w)$，因此 $b\notin\{\alpha,\beta\}$，从而可以使用 $\{\alpha,\beta\}$ 中的任意一个颜色给边 v_1v_2 染色，使得 $S_{\varphi}(x)\not\subseteq S_{\varphi}(v_1)$ 且 $S_{\varphi}(v_1)\not\subseteq S_{\varphi}(x)$。如果 $\{c_1,c_2\}\neq\{\alpha,\beta\}$，不失一般性，不妨设 $\alpha\notin\{c_1,c_2\}$，那么可以使用 α 给边 v_1v_2 染色，使得 $S_{\varphi}(x)\not\subseteq S_{\varphi}(v_1)$ 且 $S_{\varphi}(v_1)\not\subseteq S_{\varphi}(x)$。同理，可以使用 $\{\alpha,\beta\}$ 中至少一个颜色给边 $v_{k-1}v_k$ 染色，使得 $S_{\varphi}(y)\not\subseteq S_{\varphi}(v_k)$ 且 $S_{\varphi}(v_k)\not\subseteq S_{\varphi}(y)$。

如果 α,β 均可以给边 v_1v_2 染色，使得 $S_{\varphi}(x)\not\subseteq S_{\varphi}(v_1)$ 且 $S_{\varphi}(v_1)\not\subseteq S_{\varphi}(x)$，则先给边 $v_{k-1}v_k$ 染色，然后交替使用 α,β 依次对边 $v_{k-2}v_{k-1},v_{k-3}v_{k-2},\cdots,v_1v_2$ 进行染色，使其满足 $\varphi(v_{k-2}v_{k-1})\neq\varphi(v_{k-1}v_k)$。如果 α,β 中只有一个颜色可以给边 v_1v_2 染色，使得 $S_{\varphi}(x)\not\subseteq S_{\varphi}(v_1)$ 且 $S_{\varphi}(v_1)\not\subseteq S_{\varphi}(x)$，则 $|\{\alpha,\beta\}\cap\{c_1,c_2\}|=1$。不失一般性，假设 $\alpha=c_1$，则 $\beta\neq c_2$。如果 $b\neq c_2$，则 α,β 均可以给边 v_1v_2 染色，与假设矛盾，故 $b=c_2$。交换 wv_1 和 wv_2 的颜色，即 $\varphi(wv_1)=d_2$，$\varphi(wv_1)=b$。交换后，α,β 均可以给边 v_1v_2 染色。因此，先给边 $v_{k-1}v_k$ 染色，然后交替使用 α,β 依次对边 $v_{k-2}v_{k-1},v_{k-3}v_{k-2},\cdots,v_1v_2$ 进行染色，使其满足 $\varphi(v_{k-2}v_{k-1})\neq\varphi(v_{k-1}v_k)$。

综上，构造图 G 的一个边染色 φ，得到 $S_\varphi(u)\nsubseteq S_\varphi(w)$ 且 $S_\varphi(w)\nsubseteq S_\varphi(u)$，$S_\varphi(x)\nsubseteq S_\varphi(v_1)$ 且 $S_\varphi(v_1)\nsubseteq S_\varphi(x)$ 及 $S_\varphi(y)\nsubseteq S_\varphi(v_k)$ 且 $S_\varphi(v_k)\nsubseteq S_\varphi(y)$。因为 $b\neq d_2$，$a\neq d_{k-1}$，$d_i\neq d_{i+1}$，$i=2,3,\cdots,k-2$，所以对 $i=1,2,\cdots,k-1$，有 $S_\varphi(v_i)\nsubseteq S_\varphi(v_{i+1})$ 且 $S_\varphi(v_{i+1})\nsubseteq S_\varphi(v_i)$。最后，由于 α,β 至少有一个属于 $S_\varphi(v_i)$，而 α,β 均不属于且 $S_\varphi(w)$，因此对 $i=1,2,\cdots,k$，有 $S_\varphi(v_i)\nsubseteq S_\varphi(w)$ 且 $S_\varphi(w)\nsubseteq S_\varphi(v_i)$。因此，$\varphi$ 是 G 的一个无包含边染色，且使用颜色总数为 $\Delta+2$，即 $\chi'_{\subset}(G)\leqslant\Delta+2$，与假设矛盾。引理 4 得证。

综合引理 1、引理 2 和引理 4，定理 2 得证。

3　结束语

通过研究极小反例 Halin 图 G 的子图的染色结构，得到图 G 的 $\Delta+2$ 种颜色的无包含边染色，与 G 是极小反例矛盾，从而证明 G 的无包含边色数不超过 $\Delta+2$。

参考文献：

[1] PRZYBYLO J，KWASNY J. On the inclusion chromatic index of a graph[J]. Journal of Graph Theory，2021，97(1)：5-20. DOI：10.1002/jgt.22636.

[2] ZHANG Zhongfu. The Smarandachely adjacent vertex edge coloring of graphs[R]. Lanzhou：Lanzhou Jiaotong University，2008：1-13.

[3] GU Jing，WANG Weifan，WANG Yiqiao，*et al*. Strict neighbor-distinguishing index of subcubic graphs[J]. Graphs and Combinatorics，2021，37：355-368. DOI：10.1007/s00373-020-02246-w.

[4] BALISTER P N，GYORI E，LEHEL J，*et al*. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics，2007，21(1)：237-250. DOI：10.1137/S0895480102414107.

[5] HATAMI H. $\Delta+300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B，2005，95：246-256. DOI：10.1016/j.jctb.2005.04.002.

[6] AKBARI S，BIDKHORI H，NOSTRATI N. R-strong edge colorings of graphs[J]. Discrete Mathematics，2006，306：3005-3010. DOI：10.1016/j.disc.2004.12.027.

[7] ZHANG Lianzhu，WANG Weifan，LIH Kowei. An improved upper bound on the adjacent vertex distinguishing chromatic index of a graph[J]. Discrete Applied Mathematics，2014，162：348-354. DOI：10.1016/j.dam.2013.08.038.

[8] JORET G，LOCHET W. Progress on the adjacent vertex distinguishing edge coloring conjecture[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics，2020，34(4)：2221-2238. DOI：10.1137/18M1200427.

[9] BU Yuehua，LIH KW，WANG Weifan. Adjacent vertex-distinguishing edge-colorings of planar graphs withgirth at least six[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory，2011，31(3)：429-439. DOI：10.7151/dmgt.1556.

[10] YAN Chengchao，HUANG Danjun，CHEN Dong，*et al*. Adjacent vertex distinguishing edge colorings of planar graphs with girth at least five[J]. Journal of Combinatorial Optimization，2014，28(4)：893-909. DOI：10.1007/s10878-012-9569-5.

[11] WANG Weifan，WANG Yiqiao. Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of K_4-minor-free graphs[J]. Applied Mathematics Letters，2011，24(12)：2034-2037. DOI：10.1016/j.aml.2011.05.038.

[12] WANG Yi，CHENG Jian，LUO Rong，*et al*. Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of 2-degenerate graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization，2016，31：874-880. DOI 10.1007/s10878-014-9796-z.

[13] CHEN Lili，LI Yanyi. A new proof for a result on the inclusion chromatic index of subcubic graphs[J]. Axioms，2022，11：33. DOI：10.3390/axioms11010033.

[14] CHEN Lili，LI Yanyi，ZHOU Xiangqian. The inclusion-free edge-colorings of $(3,\Delta)$-bipartite graphs[J]. Discrete Applied Mathematics，2022，321：159-164. DOI：10.1016/j.dam.2022.06.039.

[15] GU Jing，WANG Yiqiao，WANG Weifan，*et al*. Strict neighbor-distinguishing index of K_4-minor-free graphs[J]. Discrete Applied Mathematics，2023，329：87-95. DOI：10.1016/j.dam.2023.01.017.

[16] JING Puning，WANG Weifan，WANG Yiqiao，*et al*. Strict neighbor-distinguishing edge coloring of planar graphs[J]. Scientia Sinica Mathematica，2023，53(3)：523-542. DOI：10.1360/SSM-2021-0178.

（**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**黄心中）