

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202306028



动态多尺度决策信息系统局部 最优尺度的更新规律

陈应生¹, 李进金^{1,2}

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;

2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要: 在对象动态增加的情况下, 对多尺度决策信息系统(MDIS)保持局部决策类不确定性的最优尺度更新规律进行研究。首先, 介绍决策信息系统和多尺度决策信息系统决策类不确定性的基本知识, 以及 MDIS 保持局部决策类不确定性的最优尺度定义。然后, 在增加一个对象的条件下, 分析 MDIS 局部决策类不确定性的更新规律。最后, 采用增量学习方法, 给出增加一个对象条件下 MDIS 局部最优尺度不变和变大的充分必要条件。结果表明: 文中方法可以快速地确定更新系统局部最优尺度。

关键词: 粒计算; 多尺度决策信息系统; 局部最优尺度选择; 不确定性; 动态更新

中图分类号: TP 18

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2024)06-0800-08

Updating Law of Local Optimal Scale of Dynamic Multi-Scale Decision Information System

CHEN Yingsheng¹, LI Jinjin^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;

2. School of Mathematics Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: Research on the updating law of optimal scale of multi-scale decision information system (MDIS) to keep local decision class uncertainty under the condition of dynamic increase of objects. Firstly, the basic knowledge of decision class uncertainty of decision information system and multi-scale decision information system are introduced, and the definition of optimal scale of MDIS to keep local decision class uncertainty is given. Then, the updating law of local decision class uncertainty of MDIS is analyzed under the condition of adding one object. Finally, using the incremental learning method, the sufficient and necessary conditions are given for the local optimal scale of MDIS to remain invariant or increase under the condition of adding an object. The results show that the proposed method can quickly determine the local optimal scale of the update system.

Keywords: granular computing; multi-scale decision information system; local optimal scale selection; uncertainty; dynamic update

粒计算是模仿人类思维方式的一种处理信息的计算范式^[1]。随着人工智能和信息科学的发展, 粒

收稿日期: 2023-06-28

通信作者: 李进金(1960-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事一般拓扑学与不确定性分析的研究。E-mail: jinjinlimnu@126.com。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12271191, 11871259); 福建省自然科学基金资助项目(2022J01306)

计算已广泛应用于人工智能、知识发现、决策分类、医疗诊断等领域，成为进行海量数据挖掘、不确定性分析等复杂问题的强有力工具^[2-5]。多粒度是粒计算的一种显著特征，多尺度分析是处理复杂信息的一种重要方法。Wu 等^[6]首先提出多尺度决策信息系统(MDIS)模型，随后许多学者对这一模型进行大量的研究，主要包含粗糙近似与协调性的传递规律^[7]、决策规则^[8]、粗糙度和信息熵^[9]、最优尺度问题^[7-14]等。最优尺度是 MDIS 的核心问题，它研究以最小的条件信息达到最优的决策效果。Wu 等^[6]讨论 MDIS 的 8 种协调性的最优尺度，并对其进行综合分析和比较。She 等^[8]利用决策树，引入裁剪方法，以决策规则为标准，研究最优尺度与属性约简同步的具体算法。Li 等^[9]将系统推广到广义多尺度决策信息系统，采用分步优化的方法设计了一种最优尺度搜索算法。Huang 等^[10]将该模型推广到多尺度决策的情况下，并讨论最优尺度选择问题。陈应生等^[11]构建多尺度集值信息系统，引入尺度重要度，给出系统的最优尺度选择算法。关于局部最优尺度的研究，顾沈明等^[12]，马周明等^[13]研究多尺度决策信息系统的局部最优尺度选择问题；吴伟志等^[14]研究不协调广义多尺度决策系统的局部最优尺度组合选择问题。

动态变化是大数据的一个重要特征，增量学习是处理动态数据的一种重要方法，它主要研究更新的信息而不是重新计算，从而显著地提高效率。增量学习方法在粒计算中得到了应用，Yang 等^[15]提出一种动态概念更新方法；Zhang 等^[16]提出一个概率粗糙集的动态框架，并使用增量算法更新不确定区域；He 等^[17]通过矩阵的更新策略设计一种增量算法，并研究模糊概率粗糙集三支区域的更新规则。

在 MDIS 领域，Deng 等^[18]在 MDIS 上定义了一个模糊隶属度，并采用三支决策理论和增量学习方法探索最优尺度；Luo 等^[19]研究不完全 MDIS 中具有动态尺度变化的三支决策更新问题。然而，这些研究知识采用增量学习方法进行尺度间的信息更新，并未考虑到由于对象或属性的增删引起的动态变化因素。目前，只有少量学者研究对象动态增加的情况下 MDIS 最优尺度的更新问题，Hao 等^[20]运用三支决策理论研究 MDIS 在对象增加时系统最优尺度的更新算法；Chen 等^[21]研究在对象动态增加条件下系统最优尺度减小的充要条件；Li 等^[22]进一步研究在增加一个对象时，系统最优尺度相等和增加的充要条件。由于在具体的应用中有时只需要考虑局部决策的问题，故 Chen 等^[23]研究保持系统局部决策类不确定性的最优尺度更新问题。基于此，本文对局部决策类的最优尺度问题展开研究，给出最优尺度不变和变大的充分必要条件，提出增加对象条件下最优尺度更新判断的快捷方法。

1 基础知识

1.1 决策信息系统决策类的不确定性

定义 1^[6] $S=(U,A\cup\{d\})$ 称为一个决策信息系统，其中， $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个非空有限集合，称为论域， $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是一个非空有限属性集，对于任意的 $a\in A$ ， $a:U\rightarrow V_a$ 是一个单值映射，其中， $V_a=\{a(x)|x\in U\}$ 是属性 a 的值域。 $d\notin A$ 称为一个决策属性， $d:U\rightarrow V_d$ 是一个单值映射，其中， $V_d=\{d(x)|x\in U\}$ 是属性 d 的值域。

对于任意的属性子集 $B\subseteq A$ ，定义等价关系

$$R_B=\{(x,y)\in U\times U|a(x)=a(y),\forall a\in B\}.$$

$[x]_B=\{y\in U|a(x)=a(y),\forall a\in B\}$ 为对象 x 关于属性子集 B 的等价类。对于 $B\subseteq A$ ， $X\subseteq U$ ， X 关于属性子集 B 的上下近似分别定义为

$$\overline{R}_B(X)=\{x\in U|[x]_B\cap X\neq\emptyset\},\quad \underline{R}_B(X)=\{x\in U|[x]_B\subseteq X\}.$$

由属性 d 诱导的等价关系为

$$R_d=\{(x,y)\in U\times U|d(x)=d(y)\}.$$

$[x]_d=\{y\in U|(x,y)\in R_d\}$ 为 x 关于 d 的等价类， $U/R_d=\{R_d(x)|x\in U\}$ 称为 R_d 的商集。

对于任意的决策类 $D\in U/R_d$ ， U 被分成 3 个互不相交的区域，即

$$\text{Pos}_B(D)=\underline{R}_B(D)=\{[x]_B|[x]_B\subseteq D,x\in U\},$$

$$\text{Neg}_B(D)=U-\overline{R}_B(D)=\{[x]_B|[x]_B\cap D=\emptyset,x\in U\},$$

$$\text{Bnd}_B(D)=\overline{R}_B(D)-\underline{R}_B(D)=\{[x]_B|[x]_B\nsubseteq X,[x]_B\cap D\neq\emptyset,x\in U\}.$$

式中: $\text{Pos}_B(D)$ 是可以完全确定属于 D 的信息粒,称为接受域; $\text{Neg}_B(D)$ 是完全不属于 D 的信息粒,称为拒绝域; $\text{Bnd}_B(D)$ 是不能确定属于 D 或不属于 D 的信息粒,称为边界域; $\text{Pos}_B(D)$ 与 $\text{Neg}_B(D)$ 是完全可以决策的区域,而 $\text{Bnd}_B(D)$ 是不确定性区域。

定义 2^[20] 设 $S=(U,A\cup\{d\})$ 是一个决策信息系统, $D\in U/R_d$, 令

$$\text{UNC}(A,D)=\{[x]_B\mid [x]_B\nsubseteq D,[x]_B\cap D\neq\varnothing,x\in U\},$$

则称 $\text{UNC}(A,D)$ 为 D 关于 B 的不确定性。

容易得到引理 1。

引理 1^[22] 设 $S=(U,A\cup\{d\})$ 称为一个决策信息系统, $D\in U/R_d, x\in U$, 则有

$$x\in \text{UNC}(A,D)\Leftrightarrow [x]_A\subseteq \text{UNC}(A,D),$$
$$x\notin \text{UNC}(A,D)\Leftrightarrow [x]_A\cap \text{UNC}(A,D)=\varnothing.$$

1.2 多尺度决策信息系统保持不确定性的最优尺度选择

定义 3^[6] 设 $S=(U,A)$ 为多尺度信息系统, 其中, $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个非空有限集合, $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是一个非空条件属性集, 每个属性 a_j 都有 s 个尺度, 并且对任意的 $1\leq r\leq s-1, 1\leq j\leq m$, 存在一个满射 $g_j^{r,r+1}:V_j^r\rightarrow V_j^{r+1}$, 使 $a_j^{r+1}=g_j^{r,r+1}\cdot a_j^r$, 即对任意的 $x\in U$, 有 $a_j^{r+1}(x)=g_j^{r,r+1}(a_j^r(x))$, $V_j^r=\{a_j^r(x)\mid x\in U\}$ 是 a_j 关于第 r 尺度的属性 a_j^r 的值域, $g_j^{r,r+1}$ 称为条件属性 a_j 从第 r 尺度到第 $r+1$ 的粒度转换函数。

根据定义 3, S 关于第 k 尺度的信息系统为 $(U,A^k)=(U,\{a_1^k,a_2^k,\cdots,a_m^k\})$, 并且对任意的 $x\in U$, 有 $[x]_{A^1}\subseteq [x]_{A^2}\subseteq \cdots \subseteq [x]_{A^s}$, 即信息粒是随着尺度的减少而逐渐变细。

不失一般性, 为方便表达, 与定义 3 相反, 文献[20-23]规定信息粒是随着尺度的增加而逐渐变细, 以下的讨论也遵循这个规定, 故有

$$[x]_{A^s}\subseteq [x]_{A^{s-1}}\subseteq \cdots \subseteq [x]_{A^1}.$$

定义 4^[7] 设 $S=(U,A\cup\{d\})$ 为多尺度决策信息系统, $S=(U,A)$ 是一个多尺度信息系统, $d\notin A$ 是一个决策属性, 由决策属性 d 诱导的等价关系为

$$R_d=\{(x,y)\in U\times U\mid d(x)=d(y)\}.$$

根据信息粒是随着尺度的增加而逐渐变细, 对任意的 $D\in U/R_d$, 有

$$R_{A^1}(D)\subseteq R_{A^2}(D)\subseteq \cdots \subseteq R_{A^s}(D), \quad \overline{R}_{A^1}(D)\supseteq \overline{R}_{A^2}(D)\supseteq \cdots \supseteq \overline{R}_{A^s}(D).$$

根据上下近似定义, U 被分成 3 个互不相交的区域, 即

$$\begin{aligned} \text{ACP}(A^k,D) &= \underline{R}_{A^k}(D) = \{[x]_{A^k}\mid [x]_{A^k}\subseteq D, x\in U\}, \\ \text{REJ}(A^k,D) &= U - \overline{R}_{A^k}(D) = \{[x]_{A^k}\mid [x]_{A^k}\cap D=\varnothing, x\in U\}, \\ \text{UNC}(A^k,D) &= \overline{R}_{A^k}(D) - \underline{R}_{A^k}(D) = \{[x]_{A^k}\mid [x]_{A^k}\not\subseteq D, [x]_{A^k}\cap D\neq\varnothing, x\in U\}, \end{aligned}$$

且有 $\text{UNC}(A^s,D)\subseteq \text{UNC}(A^{s-1},D)\subseteq \cdots \subseteq \text{UNC}(A^1,D)$ 。

根据序贯三支决策理论, 有

$$\begin{aligned} \text{ACP}(A^{k+1},D) &= \text{ACP}(A^k,D)\cup K, \\ \text{REJ}(A^{k+1},D) &= \text{REJ}(A^k,D)\cup J, \\ \text{UNC}(A^{k+1},D) &= \text{UNC}(A^k,D)-L. \end{aligned}$$

式中: $K=\{x\in \text{UNC}(A^k,D)\mid [x]_{A^k}\subseteq D\}$; $J=\{x\in \text{UNC}(A^k,D)\mid [x]_{A^k}\cap D=\varnothing\}$; $L=\{x\in \text{UNC}(A^k,D)\mid [x]_{A^k}\not\subseteq D\wedge [x]_{A^k}\cap D\neq\varnothing\}$ 。

多尺度决策信息系统不同尺度间的信息粒化程度不一样, 较细尺度的粒化精度较高, 但认识知识需花费的精力较多, 较粗尺度的粒化精度较低, 而认识知识需花费的精力较少。人类的认知过程是一个由浅入深逐步推进的过程, 面对具体的认识目标, 人们希望以最小的精力获取决策目标, 即以最粗的尺度获取决策目的, 由于不确定性是衡量决策能力的重要指标, 而决策目标有时针对具体的某个决策类, 因此, 提出定义 5。

定义 5 设 $S=(U,A\cup\{d\})$ 为 MDIS, $D\in U/R_d$, 如果存在一个 $1\leq k\leq s$, 使得 $\text{UNC}(A^s,D)=\text{UNC}(A^k,D)$, 但任意的 $l<k$, 有 $\text{UNC}(A^s,D)\subsetneq \text{UNC}(A^l,D)$ 成立, 则称 k 是 D 的局部最优尺度。

根据定义 5,对于 $D \in U/R_d$,由 $\text{UNC}(A^s, D) \subseteq \text{UNC}(A^{s-1}, D) \subseteq \dots \subseteq \text{UNC}(A^1, D)$,决策类 D 针对最高尺度的不确定性最小,即最高尺度的决策能力最好。因此, k 是保持局部决策类不确定性的最粗尺度,即保持局部决策能力不变的最优尺度。

2 增加对象条件下多尺度决策信息系统最优尺度的更新规律

对于一个多尺度决策信息系统 $S = (U, A \cup \{d\})$,当信息系统添加一个对象 y 时,系统决策类的不确定性和最优尺度可能发生改变,故讨论增加一个对象 y 是不确定性和最优尺度的更新规律。为方便表达,把增加一个对象前后对应的时刻分别记为 $t, t+1$; $S^{(t)} = (U_t, A \cup \{d\})$, $S^{(t+1)} = (U_{t+1}, A \cup \{d\})$ 分别为时刻 $t, t+1$ 对应的多尺度决策信息系统; $U_t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U_{t+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ 分别为时刻 $t, t+1$ 系统对应的论域; $[x]_{A^k}^t, [x]_{A^k}^{t+1}$ 分别为对象 x 第 k 尺度下在时刻 $t, t+1$ 的等价类。下文都是针对更新前后的系统 $S^{(t)}, S^{(t+1)}$ 开展的。因此,引理或定理的表述中不再强调更新前后的系统,也不再强调添加的对象 y 。

假设添加的对象 y 不自成一类,即存在 $x \in U_t$,使 $[y]_{A^s}^t = [x]_{A^s}^t \cup \{y\}$ 。

对于 $D_t \in U_t/R_d$,添加对象 y 后, $D_{t+1} \in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新,则有

$$D_{t+1} = \begin{cases} D_t \cup \{y\}, & d(y) = d(x), \quad \forall x \in D_t, \\ D_t, & \text{其他。} \end{cases}$$

引理 2^[20] 对于任意的 $D_t \in U_t/R_d, D_{t+1} \in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, $1 \leq k \leq s$,则有

$$\text{UNC}(A^k, D_{t+1}) = \begin{cases} \text{UNC}(A^k, D_t) \cup [y]_{A^k}^{t+1}, & y \in \text{UNC}(A^k, D_{t+1}), \\ \text{UNC}(A^k, D_t), & \text{其他。} \end{cases}$$

根据引理 2,显然,有 $\text{UNC}(A^k, D_t) \subseteq \text{UNC}(A^k, D_{t+1})$ 。

更进一步,容易得到引理 3。

引理 3 对 $D_t \in U_t/R_d, D_{t+1} \in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, $[y]_{A^k}^{t+1} = [x]_{A^k}^{t+1} \cup \{y\}, 1 \leq k \leq s$,有以下 2 个结论成立。

1) 如果 $D_{t+1} = D_t \cup \{y\}$,则有

$$\text{UNC}(A^k, D_{t+1}) = \begin{cases} \text{UNC}(A^k, D_t), & [x]_{A^k}^t \subseteq D, \\ \text{UNC}(A^k, D_t) \cup [x]_{A^k}^t \cup \{y\}, & [x]_{A^k}^t \cap D = \emptyset, \\ \text{UNC}(A^k, D_t) \cup \{y\}, & \text{其他。} \end{cases}$$

2) 如果 $D_{t+1} = D_t$,则有

$$\text{UNC}(A^k, D_{t+1}) = \begin{cases} \text{UNC}(A^k, D_t) \cup [x]_{A^k}^t \cup \{y\}, & [x]_{A^k}^t \subseteq D, \\ \text{UNC}(A^k, D_t), & [x]_{A^k}^t \cap D = \emptyset, \\ \text{UNC}(A^k, D_t) \cup \{y\}, & \text{其他。} \end{cases}$$

文献[23]中给出最优尺度变小的充分必要条件。

定理 1^[23] 设 $D_t \in U_t/R_d, D_{t+1} \in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, r, R 分别是 D_t, D_{t+1} 的最优尺度, $[y]_{A^s}^t = [x]_{A^s}^t \cup \{y\}$,则 $R < r$ 当且仅当以下 3 个条件成立:

- 1) $y \in \text{UNC}(A^s, D_{t+1})$;
- 2) $x \notin \text{UNC}(A^s, D')$;
- 3) $\text{UNC}(A^{r-1}, D_t) - \text{UNC}(A^s, D_t) = [x]_{A^s}^t$ 。

定理 2 设 $D_t \in U_t/R_d, D_{t+1} \in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, r, R 分别是 D_t, D_{t+1} 的最优尺度,若 $[y]_{A^s}^t = [x]_{A^s}^t \cup \{y\}, y \notin \text{UNC}(A^s, D_{t+1})$,则 $r = R$ 。

证明:由于 $y \notin \text{UNC}(A^s, D_{t+1})$,根据引理 1,有 $[y]_{A^s}^t \cap \text{UNC}(A^s, D_{t+1}) = \emptyset$,故 $[x]_{A^s}^t \cap \text{UNC}(A^s, D') = \emptyset$ 成立,又因 r 是决策类 D_t 的最优尺度,有 $\text{UNC}(A^s, D_t) = \text{UNC}(A^r, D_t)$,故 $[x]_{A^r}^t \cap \text{UNC}(A^r, D') = \emptyset$,分两种情况证明 $y \notin \text{UNC}(A^r, D_{t+1})$ 。

1) 当 $D_{t+1} = D_t \cup [y]$ 时,由 $y \notin \text{UNC}(A^s, D_{t+1})$ 及 $[y]_{A^s}^t = [x]_{A^s}^t \cup \{y\}$,有 $[x]_{A^s}^t \subseteq D_t$,故 $[x]_{A^r}^t \subseteq D_t$,否则与 $\text{UNC}(A^s, D_t) = \text{UNC}(A^r, D_t)$ 矛盾,故 $[y]_{A^r}^t = [x]_{A^r}^t \cup \{y\} \subseteq D_{t+1}$,即 $y \notin \text{UNC}(A^r, D_{t+1})$ 。

2) 当 $D_{t+1}=D_t\cup[y]$ 时, 由 $y\notin\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$ 及 $[y]_{A^s}^t=[x]_{A^s}^t\cup\{y\}$, 有 $[x]_{A^s}^t\cap D_t=\varnothing, [x]_{A^r}^t\cap D_t=\varnothing$, 否则与 $\text{UNC}(A^s,D_t)=\text{UNC}(A^r,D_t)$ 矛盾, 所以 $[y]_{A^r}^t\cap D_{t+1}=\varnothing$, 即 $y\notin\text{UNC}(A^r,D_{t+1})$ 。

根据引理 2, $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^s,D_t), \text{UNC}(A^r,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D_t)$, 故有 $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D_{t+1})$ 。

另一方面, 因为 r 是决策类 D_t 的最优尺度, 所以 $\text{UNC}(A^s,D_t)\subset\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_t)$, 从而 $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^s,D_t)\subset\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_t)\subseteq\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1})$, 所以 $r=R$ 。

定理 3 设 $D_t\in U_t/R_d, D_{t+1}\in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, r, R 分别是 D_t, D_{t+1} 的最优尺度, $[y]_{A^s}^t=[x]_{A^s}^t\cup\{y\}$, 若 $x\in\text{UNC}(A^s,D_t)$, 则 $r=R$ 。

证明: 如果 $x\in\text{UNC}(A^s,D')$, 那么 $y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$, 因为 $\text{UNC}(A^s,D')=\text{UNC}(A^r,D')$, 所以有 $x\in\text{UNC}(A^r,D'), y\in\text{UNC}(A^r,D_{t+1})$, 根据引理 2, 可得 $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^s,D')\cup\{y\}$, 且 $\text{UNC}(A^r,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D')\cup\{y\}$ 。

因此, 有 $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D_{t+1})$, 因 $\text{UNC}(A^s,D')\subset\text{UNC}(A^{r+1},D')$, 有 $x\in\text{UNC}(A^{r+1},D'), y\in\text{UNC}(A^{r+1},D_{t+1})$, 从而有 $\text{UNC}(A^1,D_{t+1})=\text{UNC}(A^1,D')\cup\{y\}\subset\text{UNC}(A^{r+1},D')\cup\{y\}=\text{UNC}(A^{r+1},D_{t+1})$, 所以 $R=r$ 。

根据定理 2 与定理 3, 添加对象 y 后, 如果 $y\notin\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$ 或者 $x\in\text{UNC}(A^s,D')$, 则 D_{t+1} 的最优尺度也是 r , 因此, 只讨论 $y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$ 且 $x\notin\text{UNC}(A^s,D')$ 的情况。因为 r 是 D_t 的最优尺度, 故 $\text{UNC}(A^s,D')=\text{UNC}(A^r,D')$, 从而 $x\notin\text{UNC}(A^r,D'), y\in\text{UNC}(A^r,D_{t+1})$, 根据引理 1 与引理 3, 容易得到引理 4。

引理 4 设 r 是 D_t 的最优尺度, $y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$ 且 $x\notin\text{UNC}(A^s,D')$, 则有

$$\begin{aligned} [x]_{A^s}^t\cap\text{UNC}(A^s,D') &= \varnothing, \\ [x]_{A^r}^t\cap\text{UNC}(A^r,D') &= \varnothing, \\ \text{UNC}(A^s,D_{t+1}) &= \text{UNC}(A^s,D_t)\cup[x]_{A^s}^t\cup\{y\}, \\ \text{UNC}(A^r,D_{t+1}) &= \text{UNC}(A^r,D_t)\cup[x]_{A^r}^t\cup\{y\}. \end{aligned}$$

证明: $y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1}), x\notin\text{UNC}(A^s,D_t)$, 根据引理 1 可得 $[y]_{A^s}^t\subseteq\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$ 且 $[x]_{A^s}^t\cap\text{UNC}(A^s,D_t)=\varnothing$ 。根据引理 3, 可得 $\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^s,D_t)\cup[x]_{A^s}^t\cup\{y\}$ 。

由于设 r 是 D_t 的最优尺度, 所以 $\text{UNC}(A^s,D')=\text{UNC}(A^r,D')$, 从而有

$$\begin{aligned} [x]_{A^s}^t\cap\text{UNC}(A^s,D') &= \varnothing, \\ \text{UNC}(A^r,D_{t+1}) &= \text{UNC}(A^r,D_t)\cup[x]_{A^r}^t\cup\{y\}. \end{aligned}$$

给出最优尺度不变与变大的充分必要条件(定理 4, 5)。

定理 4 设 $D_t\in U_t/R_d, D_{t+1}\in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, r, R 分别是 D_t, D_{t+1} 的最优尺度, $[y]_{A^s}^t=[x]_{A^s}^t\cup\{y\}, y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1})$, 且 $x\notin\text{UNC}(A^s,D')$, 则 $R=r$ 当且仅当以下两个条件成立:

- 1) $[x]_{A^s}^t=[x]_{A^r}^t$;
- 2) $\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1})-\text{UNC}(A^s,D_t)\supset[x]_{A^s}^t$ 。

证明: 根据引理 4, 有

$$\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D_{t+1})\Leftrightarrow[x]_{A^s}^t=[x]_{A^r}^t.$$

又因为 $\text{UNC}(A^s,D')\subset\text{UNC}(A^{r^{-1}},D')$, 所以有

$$\begin{aligned} \text{UNC}(A^s,D_{t+1})\subset\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1}) &\Leftrightarrow\text{UNC}(A^s,D_t)\cup[x]_{A^s}^t\cup\{y\}\subset \\ \text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1}) &\Leftrightarrow\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1})-\text{UNC}(A^s,D_t)\supset[x]_{A^s}^t. \end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} R=r &\Leftrightarrow\text{UNC}(A^s,D_{t+1})=\text{UNC}(A^r,D_{t+1}), \\ \text{UNC}(A^s,D_{t+1})\subset\text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1}) &\Leftrightarrow[x]_{A^s}^t=[x]_{A^r}^t, \\ \text{UNC}(A^{r^{-1}},D_{t+1})-\text{UNC}(A^s,D_t) &\supset[x]_{A^s}^t. \end{aligned}$$

定理 5 设 $D_t\in U_t/R_d, D_{t+1}\in U_{t+1}/R_d$ 是 D_t 的更新, r, R 分别是 D_t, D_{t+1} 的最优尺度, $[y]_{A^s}^t=[x]_{A^s}^t\cup\{y\}, y\in\text{UNC}(A^s,D_{t+1}), x\notin\text{UNC}(A^s,D')$, 则 $R>r$ 当且仅当

$[x]_{A^s}^{t'} \subset [x]_{A^r}^{t'}$ 。

证明:根据引理 4,有
 $R>r \Leftrightarrow \text{UNC}(A^s, D_{t+1}) \subset \text{UNC}(A^r, D_{t+1}) \Leftrightarrow \text{UNC}(A^s, D_t) \cup [x]_{A^s}^{t'} \cup \{y\} \subset \text{UNC}(A^r, D_t) \cup [x]_{A^r}^{t'} \cup \{y\} \Leftrightarrow [x]_{A^s}^{t'} \subset [x]_{A^r}^{t'}$ 。

例 1 动态多尺度决策信息系统(例 1),如表 1 所示。更新动态 MDSI 决策类的局部最优尺度。
表 1 动态多尺度决策信息系统(例 1)

Tab. 1 Dynamic multi-scale decision information system (example 1)							
U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3	d
x_1	Y	S	5	N	L	2	1
x_2	Y	S	4	Y	S	4	1
x_3	Y	S	4	Y	S	5	1
x_4	Y	M	3	Y	M	3	1
x_5	Y	M	3	Y	M	3	0
x_6	N	L	1	Y	M	3	0
x_7	N	L	2	Y	S	4	0
x_8	N	L	2	Y	S	5	0
y	N	L	2	Y	S	5	0
z	Y	S	5	N	L	2	1

设 $U_t = \{x_1, x_2, \cdots, x_8\}$, 当对象 y, z 被添加到系统后,对最优尺度的更新进行研究。经计算可得
 $U_t/R_d = \{D_t, E_t\} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7, x_8\}\},$
 $U_t/R_{A^3} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_8\}\},$
 $U_t/R_{A^2} = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_6\}, \{x_7, x_8\}\},$
 $U_t/R_{A^1} = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7, x_8\}\},$
 $\text{UNC}(A^3, D_t) = \text{UNC}(A^3, E_t) = \{x_4, x_5\},$
 $\text{UNC}(A^2, D_t) = \text{UNC}(A^2, E_t) = \{x_4, x_5\},$
 $\text{UNC}(A^1, D_t) = \text{UNC}(A^1, E_t) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}。$

因此, D_t, E_t 的局部最优尺度都是 2。
当添入对象 y 时,有 $E_{t+1} = E_t \cup \{y\}$,经计算可得, $[y]_{A^3}^{t+1} = [x_8]_{A^3}^{t'} \cup \{y\}, \text{UNC}(A^3, D_{t+1}) = \{x_4, x_5, x_8, y\}, \text{UNC}(A^3, E_{t+1}) = \{x_4, x_5, x_8, y\}$,故 $[y]_{A^3}^{t+1} = [x_8]_{A^3}^{t'} \cup \{y\}, y \in \text{UNC}(A^3, D_{t+1}), x_8 \notin \text{UNC}(A^3, D_t), [x_8]_{A^3}^{t'} \subset [x_8]_{A^2}^{t'}$,根据定理 5, D_{t+1} 的最优尺度大于 D_t 的最优尺度,由 $[y]_{A^3}^{t+1} = [x_8]_{A^3}^{t'} \cup \{y\}, y \in \text{UNC}(A^3, E_{t+1}), x_8 \notin \text{UNC}(A^3, E_t), [x_8]_{A^3}^{t'} \subset [x_8]_{A^2}^{t'}$, E_{t+1} 的最优尺度大于 E_t 的最优尺度。经计算 D_{t+1}, E_{t+1} 的最优尺度都为 3。

当添入对象 z 时,有 $D_{t+1} = D_t \cup \{z\}$,经过计算可得到 $[z]_{A^3}^{t+1} = [x_1]_{A^3}^{t'} \cup \{z\}, \text{UNC}(A^3, D_{t+1}) = \text{UNC}(A^3, E_{t+1}) = \{x_4, x_5\}, z \notin \text{UNC}(A^3, D_{t+1}), z \notin \text{UNC}(A^3, E_{t+1})$,由定理 2, D_{t+1} 与 E_{t+1} 的最优尺度都不变,都为 2。由于 $[x_2]_{A^3}^{t'} = x_2, [x_3]_{A^3}^{t'} = x_3$,所以 $\text{UNC}(A^1, D_{t+1}) - \text{UNC}(A^3, D_{t+1}) \supset \text{UNC}(A^1, D_t) - \text{UNC}(A^3, D_t) = \{x_2, x_3\} \neq [x_2]_{A^3}^{t'}, \text{UNC}(A^1, E_{t+1}) - \text{UNC}(A^3, E_t) \supset \text{UNC}(A^1, E_t) - \text{UNC}(A^3, E_t) = \{x_2, x_3\} \neq [x_3]_{A^3}^{t'}$ 。

根据定理 1,无论加入何对象,最优尺度都不会变小。

例 2 动态多尺度决策信息系统(例 2),如表 2 所示。更新动态 MDSI 决策类的局部最优尺度。
经计算可得

$U_t/R_d = \{D_t, E_t\} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}\},$
 $U_t/R_{A^4} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_7\}, \{x_5, x_6\}, \{x_8, x_9, x_{10}\}\},$
 $U_t/R_{A^3} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_8, x_9, x_{10}\}\},$
 $U_t/R_{A^2} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_8, x_9, x_{10}\}\},$
 $U_t/R_{A^1} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_8, x_9, x_{10}\}\},$
 $\text{UNC}(A^4, D_t) = \text{UNC}(A^4, E_t) = \{x_4, x_5, x_6, x_7\},$
 $\text{UNC}(A^3, D_t) = \text{UNC}(A^3, E_t) = \{x_4, x_5, x_6, x_7\},$

$$\text{UNC}(A^2,D_i)=\text{UNC}(A^2,E_i)=\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\},$$
$$\text{UNC}(A^1,D_i)=\text{UNC}(A^1,E_i)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}.$$

表 2 动态多尺度决策信息系统(例 2)

Tab. 2 Dynamic multi-scale decision information system (example 2)

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_1^4	a_2^1	a_2^2	a_2^3	a_2^4	d
x_1	Y	H	A	1	Y	H	A	1	1
x_2	Y	H	A	1	Y	H	A	1	1
x_3	Y	M	B	3	Y	M	B	2	1
x_4	Y	M	B	2	Y	M	C	4	1
x_5	Y	M	B	2	Y	M	C	5	1
x_6	Y	M	B	2	Y	M	C	5	0
x_7	Y	M	B	2	Y	M	C	4	0
x_8	Y	M	C	4	N	L	D	6	0
x_9	Y	M	C	4	N	L	D	6	0
x_{10}	Y	M	C	4	N	L	D	6	0
y	Y	M	B	2	Y	M	C	4	1

因此, D_i, E_i 的最优尺度都是 3, 添入对象 y 时, 由表 2 可得, $D_{i+1} = D_i \cup \{y\}, E_{i+1} = E_i$, 且 $[y]_t + 1_{A^4} = [x_4]_{A^4}^t \cup \{y\}$, 由 $x_4 \in \text{UNC}(A^4, D_i), x_4 \in \text{UNC}(A^4, E_i)$, 根据定理 3, D_{i+1} 与 E_{i+1} 的最优尺度都不变, 仍为 2。

3 结束语

寻找最优尺度是多尺度决策信息系统的核心问题, 决策类的不确定性是系统决策能力的一个重要的衡量标准。在最细尺度下, 系统的决策能力最优。以局部决策类在最细尺度下的不确定性作为度量指标, 采用增量学习方法, 在对象动态增加的环境下, 研究多尺度的决策信息系统保持局部决策类不确定性的最优尺度的更新规律, 给出在添加一个对象条件下, 最优尺度不变和变大的充分必要条件。文中给出了添加对象后系统最优尺度更新的一种判别方法, 进一步完善了这一课题的研究, 具有一定的理论价值和实践价值。

今后, 将进一步研究对象动态增加环境下多尺度覆盖决策信息系统和集值决策信息系统的最优尺度更新规律, 并探索将所得的结果推广到模糊集的情形。

参考文献:

[1] 王国胤, 张清华, 胡军. 粒计算研究综述[J]. 智能系统学报, 2007, 2(6): 8-26. DOI:10.3969/j.issn.1673-4785.2007.06.002.

[2] LI Jinhai, HUANG Chencheng, QI Jianjun, *et al.* Three way cognitive concept learning via multi-granularity[J]. Information Sciences, 2017, 378: 244-263. DOI:10.1016/j.ins.2016.04.051.

[3] HUANG Zhenhuang, LI Jinjin, QUAN Yuhua. Noise-tolerant fuzzy β covering based multigranulation rough sets and feature subset selection[J]. IEEE Transactions Fuzzy Systems, 2022, 30(7): 2721-2735. DOI:10.1109/TFUZZ.2021.3093202.

[4] YAO Yiyu. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180: 341-353. DOI:10.1016/j.ins.2009.09.021.

[5] 王志焕, 游小英, 李伟康, 等. 模糊广义决策信息系统的证据特征与信任约简[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, 41(5): 683-689. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202003026.

[6] WU Weizhi, LEUNG Yi. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181: 3878-3897. DOI:10.1016/j.ins.2011.04.047.

[7] WU Weizhi, LEUNG Yi. A comparison study of optimal scale combination selection in generalized multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11: 961-972. DOI:10.1007/s13042-019-00954-1.

[8] SHE Yanhong, QIAN Zhuohao, HE Xiaoli, *et al.* On generalization reducts in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2021, 555: 104-124. DOI:10.1016/j.ins.2020.12.045.

[9] LI Feng,HU Baoqing. Stepwise optimal scale selection for multi-scale decision tables via attribute significance[J]. Knowledge-Based Systems,2017,129:4-16. DOI:10. 1016/j. knosys. 2017. 04. 005.

[10] HUANG Zhenhuang,LI Jinjin,DAI Weizhong,*et al.* Generalized multi-scale decision tables with multi-scale decision attributes[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2019,115:194-208. DOI:10. 1016 /j. ijar. 2019. 09. 010.

[11] 陈应生,李进金,林荣德,等. 多尺度集值决策信息系统[J]. 控制与决策,2002,37(2):455-462. DOI:10. 13195/j. kzyjc. 2020. 0882.

[12] 顾沈明,陆瑾璐,吴伟志. 广义多尺度决策系统的局部最优粒度选择[J]. 山东大学学报(理学版),2018,53(8):1-8. DOI:10. 6040/j. issn. 1671-9352. 4. 2018. 184.

[13] 马周明,黄闽,林国平,等. 基于超图的多尺度决策信息系统最优尺度选择[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版),2023,36(4):1-15. DOI:10. 16007/j. cnki. issn2095-7122. 2023. 04. 001.

[14] 吴伟志,孙钰,王霞,等. 不协调广义多尺度决策系统的局部最优尺度组合选择[J]. 模式识别与人工智能,2021,34(8):689-700. DOI:10. 16451/j. cnki. issn1003-6059. 202108002.

[15] YANG Xin,LI Tianrui,LIU Dun. A unified framework of dynamic three-way probabilistic rough sets[J]. Information Sciences,2017,420:126-147. DOI:10. 1016/j. ins. 2017. 08. 053.

[16] ZHANG Qinghua,LV Gongxun,CHEN Yuhong,*et al.* A dynamic three-way decision model based on the updating of attribute values[J]. Knowledge-Based Systems,2018,142:71-84. DOI:10. 1016/j. knosys. 2017. 11. 026.

[17] HE Shifan,WANG Yangming,PAN Xiaohong,*et al.* A novel behavioral three-way decision model with application to the treatment of mild symptoms of COVID-19[J]. Applied Soft Computing,2022,124:109055. DOI:10. 1016/j. asoc. 2022. 109055.

[18] DENG Jiang,ZHAN Jianming,WU Weizhi. A three-way decision methodology to multi-attribute decision-making in multi-scale decision information systems[J]. Information Sciences,2021,568:175-198. DOI:10. 1016/j. ins. 2021. 03. 058.

[19] LUO Chuan,LI Tianrui,HUANG Yanhong,*et al.* Updating three-way decisions in incomplete multi-scale information systems[J]. Information Sciences,2019,476:274-289. DOI:10. 1016/j. ins. 2018. 10. 012.

[20] HAO Chen,LI Jinhai,FAN Min,*et al.* Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions[J]. Information Sciences,2017,415/416:213-232. DOI:10. 1016/j. ins. 2017. 06. 032.

[21] CHEN Yingsheng,LI Jinhai,LI Jinjin,*et al.* A further study on optimal scale selection in dynamic multi-scale decision information systems based on sequential three-way decisions[J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics,2022,13:1505-1515. DOI:10. 1007/s13042-021-01474-7.

[22] LI Jinhai,FENG Ye. Update of optimal scale in dynamic multi-scale decision information systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2023,152:310-324. DOI:10. 1016/j. ijar. 2022. 10. 020.

[23] CHEN Yingsheng,LI Jinhai,LI Jinjin,*et al.* Sequential 3WD-based local optimal scale selection in dynamic multi-scale decision information systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2023,152:221-235. DOI:10. 1016/j. ijar. 2022. 10. 017.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)