第 45 卷　第 6 期
2024 年 11 月

华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 45　No. 6
Nov.　2024

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202309017

Douady-Earle 延拓中用到的拟共形映照参数表示

林珍连

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 假设 $f^{\mu(z)}(z)$是单位圆 D 到自身保持-1,i,1 不动,具有复特征 $\mu(z)$的 Douady-Earle 延拓。借助于上半平面到自身保持 0,1,∞三点不动的拟共形映射的参数表示,利用单位圆到上半平面的共形映射,给出 Douady-Earle 延拓 $f^{\mu(z)}(z)$的参数表示。

关键词: 拟共形映照;参数表示;复特征;Douady-Earle 延拓

中图分类号: O 174.55　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5013(2024)06-0808-04

Parametric Representation of Douady-Earle Quasiconformal Extension

LIN Zhenlian

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Suppose $f^{\mu(z)}(z)$ is a Douady-Earle extension of the unit disk D onto itself with the complex dilatation $\mu(z)$, which kept -1, i, 1 fixed. With the help of the parametric representation of the quasiconformal mapping of the upper half plane onto itself which kept 0, 1, ∞ fixed, by using the conformal mapping from the unit disk to the upper half plane, the parametric representation of the Douady-Early extension $f^{\mu(z)}(z)$ is given.

Keywords: quasiconformal mapping; parametric representation; complex dilation; Douady-Earle extension

1　预备知识

设 $w=f(z)$是平面区域 E 到区域 G 的 C^1 类保向同胚映照,且在 E 内处处满足条件

$$|f_{\bar{z}}(z)|<|f_z(z)|,$$

$$D_f(z)=\frac{|f_z(z)|+|f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)|-|f_{\bar{z}}(z)|}\leqslant K,\qquad K\geqslant 1。$$

称 $f(z)$是 E 内一个 C^1 类拟共形映照,$\mu(z)=\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$为 $w=f(z)$的复特征。用 $f^{\mu(z)}(z)$表示复特征为 $\mu(z)$拟共形映照。自 20 世纪 50 年代开始,拟共形映照便成为现代复分析的一个重要分支,它涵盖了许多基本理论和问题的讨论,其中包括拟共形映照的边界对应理论和规范拟共形映照对参数的依赖。更多拟共形映照相关内容可参见文献[1-6]。

在拟共形映照的边界对应问题的研究上,Beurling 等[5]首先构造性地将实轴 R 到自身的拟对称同

收稿日期: 2023-09-28
通信作者: 林珍连(1970-),女,副教授,主要从事单复变函数的研究。E-mail:zhenlian@hqu.edu.cn。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128, 11971182);福建省自然科学基金资助项目(2023J01127)

胚扩充为上半平面到自身拟共形同胚。用 D 表示单位圆盘，∂D 表示单位圆周，$Q(\partial D)$ 表示 ∂D 到自身的拟对称同胚全体所成的集合。1986 年，Douady 等[7] 确定了一个把 ∂D 到自身的同胚 $h(z)$ 延拓成 D 到自身的同胚 $E(h)$ 的方法。把 $E(h)(z)$，$z\in D$ 定义为使得 $\int_{\partial D}\frac{h(\zeta)-w}{1-\overline{w}h(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{|\zeta-z|^2}=0$ 的唯一值 $w\in D$，且当 $h(z)$ 为拟对称时，$E(h)$ 是拟共形的。Douady-Earle 延拓还具有以下性质：$E(h)$ 是共形自然的，且 $E(h)$ 是实解析的；若用 T 表示 $Q(\partial D)$ 中满足保持 -1，i，1 三点不动 $h(z)$ 的集合，当 $h(z)\in T$ 时，$E(h)$ 的复特征也是实解析的。关于 Douady-Earle 延拓更多相关内容可参见文献[8-9]。

拟共形映照参数表示理论问题是拟共形映照理论的另一个基本问题，夏道行[10] 首先借鉴单叶函数的 Loewner[11] 方法发展了拟共形映照的参数表示理论，之后不少学者对这一问题进行了深入研究[1-4,10-17]，该理论很好地解决了拟共形映照的模数的估计和面积偏差估计的极值问题[15-17]。文献[13]和文献[14]分别考虑了 $\sum_K^0$ 类拟共形映照和上半平面到自身保持 0，1，∞ 不动的拟共形映照的参数表示式。对于上半平面的参数表示式有定理 A。

定理 A　设 $\mu(z,t)$ 是定义在 $\mathrm{Im}\,z>0$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的复值可测函数，满足条件

$$\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+o(s),\qquad s\to 0。$$

其中：$\mu(z,t)$，$v(z,t)\in L^\infty$，$\|\mu(z,t)\|_\infty<1$。

则上半平面到自身保持 0，1，∞ 不动的拟共形映照 $w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$ 在上半平面的一切致密子集上一致地成立，即

$$f^\mu(z,t+s)=f^\mu(z,t)+sF(f^\mu(z,t),t)+o(s),\qquad s\to 0,\tag{1}$$

或者

$$\frac{\partial w}{\partial t}=F(w,t),\qquad w=f^{\mu(z,t)}(z,t),\tag{2}$$

其中有

$$F(w,t)=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\mathrm{Im}\,\omega>0}\left[\frac{\varphi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}+\frac{\overline{\varphi(\omega,t)}}{\overline{\omega}(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}-w)}\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,\tag{3}$$

$$\varphi(\omega,t)=\frac{v((f^\mu)^{-1}(\omega,t),t)}{1-|\mu((f^\mu)^{-1}(\omega,t),t)|^2}\exp(-2\mathrm{i}\arg(f^\mu)_\omega^{-1}(\omega,t)),\qquad \mathrm{Im}\,\omega>0。\tag{4}$$

在定理 A 的基础上给出 Douady-Earle 延拓中保持 -1，i，1 不动拟共形映照的参数表示式。

2　主要定理和证明

定理 1　设 $\mu(z,t)$ 是定义在 $|z|<1$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的复值可测函数，满足条件

$$\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+o(s),\qquad s\to 0。$$

其中，$\mu(z,t)$，$v(z,t)\in L^\infty$，$\|\mu(z,t)\|_\infty<1$。

则 $|z|<1$ 到自身以 $\mu(z,t)$ 为复特征且保持 -1，i，1 不动的拟共形映照 $w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$ 适合

$$f^\mu(z,t+s)=f^\mu(z,t)+sF(f^\mu(z,t),t)+o(s),\qquad s\to 0,\tag{5}$$

或者

$$\frac{\partial w}{\partial t}=F(w,t),\qquad w=f^{\mu(z,t)}(z,t),\tag{6}$$

其中有

$$F(w,t)=-\frac{(w-\mathrm{i})(w^2-1)}{\pi}\iint_{|\omega|<1}\left[\frac{\varphi(\omega,t)}{(\omega^2-1)(\omega-\mathrm{i})(\omega-w)}+\frac{\overline{\varphi(\omega,t)}}{(1-\overline{\omega}^2)(1-\overline{\omega}\mathrm{i})(1-\overline{\omega}w)}\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,$$
$$\omega=f^\mu(\zeta,t)=\sigma+\mathrm{i}\tau。\tag{7}$$

$$\varphi(\omega,t)=\frac{v((f^\mu)^{-1}(\omega,t),t)}{1-|\mu((f^\mu)^{-1}(\omega,t),t)|^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\arg(f^\mu)_\omega^{-1}(\omega,t)},\qquad |\omega|<1。\tag{8}$$

证明：只需要把上半平面内的参数表示式转到单位圆内即可。根据文献[13]中定理 3.2 的证明过程可知，从公式(4)转到公式(8)是很自然的。当前只需证明公式(3)转变成公式(7)即可。显然，变换

$\omega=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}$,把单位圆$|\zeta|<1$映成$\mathrm{Im}\,\omega>0$,$-1$映成$0$,$\mathrm{i}$映成$\infty$,$1$映成$1$。根据记号的写法,公式(7)中的$\omega,w,\sigma,\tau$应记为$\zeta,z,\xi,\eta$。再记

$$I_1=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\mathrm{Im}\,\omega>0}\frac{\varphi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\,,\tag{9}$$

$$I_2=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\mathrm{Im}\,\omega>0}\frac{\overline{\varphi(\omega,t)}}{\bar{\omega}(\bar{\omega}-1)(\bar{\omega}-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\,。\tag{10}$$

利用变换$\omega=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}$,在公式(9),(10)中的

$$w(w-1)=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}-1\right)=-\frac{z^2-1}{2\,(z-\mathrm{i})^2},$$

$$\omega(\omega-1)(\omega-w)=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}-1\right)\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}-\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\right)=\frac{(\zeta^2-1)(\zeta-z)}{2(z-\mathrm{i})(\zeta-\mathrm{i})^3},$$

作$h=\omega\circ f\circ\omega^{-1}$,那么,$h$是上半平面到自身的拟共形映照,且它的复特征为

$$\mu_h=\left(\frac{(\omega^{-1})'}{|(\omega^{-1})'|}\right)^2\mu_f\circ\omega^{-1}=\frac{|\zeta-\mathrm{i}|^4}{(\zeta-\mathrm{i})^4}\mu_f\circ\omega^{-1}\,。$$

这样公式(9)积分号内复特征经过变换后的增加因子为$\frac{|\zeta-\mathrm{i}|^4}{(\zeta-\mathrm{i})^4}$,公式(10)中积分号内复特征经过变换后的增加因子为$\frac{|\zeta-\mathrm{i}|^4}{\overline{(\zeta-\mathrm{i})^4}}$。此外,由$\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\bar{\omega}=\frac{1}{|\zeta-\mathrm{i}|^4}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}$可知,$I_1,I_2$中面积元素经过变换后增加的因子为$\frac{1}{|\zeta-\mathrm{i}|^4}$。

将以上讨论代入公式(9),(10),可得

$$I_1=\frac{z^2-1}{2\pi\,(z-\mathrm{i})^2}\iint_{|\zeta|<1}\frac{2(z-\mathrm{i})(\zeta-\mathrm{i})^3}{(\zeta^2-1)(\zeta-z)}\frac{|\zeta-\mathrm{i}|^4}{(\zeta-\mathrm{i})^4}\varphi(\zeta,t)\frac{1}{|\zeta-\mathrm{i}|^4}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{-1}{\pi\,(z-\mathrm{i})^2}\iint_{|\zeta|<1}\frac{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}{(\zeta^2-1)(\zeta-z)(\zeta-\mathrm{i})}\varphi(\zeta,t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta。$$

又可得

$$\bar{\omega}(\bar{\omega}-1)(\bar{\omega}-w)=\overline{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}}\left(\overline{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}}-1\right)\left(\overline{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-\mathrm{i}}}-\frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\right)=\frac{-(\bar{\zeta}^2-1)}{2(\bar{\zeta}+\mathrm{i})^2}\frac{\mathrm{i}(\bar{\zeta}z-1)}{(z-\mathrm{i})(\bar{\zeta}+\mathrm{i})},$$

故可得

$$I_2=\frac{z^2-1}{2\pi\,(z-\mathrm{i})^2}\iint_{|\zeta|<1}\frac{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})(\bar{\zeta}+\mathrm{i})^3}{(1-\bar{\zeta}^2)(1-\bar{\zeta}z)}\frac{|\zeta-\mathrm{i}|^4}{(\zeta-\mathrm{i})^4}\overline{\varphi(\zeta,t)}\frac{1}{|\zeta-\mathrm{i}|^4}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{-1}{\pi\,(z-\mathrm{i})^2}\iint_{|\zeta|<1}\frac{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}{(1-\bar{\zeta}^2)(1-\bar{\zeta}z)(1-\mathrm{i}\bar{\zeta})}\overline{\varphi(\zeta,t)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta。$$

此外,根据公式(1),令

$$G(w,t,s)=f^{\mu}((f^{\mu})^{-1}(w,t),t+s),$$

根据公式(5),令

$$g(z,t,s)=f^{\mu}((f^{\mu})^{-1}(z,t),t+s),$$

并且公式(2)的$F(w,t)$与公式(6)的$F(z,t)$适合关系式

$$F(w,t)=\lim_{s\to 0}\frac{G(w,t,s)-w}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1-\mathrm{i}}{2s}\left(\frac{g(z,t,s)+1}{g(z,t,s)-\mathrm{i}}-\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\right)=\lim_{s\to 0}-\frac{g(z,t,s)-z}{s}\frac{1}{(g(z,t,s)-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}=-\frac{F(z,t)}{(z-\mathrm{i})^2}。$$

即证明了公式(3)变成公式(7)，定理 1 得证。

参考文献：

[1] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mapping[M]. Princeton: American Mathematical Society, 1966.

[2] LEHTO V, VIRTANEN K. Quasiconformal mapping in the plane [M]. 2nd. New York: Springer, 1973.

[3] 李忠. 拟共形映射及其黎曼曲面论中的应用[M]. 北京：科学出版社，1988.

[4] ASTALA K, IWANIEC T, MARTIN G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009.

[5] BEURLING A, AHLFORS L. The boundary corresponding for quasiconformal mapping[J]. Acta Mathematica, 1956, 96: 125-142.

[6] ASTALA K, NESI V. Composites and quasiconformal mappings: New optimal bounds in two dimensions[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2003, 18: 335-355. DOI: 10.1007/s00526-003-0145-9.

[7] DOUADY A, EARLE C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle[J]. Acta Mathematica, 1986, 15: 23-48.

[8] JIANG Manman, LIU Lixin, YAO Hongyu. The Douady-Earle extension are not always harmonic[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2018, 146(7): 2853-2865. DOI: 10.1090/proc/13047.

[9] EARLE C J. Conformally natural extension of vector fields from S^{n-1} to B^n[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1988, 102(1): 145-149. DOI: 10.1090/s0002-9939-1988-0915733-2.

[10] 夏道行. 拟似共形映照的参数表示[J]. 复旦学报(自然科学版)，1959(2)：323-329.

[11] 伯茂仁克. 单叶函数[M]. 杨维奇，译. 北京：科学出版社，1987.

[12] HE Chengqi. A parametric representation of quasiconformal extensions[J]. Chinese Science Bulletin, 1980, 25(9): 721-724.

[13] LIN Zhenlian, SHI Qingtian. Parametric representations of quasiconformal mappings[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40B(6): 1874-1882. DOI: 10.1007/s10473-020-0616-5.

[14] 林珍连. 拟共形映照的参数表示[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2019，40(5)：691-693. DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.201810077.

[15] GEHRING F W, REICH E. Area distortion of under quasiconformal mappings[J]. Annales Fennici Mathematici, 1966, 388: 1-14. DOI: 10.5186/aasfm.1966.388.

[16] ASTALA K. Area distortion of quasiconformal mappings[J]. Acta Mathematica, 1994, 173(1): 37-60. DOI: 10.1007/BF02392568.

[17] EREMENKO A, HAMILTON D H. On the area distortion by quasiconformal mappings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1995, 123(9): 2793-2797. DOI: 10.1090/S0002-9939-1995-1283548-8.

（**责任编辑：**黄晓楠　　**英文审校：**黄心中）