

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202308035



非线性 Schrödinger 方程的 龙格库塔配点格式

姚梦丽, 滕宇航, 赖艺颖, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用 4 阶龙格库塔方法结合重心 Lagrange 插值配点法求解非线性 Schrödinger 方程。首先, 在空间方向上采用重心 Lagrange 插值配点格式进行离散, 在时间方向上采用 4 阶龙格库塔方法离散, 从而得到非线性 Schrödinger 方程的龙格库塔配点格式。其次, 对全离散格式进行相容性分析。结果表明: 龙格库塔配点格式具有高精度, 且满足离散的质量和能量守恒。

关键词: 非线性 Schrödinger 方程; 4 阶龙格库塔方法; 重心 Lagrange 插值配点; 相容性分析

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2024)04-0534-09

Runge-Kutta Collocation Scheme for Nonlinear Schrödinger Equation

YAO Mengli, TENG Yuhang, LAI Yiyang, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The fourth order Runge-Kutta method and barycentric Lagrange interpolation collocation method are used to solve the nonlinear Schrödinger equation. Firstly, the barycentric Lagrange interpolation collocation scheme is discretized in the spatial direction, and the fourth-order Runge-Kutta method is discretized in the temporal direction. The Runge-Kutta collocation scheme of the nonlinear Schrödinger equation is obtained. Secondly, the consistency analysis of the fully discrete scheme is analyzed. The results show that the Runge-Kutta collocation scheme has the high accuracy and satisfies the conservation of discrete mass and energy.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; fourth-order Runge-Kutta method; barycentric Lagrange interpolation collocation; consistency analysis

在经典力学中, 质点的状态采用质点的坐标和速度进行描述, 质点的运动方程就是牛顿运动方程。而在量子力学中, 微观粒子的状态则采用波函数进行描述, 且决定粒子状态变化的方程不再是牛顿运动方程, 而是 Schrödinger 方程^[1]。1926 年, 奥地利物理学家薛定谔提出了 Schrödinger 方程, 该方程是量子力学领域的基本方程, 其在量子力学的重要性毫不逊色于牛顿运动定律在经典力学中的重要性。非线性 Schrödinger (NLS) 方程在量子力学、非线性光学、电磁学等离子理论和固体物理等领域中有着广泛的应用。带初边值条件的 NLS 方程为

收稿日期: 2023-08-29

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究。E-mail: zfwmath@163.com。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 福建省自然科学基金面上资助项目(2022J01308); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(ZQN702)

$$\left. \begin{aligned} & i u_t + \rho \Delta u + v(\mathbf{x}) u + \beta |u|^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \\ & u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ & u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中: i 为虚数单位; ρ, β 为实常数; $\Omega \in \mathbf{R}^d (d=1, 2)$ 是有界区域; Δ 为 Laplace 算子,复值函数 $u(\mathbf{x}, t)$ 为波函数;实值函数 $v(\mathbf{x})$ 为外场的势能; $u_0(\mathbf{x})$ 为足够光滑的函数。

带初边值条件的 NLS 方程的计算结果很好地反映量子力学效应和微观系统性质,且能很好地描述微观粒子的状态随时间的变化情况。NLS 方程满足质量守恒,即

$$M(t) = \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = M(0), \quad (2)$$

以及满足能量守恒,即

$$E(t) = \int_{\Omega} (\rho |\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 - v(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x}, t)|^2 - \frac{\beta}{2} |u(\mathbf{x}, t)|^4) d\mathbf{x} = E(0). \quad (3)$$

近年来,对 NLS 方程的数值研究引起了广大学者的关注。Hu 等^[2]研究了带 5 次项的 NLS 方程 4 阶紧致差分格式,并证明最大范数下的无条件稳定性和收敛性。Guo 等^[3]利用两级有限差分格式结合吸收边界方法求 NLS 方程。Feng 等^[4]构造 NLS 方程的高阶守恒 SAV-Gauss 配置有限元格式。Wang 等^[5]提出 NLS 方程的两层网格有限元格式,并对其进行超收敛性分析。Fu 等^[6]研究二维 NLS 方程的显式高阶保指数差分龙格库塔格式。Hu 等^[7]提出带波动算子的二维 NLS 方程的守恒型差分格式。Zhai 等^[8]利用算子分裂法求解空间分数阶 NLS 方程,并进行严格的误差分析和数值模拟。Deng 等^[9]提出 NLS 方程的二阶 SAV 格式,并给出严格的误差分析。

以上求解 NLS 方程的数值方法都是基于网格剖分,从而建立逼近格式。近年来,一种新型的无网格方法(重心插值配点法)引起学者关注。重心插值配点法具有计算格式简单、精度高、程序实施方便和节点适应性好等特点,使用 Chebyshev 节点的重心 Lagrange 插值公式还可以有效克服 Runge 现象。目前,重心插值配点法已经被推广到求解 Sine-Gordon 方程^[10]、Burgers 方程^[11-13]、粘弹性波方程^[14]、Allen-Cahn 方程^[15-18]、非线性对流扩散最优控制问题^[19-20]和分数阶电报方程^[21]等。基于前人的工作,本文主要采用 4 阶龙格库塔和重心 Lagrange 插值配点格式相结合的方法求解 NLS 方程,并给出该问题全离散格式的相容性分析。

1 预备知识

给定 $m+1$ 个节点 x_j 和其函数值 $g_j (j=0, 1, \cdots, m)$, 设插值多项式 $p(x)$ 是 $g(x)$ 的近似值,且满足 $p(x_j) = g_j$ 。将 $p(x)$ 改写成 Lagrange 插值多项式,即

$$g(x) \approx p(x) = \sum_{j=0}^m L_j(x) g_j. \quad (4)$$

式(4)中: $L_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数,且 $L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^m (x - x_i) / \prod_{i=0, i \neq j}^m (x_j - x_i)$ 。

为了保证良好的数值稳定性,重心 Lagrange 插值逼近未知函数时使用第 2 类 Chebyshev 节点,即

$$x_j = \cos\left(\frac{j}{m} \pi\right), \quad j=0, 1, \cdots, m. \quad (5)$$

$p(x)$ 在节点 x_j 处的 v 阶导数可以表示为

$$p^{(v)}(x_i) = \frac{d^v p(x_i)}{dx^v} = \sum_{j=0}^m L_j^{(v)}(x_i) p_j = \sum_{j=0}^m D_{i,j}^{(v)} p_j, \quad v = 1, 2, \cdots, m. \quad (6)$$

由文献[22]可知,二阶微分矩阵 $\mathbf{D}^{(2)}$ 的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} D_{i,j}^{(2)} &= L_j''(x_i) = -2 \frac{\omega_j / \omega_i}{t_i - t_j} \left(\sum_{k \neq i} \frac{\omega_k / \omega_i}{t_i - t_k} + \frac{1}{t_i - t_j} \right), \quad j \neq i, \\ D_{i,i}^{(2)} &= - \sum_{j=0, j \neq i}^m D_{i,j}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2 NLS 方程的龙格库塔配点格式

对一维 NLS 方程的半离散格式进行推导,设 $x_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为 Chebyshev 空间节点,时间节点为 $t_k=k\tau,k=0,1,2,\cdots,n,\tau=\frac{T}{n}$ 。

在空间方向上采用重心 Lagrange 插值配点法得到半离散格式,即

$$\mathrm{i}u_t(x_i,t)=-\rho\Big(\sum_{k=0}^mL''_i(x)\Big)u(x_i,t)-v(x_i)u(x_i,t)-\beta\big|u(x_i,t)\big|^2u(x_i,t)。$$

(8)

式(8)的矩阵形式为

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t))_t=-\rho(\boldsymbol{D}^{(2)}\otimes\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)-\boldsymbol{V}\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)-\beta\big|\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)\big|^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)。$$

(9)

式(9)中:符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积; $\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)=[u_0(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)]'$; $\boldsymbol{V}=\text{diag}[v(x_0),v(x_1),\cdots,v(x_m)]$ 。

类似可得二维 NLS 方程的空间半离散格式,即

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t))_t=-\rho(\boldsymbol{C}^{(2)}\otimes\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)+(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{D}^{(2)})\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)-\boldsymbol{V}\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)-\beta\big|\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)\big|^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)。$$

(10)

定义算子 \boldsymbol{A} 为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{i}[\rho(\boldsymbol{C}^{(2)}\otimes\boldsymbol{I}_m)+\rho(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{D}^{(2)})+\boldsymbol{V}+\text{diag}(\beta\big|\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)\big|^2)。$$

(11)

式(10)可改写为

$$(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t))_t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t)。$$

(12)

其次,令 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k=\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}(t_k)$,在时间方向上用 4 阶龙格库塔方法进行离散,得到的全离散格式为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^{k+1}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k+\frac{\tau}{6}(\boldsymbol{k}_1+2\boldsymbol{k}_2+2\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)。$$

(13)

式(13)中: $\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k;\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k+\frac{\boldsymbol{k}_1\tau}{2}\Big);\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k+\frac{\boldsymbol{k}_2\tau}{2}\Big);\boldsymbol{k}_4=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^k+\boldsymbol{k}_3\tau)。$

3 相容性分析

设 $p(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的拉格朗日插值函数,满足 $p(x_i,y_j)=u(x_i,y_j),i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n$ 。定义误差函数为

$$r(x,y)=u(x,y)-p(x,y)。$$

(14)

引理 1^[21] 假设 $u\in C^{m+1}(a,b)$,则有

$$\left\{\begin{array}{l}\|r(x,y)\|_{\infty}\leqslant C_1\|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_x}{2m}\Big)^m+C_2\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_y}{2n}\Big)^n,\\ \|r_{x,x}(x,y)\|_{\infty}\leqslant C_1^{**}\|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\Big)^{m-2}+C_2\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_y}{2n}\Big)^n,\\ \|r_{y,y}(x,y)\|_{\infty}\leqslant C_1\|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_x}{2m}\Big)^m+C_2^{**}\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_y}{2(n-2)}\Big)^{n-2}。$$

式中: $l_x=\frac{b-a}{2};l_y=\frac{d-c}{2}$;e 是自然常数。

基于引理 1,可得定理 1。

定理 1^[23] 若 $u(x,y,t)\in C^{m+1}(\Omega)\times C^2(0,T],\Omega=[a,b]\times[c,d]$,则有

$$\|u(x,y,t)-u(x_i,y_j,t)\|_{\infty}\leqslant C_1^{**}\|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\Big)^{m-2}+C_2^{**}\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_y}{2(n-2)}\Big)^{n-2}。$$

定理 2 为时间方向上基于 4 阶龙格库塔方法的全离散格式相容性分析。

定理 2 若 $u(x,y,t)\in C^{m+1}(\Omega)\times C^2(0,T],\Omega=[a,b]\times[c,d]$,则有

$$\|u(x,y,t)-u(x_i,y_j,t_{k+1})\|_{\infty}\leqslant C\Big(\tau^5+\|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\Big)^{m-2}+\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\|_{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}l_y}{2(n-2)}\Big)^{n-2}\Big)。$$

证明:设 $u(x_i,y_j,t)$ 是 $u(x,y,t)$ 空间方向基于重心插值配点法离散的数值解,则

$$\mathrm{i}u_t(x_i,y_j,t)=-\rho\Delta u(x_i,y_j,t)-v(x_i,y_j)u(x_i,y_j,t)-\beta\big|u(x_i,y_j,t)\big|^2u(x_i,y_j,t)+\gamma_{i,j}。$$

(15)

令 $T_h(x_i, y_j, t) = -\rho \Delta u(x_i, y_j, t) - v(x_i, y_j) u(x_i, y_j, t) - \beta |u(x_i, y_j, t)|^2 u(x_i, y_j, t)$, (16)

则式(15)可简化为

$$iu_t(x_i, y_j, t) = T_h u(x_i, y_j, t) + \gamma_{i,j}.$$
 (17)

式(17)中: $\gamma_{i,j}$ 是空间截断误差。

由定理 1 可知

$$|\gamma_{i,j}| \leq C_1^{**} \|u^{(m+1)}\|_\infty \left(\frac{el_x}{2(m-2)}\right)^{m-2} + C_2^{**} \|u^{(n+1)}\|_\infty \left(\frac{el_y}{2(n-2)}\right)^{n-2}.$$
 (18)

设 $u_h^{k+1} = u(x_i, y_j, t_{k+1})$ 是 $u(x, y, t)$ 时间方向基于 4 阶龙格库塔方法离散的数值解, 则由泰勒展开公式有

$$u_h^{k+1} = u_h^k + \frac{\tau}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \gamma_{i,j} + O(\tau^5).$$
 (19)

式(19)中: $k_1 = T_h u_h^k$; $k_2 = T_h \left(u_h^k + \frac{k_1 \tau}{2}\right)$; $k_3 = T_h \left(u_h^k + \frac{k_2 \tau}{2}\right)$; $k_4 = T_h \left(u_h^k + k_3 \tau\right)$.

证明完毕。

4 数值算例

定义 L^∞ 误差(Err_∞)和 L^2 误差(Err_2)分别为

$$\begin{cases} Err_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq M} |U_{i,j} - u_{i,j}|, \\ Err_2 = h \sqrt{\sum_{i,j=1}^M (U_{i,j} - u_{i,j})^2}. \end{cases}$$

式中: $u_{i,j}$ 表示点 $x_{i,j}$ 处的精确解; $U_{i,j}$ 表示点 $x_{i,j}$ 处的数值解。

算例 1 $\rho = \frac{1}{2}, \beta = -1$, 式(1)的真解为 $u(x, t) = \exp(-\frac{3it}{2}) \cdot \sin x$, 初始条件为 $u(x, 0) = \sin x$, 边界条件为 $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$, 势函数为 $v(x) = -\cos^2 x$.

选取区域 $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, 时间步长 $\tau = 10^{-4}$ 。重心 Lagrange 插值配点格式和 2 阶有限差分格式的 L^∞ 误差和 L^2 误差, 如表 1 所示。表 1 中: M 为节点数。由表 1 可知: 重心 Lagrange 插值配点格式在空间上用较少的点就可以达到更高的精度。

表 1 L^∞ 误差和 L^2 误差($\tau = 10^{-4}$)
Tab.1 L^∞ errors and L^2 errors ($\tau = 10^{-4}$)

重心 Lagrange 插值配点格式			2 阶有限差分格式		
M	Err_∞	Err_2	M	Err_∞	Err_2
4	$8.583\ 5 \times 10^2$	$3.838\ 7 \times 10^2$	16	$6.392\ 6 \times 10^3$	$1.550\ 4 \times 10^3$
6	$9.523\ 4 \times 10^3$	$3.599\ 5 \times 10^3$	32	$1.604\ 3 \times 10^3$	$2.792\ 8 \times 10^4$
8	$2.595\ 5 \times 10^4$	$8.651\ 8 \times 10^5$	64	$4.014\ 7 \times 10^4$	$4.979\ 6 \times 10^5$
10	$4.839\ 7 \times 10^6$	$1.459\ 2 \times 10^6$	128	$1.003\ 9 \times 10^4$	$8.838\ 9 \times 10^6$
12	$7.173\ 8 \times 10^8$	$1.989\ 6 \times 10^8$	256	$2.509\ 9 \times 10^5$	$1.565\ 6 \times 10^6$

重心插值配点格式的误差及时间收敛阶, 如表 2 所示。表 2 中: Rate1, Rate2 分别为 L^∞ 误差收敛阶, L^2 误差收敛阶。由表 2 可知: 龙格库塔配点格式的时间收敛阶是 4 阶。

表 2 重心插值配点格式的误差及时间收敛阶($M=16$, 算例 1)
Tab.2 Errors and time convergence orders of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme ($M=16$, example 1)

τ	Err_∞	Rate1	Err_2	Rate2
1/60	$4.881\ 2 \times 10^9$	—	$1.183\ 9 \times 10^9$	—
1/72	$2.347\ 2 \times 10^9$	4.015 8	$5.692\ 8 \times 10^{10}$	4.015 8
1/84	$1.263\ 9 \times 10^9$	4.015 7	$3.065\ 4 \times 10^{10}$	4.015 7
1/96	$7.391\ 8 \times 10^{10}$	4.017 2	$1.792\ 8 \times 10^{10}$	4.017 2

令 $M=48$, 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解、精确解($M=48$), 如图 1 所示。由图 1 可知: 数

值解图像与精确解图像逼近。

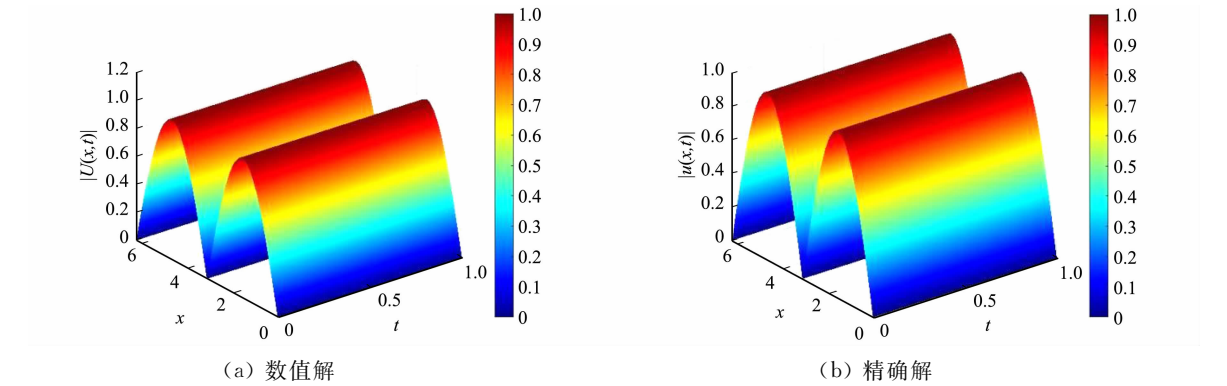


图 1 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解、精确解 ($M=48$)

Fig. 1 Numerical solution and exact solution of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme ($M=48$)

不同数值格式的空间收敛阶,如图 2 所示。由图 2 可知:有限差分格式的收敛阶是 2 阶,而重心 Lagrange 插值配点格式的收敛阶满足指数收敛的性质,明显优于经典的有限差分方法。

重心 Lagrange 插值配点格式对守恒量的保持情况 ($M=48$),如图 3 所示。图 3 中: $M(t), E(t)$ 分别为质量、能量函数。由图 3 可知:龙格库塔配点格式满足质量守恒和能量守恒,与理论相符。

算例 2 考虑一维 NLS 方程,选取 $M=138, \tau=1/40\ 000$,对应的计算区间为 $[-2\pi, 10\pi] \times [0, 5]$ 。 $\rho=1, \beta=2$,选取初始条件为 $u(x, 0)=\text{sech } x \exp(2ix)$,边界条件为 $u(a, t)=u(b, t)=0$,势函数 $v(x)=0$ 。

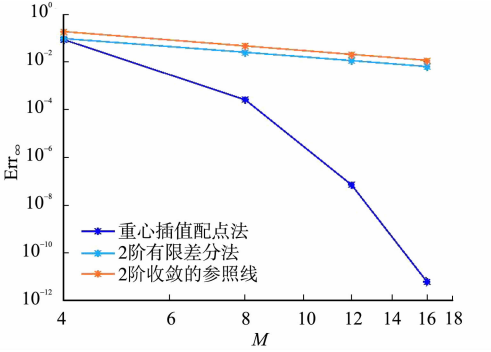


Fig. 2 Spatial convergence orders of different numerical schemes ($M=48$)

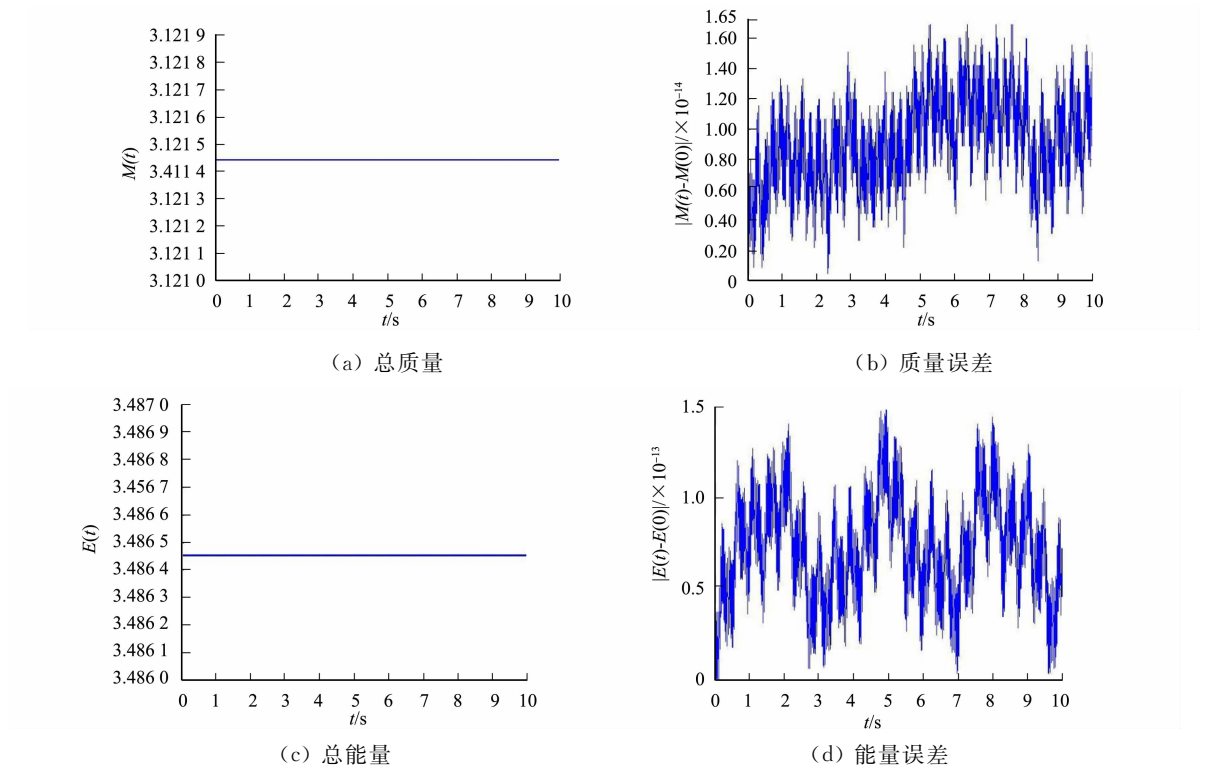


图 3 重心 Lagrange 插值配点格式对守恒量的保持情况 ($M=48$)

Fig. 3 Maintain situation of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme on conserved quantitie ($M=48$)

重心 Lagrange 插值配点格式的孤立波波形, 如图 4 所示。

由图 4 可知: 龙格库塔配点格式的孤立波波形随时间的改变而不断演化, 并且在演化的过程中波形并没有出现丝毫震荡, 模拟结果充分体现出该格式的稳定性。

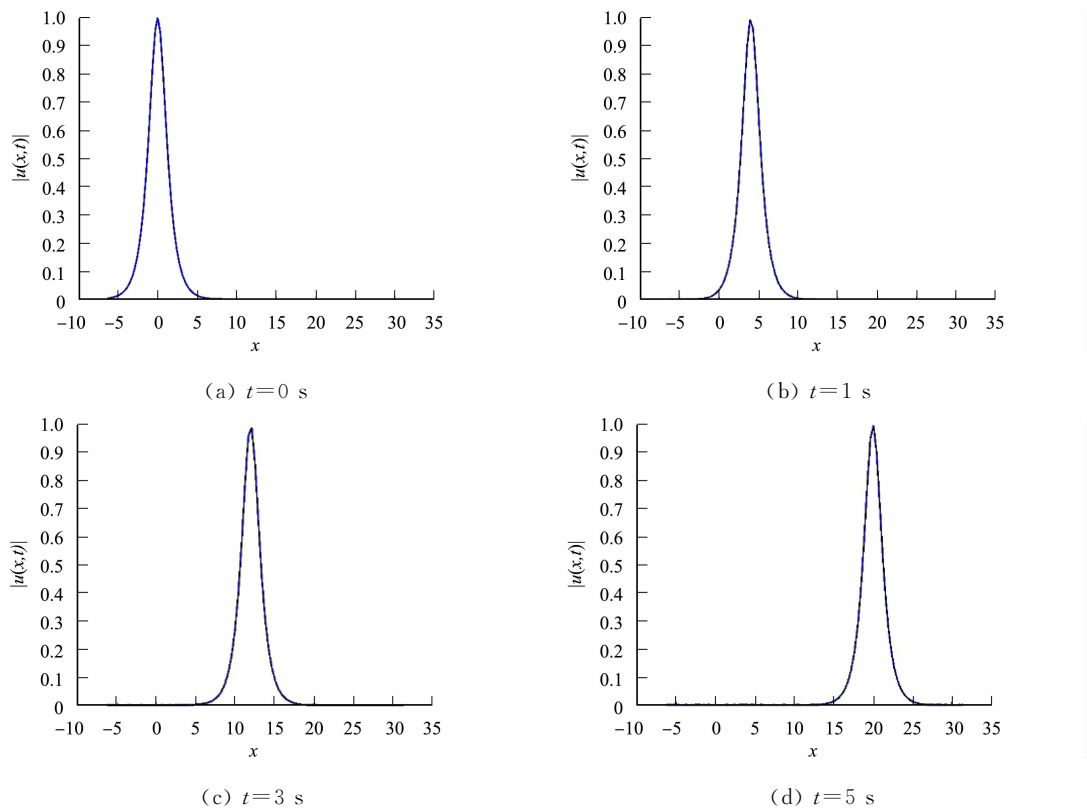


图 4 重心 Lagrange 插值配点格式的孤立波波形

Fig. 4 Initial isolated wave shape of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme

算例 3 考虑如下二维 NLS 方程, 即

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}\Delta u - v(x,y)u - |u|^2u = 0, \\ u(x,y,0) = \sin x \sin y, \\ u(0,y,t) = u(2\pi,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,2\pi,t) = 0. \end{cases}$$

势函数 $v(x,y)=1-\sin^2x\sin^2y$, 真解 $u(x,y,t)=\exp(-2it) \cdot \sin x \sin y$ 。

选取区域 $\Omega \times [0,1], \Omega=[0,2\pi]^2, \tau=10^{-3}$ 。重心插值配点格式和二阶有限差分格式的 L^∞ 误差和 L^2 误差($\tau=10^{-3}$), 如表 3 所示。

由表 3 可知: 重心 Lagrange 插值配点格式在空间上用较少的点就可达到更高的精度, 计算精度明显优于经典的有限差分方法。

表 3 L^∞ 误差和 L^2 误差($\tau=10^{-3}$)
Tab. 3 L^∞ errors and L^2 errors ($\tau=10^{-3}$)

重心 Lagrange 插值配点格式			二阶有限差分格式		
M	Err_∞	Err_2	M	Err_∞	Err_2
6	$8.402\ 4 \times 10^3$	$8.402\ 4 \times 10^3$	10	$2.936\ 7 \times 10^2$	$3.246\ 7 \times 10^2$
8	$2.354\ 7 \times 10^4$	$2.705\ 9 \times 10^4$	20	$8.197\ 6 \times 10^3$	$8.197\ 6 \times 10^3$
10	$1.905\ 9 \times 10^6$	$2.058\ 5 \times 10^6$	40	$2.054\ 5 \times 10^3$	$2.054\ 5 \times 10^3$
12	$4.589\ 3 \times 10^8$	$4.589\ 3 \times 10^8$	60	$9.135\ 2 \times 10^4$	$9.135\ 2 \times 10^4$
16	$3.839\ 8 \times 10^{12}$	$3.959\ 2 \times 10^{12}$	80	$5.139\ 4 \times 10^4$	$5.139\ 4 \times 10^4$

重心插值配点格式的误差及时间收敛阶($M=16$), 如表 4 所示。由表 4 可知: 龙格库塔配点格式的时间收敛阶是 4 阶。

表 4 重心插值配点格式的误差及时间收敛阶($M=16$,算例 3)

Tab. 4 Errors and time convergence orders of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme ($M=16$, example 3)

τ	Err_{∞}	Rate1	Err_2	Rate2
1/128	$9.676\ 4\times10^{10}$	—	$9.977\ 4\times10^{10}$	—
1/140	$6.748\ 0\times10^{10}$	4.022 2	$6.958\ 0\times10^{10}$	4.022 2
1/152	$4.845\ 3\times10^{10}$	4.027 8	$4.996\ 0\times10^{10}$	4.027 8
1/164	$3.565\ 8\times10^{10}$	4.035 4	$3.676\ 7\times10^{10}$	4.035 4

令 $M=N=40$, 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解、精确解 ($M=40$), 如图 5 所示。由图 5 可知: 数值解图像和精确解图像基本吻合。

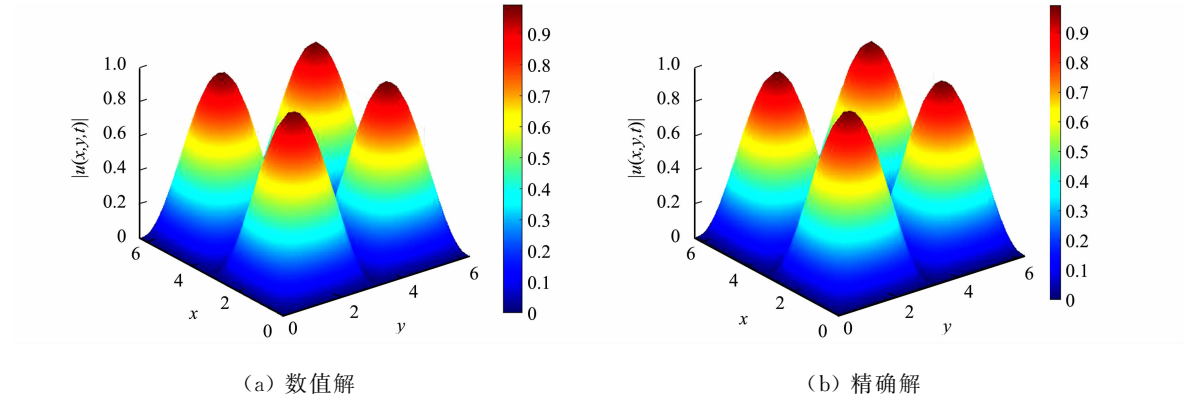


图 5 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解、精确解 ($M=40$)

Fig. 5 Numerical solution and exact solution of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme ($M=40$)

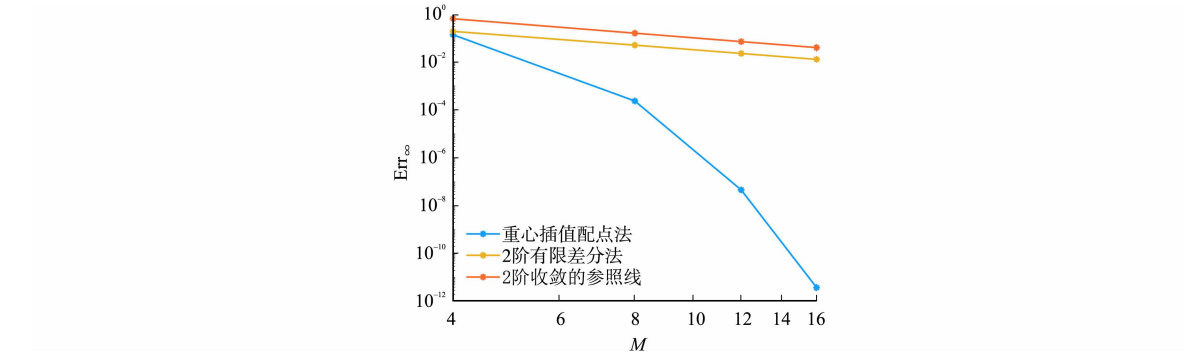
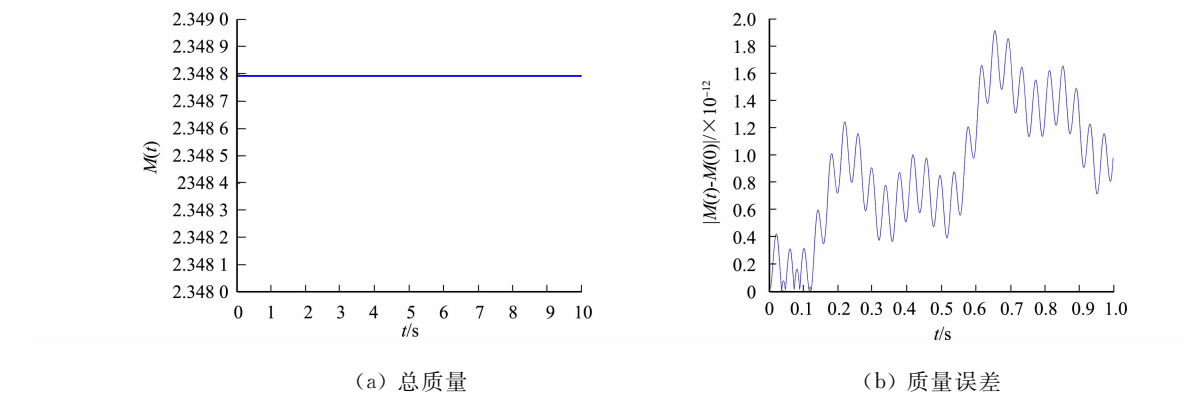


图 6 不同数值格式的空间收敛阶 ($M=40$)

Fig. 6 Spatial convergence orders for different numerical schemes ($M=40$)

重心 Lagrange 插值配点格式对守恒量的保持情况 ($M=40$), 如图 7 所示。



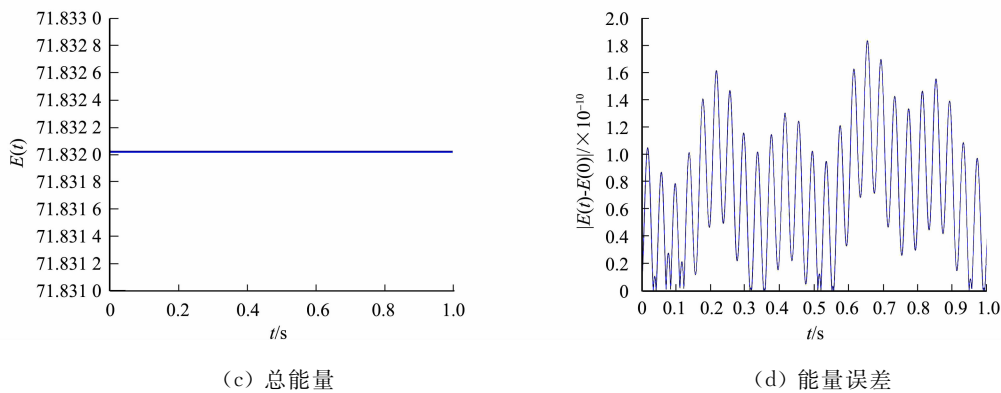


图 7 重心 Lagrange 插值配点格式对守恒量的保持情况($M=40$)

Fig. 7 Maintain situation of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme on conserved quantities($M=40$)

5 结束语

将龙格库塔与重心 Lagrange 插值 Chebyshev 配点法相结合,时间精度可达到 4 阶,空间精度满足指数收敛,给出全离散格式的相容性分析,通过数值算例验证所提格式的高精度和有效性。通过与经典的差分格式进行比较,表明提出的格式可以用较少的点达到较高的精度。该方法可推广到其他非线性微分方程,从而为解决同类问题提供一种高精度数值求解方法。

参考文献:

[1] SCHRÖDINGER E. The present status of quantum mechanics[J]. Die Naturwissenschaften,1935,23:1-26. DOI:10.48550/arXiv.2104.09945.

[2] HU Hanqing,HU Hanzhang. Maximum norm error estimates of fourth-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation involving a quintic term[J]. Journal of Inequalities and Applications,2018,2018(1): 1-15. DOI:10.1186/s13660-018-1775-y.

[3] GUO Feng,DAI Weizhong. A new absorbing layer approach for solving the nonlinear Schrödinger equation[J]. Applied Numerical Mathematics,2023,189:88-106. DOI:10.1016/j.apnum.2023.04.003.

[4] FENG Xiaobing,LI Buyang,MA Shu. High-order mass-and energy-conserving SAV-Gauss collocation finite element methods for the nonlinear Schrödinger equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2021,59:1566-1591. DOI:10.1137/20M1344998.

[5] WANG Junjun,LI Meng,GUO Lijuan. Superconvergence analysis for nonlinear Schrödinger equation with two-grid finite element method[J]. Applied Mathematics Letters,2021,122:107553. DOI:10.1016/j.aml.2021.107553.

[6] FU Yayun,XU Zhuangzhi. Explicit high-order conservative exponential time differencing Runge-Kutta schemes for the two-dimensional nonlinear Schrödinger equation[J]. Computers and Mathematics with Applications,2022,119: 141-148. DOI:10.1016/j.camwa.2022.05.021.

[7] HU Hanzhang,CHEN Yanping. A conservative difference scheme for two dimensional nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2016,32(3):862-876. DOI:10.1002/num.22033.

[8] ZHAI Shuying,WANG Dongling,WENG Zhifeng,et al. Error analysis and numerical simulations of strang splitting method for space fractional nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Scientific Computing,2019,81:965-989. DOI:10.1007/s10915-019-01050-w.

[9] DENG Beichuan,SHEN Jie,ZHUANG Qingqu. Second-order SAV schemes for the nonlinear Schrödinger equation and their error analysis[J]. Journal of Scientific Computing,2021(69):88. DOI:10.1007/s10915-021-01576-y.

[10] LI Jin,QU Jinzheng. Barycentric Lagrange interpolation collocation method for solving the Sine-Gordon equation [J]. Wave Motion,2023,120:103159. DOI:10.1016/j.wavemoti.2023.103159.

[11] HU Yudie,PENG Ao,CHEN Liquan,et al. Analysis of the barycentric interpolation collocation scheme for the Burgers equation[J]. Science Asia,2021,47:758-765. DOI:10.2306/scienceasia1513-1874.2021.081.

[12] 胡玉蝶,彭澳,陈丽权,等. 有限差分-配点法求解二维 Burgers 方程[J]. 纯粹数学与应用数学,2023,39(1):100-112. DOI:10.3969/j.issn.1008-5513.2023.01.008.

[13] 罗诗栋,凌永辉. Rosenau-Burgers 方程的一种高精度有限差分格式[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版),2022,35(4):5-12. DOI:10.16007/j.cnki.issn2095-7122.2022.04.013.

[14] ORUC Ö. Two meshless methods based on local radial basis function and barycentric rational interpolation for solving 2D viscoelastic wave equation[J]. Computational and Applied Mathematics, 2020, 79: 3272-3288. DOI: 10.1016/j.camwa.2020.01.025.

[15] DENG Yangfang, WENG Zhifeng. Barycentric interpolation collocation method based on Crank-Nicolson scheme for the Allen-Cahn equation[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6: 3857-3873. DOI: 10.3934/math.2021229.

[16] DENG Yangfang, WENG Zhifeng. Operator splitting scheme based on barycentric Lagrange interpolation collocation method for the Allen-Cahn equation[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2022, 68(5): 3347-3365. DOI: 10.1007/s12190-021-01666-y.

[17] 黄蓉,邓杨芳,翁智峰. SAV/重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 573-582. DOI: 10.21656/1000-0887.430149.

[18] 黄蓉,翁智峰. 时间分数阶 Allen-Cahn 方程的重心插值配点法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2022, 43(4): 553-560. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202101060.

[19] HUANG Rong, WENG Zhifeng. A numerical method based on barycentric interpolation collocation for nonlinear convection-diffusion optimal control problems[J]. Networks and Heterogeneous Media, 2023, 18(2): 562-580. DOI: 10.3934/nhm.2023024.

[20] 黄蓉,姚梦丽,翁智峰. 对流扩散方程最优控制问题的重心插值配点格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2023, 44(3): 407-416. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202203023.

[21] YI Shichao, YAO Linqun. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher-order time-fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2019(35): 1694-1716. DOI: 10.1002/num.22371.

[22] BERRUT J P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. SIAM Review, 2004, 46: 501-507. DOI: 10.1137/S0036144502417715.

[23] SUN Haoran, HUANG Siyu, ZHOU Mingyang, *et al.* A numerical investigation of nonlinear Schrödinger equation using barycentric interpolation collocation method[J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(1): 361-381. DOI: 10.3934/math.2023017.

(责任编辑：陈志贤 英文审校：黄心中)