第 45 卷　第 3 期
2024 年 5 月

华 侨 大 学 学 报（自 然 科 学 版）
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 45　No. 3
May　2024

DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.202311034

一类具有季节交替的 n 维 Gilpin-Ayala 竞争模型的动力学

陈梅香，谢溪庄

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 研究一类具有季节交替的 n 维 Gilpin-Ayala 竞争模型。利用单调动力系统的理论，当 $n=1$ 时，系统存在着阈值动力学。根据离散竞争映射的负载单形理论，证得 n 维系统存在一个 $(n-1)$ 维的负载单形。结果表明：$(n-1)$ 维的负载单形吸引了系统在 $\mathbf{R}_+^n$ 中的所有非平凡轨道。

关键词： 季节交替；Gilpin-Ayala 竞争模型；周期解；庞加莱映射；负载单形

中图分类号： O 175.13　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2024)03-0417-06

Dynamics of A n-Dimensional Gilpin-Ayala Competition Model With Seasonal Succession

CHEN Meixiang, XIE Xizhuang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A type of n dimensional Gilpin-Ayala competition models with seasonal succession are studied. Using the theory of monotonic dynamical systems, when $n=1$, the system has threshold dynamics. Using the theory of carrying simplex of discrete competitive mappings, the existence of a $(n-1)$ dimensional carrying simplex in the n dimensional system is proved. The result shows that $(n-1)$ dimensional carrying simplex attracts all nontrivial orbits in $\mathbf{R}_+^n$ of the system.

Keywords: seasonal succession; Gilpin-Ayala competition model; periodic solution; Poincaré mapping; carrying simplex

1　预备知识

季节性更替是自然界的普遍现象，深深影响着种群的生存与增长，群落的结构和组成[1]。当气温、降水量、气压、湿度和季风随着季节的更替而变化时，种群和群落处于一个周期性波动的外部环境中[2-3]。Sommer 等[4]利用季节交替模型研究种群动力学[5-7]。在经典的 n 种群 Gilpin-Ayala 竞争模型[8-9]的基础上，利用文献[2,5]中的建模方法，构造具有季节交替的 n 种群 Gilpin-Ayala 竞争模型，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\lambda_i x_i, \qquad m\omega\leqslant t<m\omega+(1-\varphi)\omega, \qquad i=1,2,\cdots,n,\\&\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=r_i x_i\left(1-\left(\frac{x_i}{K_i}\right)^{\theta_i}-\sum_{i\neq j}^{n}a_{i,j}x_j\right), \qquad m\omega+(1-\varphi)\omega\leqslant t<(m+1)\omega,\\&(x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0))=\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}_+^n。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

收稿日期： 2023-11-03

通信作者： 陈梅香(1984-)，女，讲师，博士，主要从事应用与计算数学的研究。E-mail：mxchen@hqu.edu.cn。

基金项目： 国家自然科学基金面上基金资助项目(11871231)；福建省自然科学基金面上基金资助项目(2022J01305)

式(1)中：$x_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$ 表示种群 i 在 t 时刻的密度；$-\lambda_i$ 表示种群 i 在不好的季节的自然增长率；r_i 表示种群 i 在 Good season 的自然增长率；K_i 表示种群 i 的环境容纳量；$a_{i,j}$，$i\neq j$ 表示种群 j 对种群 i 的竞争作用比例参数；$m\in\mathbf{Z}_+$；$\varphi\in[0,1)$；λ_i，r_i，K_i，$a_{i,j}$，ω，θ_i 都是正数。

显然，当 $\varphi=0$ 时，系统(1)是线性系统，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\lambda_i x_i,\qquad i=1,2,\cdots,n,\\&(x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0))=\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}_+^n。\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

当 $\varphi=1$ 时，系统(1)是经典的 n 维 Gilpin-Ayala 竞争模型，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=r_i x_i\left(1-\left(\frac{x_i}{K_i}\right)^{\theta_i}-\sum_{i\neq j}^{n}a_{i,j}x_j\right),\qquad i=1,2,\cdots,n,\\&(x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0))=\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}_+^n。\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由文献[10]可知，系统(1)在$[0,+\infty)$上存在唯一的全局正解 $x(t,\boldsymbol{x}^0)$，又因系统(1)是一个周期系统，所以只需研究系统(1)所诱导的庞加莱映射 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}^0)=x(\omega,\boldsymbol{x}^0)$，$\forall\,\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}_+^n$ 的动力学性态。对于任意的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}_+^n$，记

$$\boldsymbol{L}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\exp(-\lambda_1(1-\varphi)\omega)x_1,\exp(-\lambda_2(1-\varphi)\omega)x_2,\cdots,\exp(-\lambda_n(1-\varphi)\omega)x_n)。$$

并记$\{\boldsymbol{Q}_t\}_{t\geqslant 0}$是系统(3)的解半流，则有

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{Q}(\varphi\omega,\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^0),\qquad\forall\,\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}_+^n,$$

简记 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}\circ\boldsymbol{L}$。

2　基本定义和引理

$\mathbf{R}_+^n:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:x_i\geqslant 0,\forall\,i\in\mathbf{N}\}$，令 $\boldsymbol{X}\subset\mathbf{R}_+^n$，称映射 $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ 为系统(1)诱导的庞加莱映射。$\gamma(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{S}^n(\boldsymbol{x}),n\in\mathbf{Z}_+\}$表示 $\boldsymbol{S}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的轨道。对于集合 $\boldsymbol{V}\subset\boldsymbol{X}$，如果 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}\subset\boldsymbol{V}$，称 $\boldsymbol{V}$ 是正不变的；如果 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$，称 $\boldsymbol{V}$ 是不变的。如果 $\boldsymbol{S}$ 是可微映射，$D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$表示 $\boldsymbol{S}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的雅可比矩阵。对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 中所有的元素都是非负的，记 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$；如果 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素都是正的，记 $\boldsymbol{A}\gg 0$。对于非空集合 $\Phi\neq I\subset\mathbf{N}$，记 $\boldsymbol{H}_I:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:x_j=0,j\notin I\}$，$\boldsymbol{H}_I^+=\mathbf{R}_+^n\cap\boldsymbol{H}_I$，$\dot{\boldsymbol{H}}_I^+:=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{H}_I^+:x_i>0,i\in I\}$。对任意两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，如果 $x_i\leqslant y_i$，$\forall\,i\in\mathbf{N}$，称 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$；如果 $x_i<y_i$，$\forall\,i\in\mathbf{N}$，称 $\boldsymbol{x}\ll\boldsymbol{y}$。如果 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，记 $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$。对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}_+^n$，如果 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})$，那么 $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$，称 $\boldsymbol{S}$ 是 $\mathbf{R}_+^n$ 上的一个竞争映射；同时，如果 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})$，那么 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$，称 $\boldsymbol{S}$ 是 $\mathbf{R}_+^n$ 上的一个强竞争映射。

定义 1　若集合 $\Sigma\subset\mathbf{R}_+^n\backslash\{0\}$满足[11]

P1) Σ 是紧的，不变的且无序的；

P2) Σ 通过径向投影同胚于一个$(n-1)$维的标准单形 $\Delta^{n-1}:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n\mid\Sigma_i x_i=1\}$；

P3) 对于任意点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n\backslash\{0\}$，必存在点 $\boldsymbol{y}\in\Sigma$，使$\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{S}^n\boldsymbol{x}-\boldsymbol{S}^n\boldsymbol{y}|=0$。

那么，称 Σ 是映射 $\boldsymbol{S}$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 中的负载单形。

引理 1[12]　假设 $\boldsymbol{V}=[0,b]_{\mathbf{R}_+^n}$，其中，$b\in\mathbf{R}_+^n$ 且 $b\gg 0$，$[0,b]_{\mathbf{R}_+^n}$ 为闭序凸集，映射 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ 满足

i) $\boldsymbol{f}$ 是强单调且严格次齐性的；

ii) $\boldsymbol{f}$ 是渐近光滑且 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 中的每条正轨道是有界的；

iii) $\boldsymbol{f}(0)=0$ 且 $D\boldsymbol{f}(0)$是紧性的且强正的。

那么，

a) 若 $r(D\boldsymbol{f}(0))\leqslant 1$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的每条正轨道都收敛到 0；

b) 若 $r(D\boldsymbol{f}(0))>1$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 中存在唯一一个正不动点 $\boldsymbol{u}^*$，使得 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{V}\backslash\{0\}$中的每条正轨道都收敛到 $\boldsymbol{u}^*$。

引理 2[13]　假设 $\boldsymbol{S}$ 是 $\mathbf{R}_+^n$ 到 $\mathbf{R}_+^n$ 的一个映射，且满足

H1) $\boldsymbol{S}$ 是 $\mathbf{R}_+^n\to\mathbf{R}_+^n$ 上的 $\boldsymbol{C}^1$ 微分同胚；

H2) 对于非空集合 $I\subset\mathbf{N}$，$\boldsymbol{H}_I$，$\boldsymbol{H}_I^+$，$\dot{\boldsymbol{H}}_I^+$ 在映射 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}$下都是正不变的；

H3）对于非空集合 $I\subset\mathbf{N}$，雅可比矩阵 $D(\boldsymbol{S}|_{\boldsymbol{H}_I^+})(\boldsymbol{x})^{-1}=(D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})^{-1})_I\gg 0$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in\dot{\boldsymbol{H}}_I^+$，其中 $\boldsymbol{S}|_{\boldsymbol{H}_I^+}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 约束在 $\boldsymbol{H}_I^+$ 上的映射；

H4）如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n$ 且 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$，那么 $[0,\boldsymbol{y}]\subset\boldsymbol{S}[0,\boldsymbol{x}]$；

H5）$\boldsymbol{S}|_{\boldsymbol{H}_{\{i\}}^+}$ 有唯一一个正不动点 $u_i>0$，而且满足 $0<\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}(\boldsymbol{S}|_{\boldsymbol{H}_{\{i\}}^+})(u_i)<1$，$\forall\,i\in\mathbf{N}$；

H6）对于非空集合 $I\subseteq J\subseteq\mathbf{N}$ 且 $\boldsymbol{x}\in\dot{\boldsymbol{H}}_I^+$，$\boldsymbol{y}\in\dot{\boldsymbol{H}}_J^+$。如果 $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{x}<\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{y}$，$\forall\,i\in I$，那么 $\dfrac{T_i\boldsymbol{x}}{T_i\boldsymbol{y}}>\dfrac{x_i}{y_i}$，$\forall\,i\in I$。

那么，$\boldsymbol{S}$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 中存在一个 $(n-1)$ 维的负载单形，其吸引了 $\boldsymbol{S}$ 在 $\mathbf{R}_+^n\setminus\{0\}$ 中的所有轨道。

3　负载单形的存在性及其证明

考虑具有季节交替的单种群 Gilpin-Ayala 模型，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\lambda x,\qquad m\omega\leqslant t<m\omega+(1-\varphi)\omega,\\&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\left(\frac{x}{K}\right)^{\theta}\right),\qquad m\omega+(1-\varphi)\omega\leqslant t<(m+1)\omega,\\&x(0)=x_0\in\mathbf{R}_+。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

根据引理 1，可以获得定理 1。

定理 1（阈值动力学）　令 $x(t,x_0)$ 是系统(4)的唯一解，则有

1）若 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)\leqslant 0$，则有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,x_0)=0$，$\forall\,x_0\in\mathbf{R}_+$；

2）若 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)>0$，则系统(4)存在唯一的一个正周期解 $x^*(t)$，$\lim\limits_{t\to\infty}(x(t,x_0)-x^*(t))=0$，$\forall\,x_0\in\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$。

证明：对任意点 $y_0\in\mathbf{R}_+$，令 $y(t,y_0)$ 为如下方程的解，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ry\left(1-\left(\frac{y}{K}\right)^{\theta}\right):=f(y),\\&y(0,y_0)=y_0\in\mathbf{R}_+。\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

系统(4)的解为

$$\begin{cases}x(t,x_0)=\exp(-\lambda t)x(m\omega,x_0),\qquad t\in[m\omega,m\omega+(1-\varphi)\omega],\\x(t,x_0)=y(t-(m\omega+(1-\varphi)\omega),x(m\omega+(1-\varphi)\omega,x_0)),\quad t\in[m\omega+(1-\varphi)\omega,(m+1)\omega]。\end{cases}$$

定义系统(4)所诱导的庞加莱映射为

$$S(x_0)\triangleq x(\omega,x_0)=y(\varphi\omega,\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)x_0)。$$

记 $\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)x_0:=y_0$，可得 $S(x_0)=y(\varphi\omega,y_0)$。显然，系统(5)的解 $y(t,y_0)$ 关于初值 y_0 在 $\mathbf{R}_+$ 上是单调增加的。取 $t=\varphi\omega$，可知 $y(\varphi\omega,y_0)$ 关于 y_0 在 $\mathbf{R}_+$ 上也是单调增加的，从而 S 是 $\mathbf{R}_+$ 上的单调映射。

对任意的 $\alpha\in(0,1)$ 和 $x_0>0$，都有 $S(\alpha x_0)>\alpha S(x_0)$ 成立。为此，只需证 $y(\varphi\omega,\alpha y_0)>\alpha y(\varphi\omega,y_0)$ 对任意的 $y_0>0$ 都是成立的。由于

$$f(\alpha y)=r\alpha y\left(1-\left(\frac{\alpha y}{K}\right)^{\theta}\right)>r\alpha y\left(1-\left(\frac{y}{K}\right)^{\theta}\right)=\alpha f(y),\qquad\forall\,y>0,\quad\alpha\in(0,1),$$

对于任意的 $y>0$，$f(y)$ 是严格次齐性的。记 $U(t)=\alpha y(t,y_0)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha y(t,y_0)}{\mathrm{d}t}=\alpha\,\frac{\mathrm{d}y(t,y_0)}{\mathrm{d}t}=\alpha f(y(t,y_0))<f(\alpha y(t,y_0))=f(U(t))。$$

又因为 $\dfrac{\mathrm{d}y(t,\alpha y_0)}{\mathrm{d}t}=f(y(t,\alpha y_0))$ 且 $U(0)=\alpha y_0=y(0,\alpha y_0)$，根据比较原理可得 $U(t)<y(t,\alpha y_0)$，$\forall\,t>0$，即 $\alpha y(t,y_0)<y(t,\alpha y_0)$。取 $t=\varphi\omega$，便有 $\alpha y(\varphi\omega,y_0)<y(\varphi\omega,\alpha y_0)$，从而 $S(\alpha x_0)>\alpha S(x_0)$，$\forall\,x_0>0$，$\alpha\in(0,1)$，进而说明 S 是严格次齐性的。

注意到 $S(x_0)=Q(\varphi\omega,Lx_0)=y(\varphi\omega,\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)x_0)$，所以 $S(0)=0$，而且 $S(x)$ 关于 x 在 $\mathbf{R}_+$

上单调增加。令 $z(t,y)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ry\left(1-\left(\frac{y}{K}\right)^{\theta}\right)=f(y)$ 以 $y\in\mathbf{R}_{+}$ 为初值的解，则有

$$\frac{\mathrm{d}z(t,y)}{\mathrm{d}t}=rz(t,y)\left(1-\left(\frac{z(t,y)}{K}\right)^{\theta}\right)=f(z(t,y))。$$

又令 $\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}=M(t)$，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}。$$

化简可得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}M(t),\\ M(0)=1。\end{cases}$$

求解可得

$$M(t)=\exp\left(\int_{0}^{t}\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}\mathrm{d}t\right)。$$

当 $t=\varphi\omega$ 时，可知

$$M(\varphi\omega)=\exp\left(\int_{0}^{\varphi\omega}\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}\mathrm{d}t\right)。$$

因此有

$$S'(0)=\left.\frac{\partial z(\varphi\omega,y)}{\partial y}\right|_{x=0}\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)=M(\varphi\omega)\big|_{y=0}\cdot\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)。$$

又因为 $\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}=r-(1+\theta)\frac{r}{K^{\theta}}z^{\theta}(t,y)$ 且 $z(t,0)=0$，所以 $\left.\frac{\partial f(z(t,y))}{\partial z}\right|_{y=0}=r$，从而有

$$S'(0)=\exp\left(\int_{0}^{\varphi\omega}r\mathrm{d}t\right)\exp(-\lambda(1-\varphi)\omega)=\exp((r\varphi-\lambda(1-\varphi))\omega).$$

显然，当 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)\leqslant0$ 时，有 $S'(0)\leqslant1$；当 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)>0$ 时，有 $S'(0)>1$。另外，由系统(4)的方程和 S 的表达式，不难看出映射 S 是渐近光滑且在 $\mathbf{R}_{+}$ 中的每条正轨道是有界的。最后，根据引理1，定理1得证。

根据引理2，系统(1)负载单形的存在性的证明，如定理2所示。

定理 2 假设 $r_i\varphi-\lambda_i(1-\varphi)>0, i=1,2,\cdots,n$，令 $\boldsymbol{S}:\mathbf{R}_{+}^{n}\to\mathbf{R}_{+}^{n}$ 是由系统(1)诱导的庞加莱映射，那么，系统(1)存在一个负载单形，其吸引了 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 中的每一条非平凡轨道。

证明：由 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}\circ\boldsymbol{L}$ 且系统(3)的解流 $\{\boldsymbol{Q}_t\}_{t\geqslant0}$ 是 $\mathbf{R}_{+}^{n}\to\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上的 $\boldsymbol{C}^1$ 微分同胚，可知 $\boldsymbol{S}$ 也是 $\mathbf{R}_{+}^{n}\to\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上的 $\boldsymbol{C}^1$ 微分同胚，从而条件 H1)成立。

由于系统(2)，(3)都是 Kolmogorov 自治系统且 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}(\boldsymbol{Lx})$，所以 $\boldsymbol{S}$ 在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 中关于所有坐标轴和坐标面都是正不变的，即有 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 在 $\boldsymbol{H}_I,\boldsymbol{H}_I^{+},\dot{\boldsymbol{H}}_I^{+}$ 上都是正不变的，进而条件 H2)成立。

令 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(F_1,F_2,\cdots,F_n)^{\mathrm{T}}$，其中，

$$F_i=r_ix_i\left(1-\left(\frac{x_i}{K_i}\right)^{\theta_i}-\sum_{i\neq j}^{n}a_{i,j}x_j\right), i=1,2,\cdots,n。$$

记

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{Q}_t(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x}):=D_x\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})=D_x\boldsymbol{Q}_t(\boldsymbol{x})。$$

那么有

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}(\boldsymbol{Lx})=\boldsymbol{u}(\varphi\omega,\boldsymbol{Lx}),$$

从而有

$$D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=D(\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}(\boldsymbol{Lx}))\cdot D(\boldsymbol{Lx})=\boldsymbol{V}(\varphi\omega,\boldsymbol{Lx})\times$$
$$\operatorname{diag}(\exp(-\lambda_1(1-\varphi)\omega),\exp(-\lambda_2(1-\varphi)\omega),\cdots,\exp(-\lambda_n(1-\varphi)\omega))。$$

因为 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\boldsymbol{V}(t),\qquad \boldsymbol{V}(0)=\boldsymbol{I}。$$

对应的共轭方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t)}{\mathrm{d}t}=-(D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}(t),\qquad \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{I}。$$

上式中：$\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{V}(t)^{\mathrm{T}})^{-1}$。

又因为 $-(D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}}$ 是合作且不可约的，根据文献[14-15]，可得 $\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{V}(t)^{T})^{-1}\gg 0,\forall t>0$，即 $(\boldsymbol{V}(t))^{-1}\gg 0,\forall t>0$。取 $t=\varphi\omega$，可知

$$(D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}))^{-1}=(D\boldsymbol{Q}_{\varphi\omega}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}))^{-1}=(\boldsymbol{V}(\varphi\omega))^{-1}\gg 0。$$

对于 $\boldsymbol{x}\in\dot{\boldsymbol{H}}_l^{+}$，根据不变性可得 $(D(\boldsymbol{S}|_{\boldsymbol{H}_l^+}))(\boldsymbol{x})^{-1}\gg 0$。因此，条件 H3)成立。根据文献[16]可知，只要条件 H1)～H3)成立，条件 H4)便自动成立。再由定理 1，条件 H5)成立。

将系统(3)简记为 $\dot{x}_i=x_if_i(\boldsymbol{x}),i=1,2,\cdots,n$，其中，

$$f_i(\boldsymbol{x})=r_i-r_i\left(\frac{x_i}{K_i}\right)^{\theta_i}-\sum_{i\neq j}^{n}r_ia_{i,j}x_j。$$

令 $W(t)=\dfrac{u_i(t,\boldsymbol{Lx})}{u_i(t,\boldsymbol{Ly})}$，因为 $Q_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}),t\in[0,\varphi\omega]$，可得

$$\dot{\boldsymbol{u}}_i(t,\boldsymbol{Lx})=u_i(t,\boldsymbol{Lx})f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Lx})),\qquad i=1,2,\cdots,n,\quad t\in[0,\varphi\omega]。$$

从而有

$$\begin{aligned}\dot{W}(t)=&\frac{\dot{u}_i(t,\boldsymbol{Lx})u_i(t,\boldsymbol{Ly})-u_i(t,\boldsymbol{Lx})\dot{u}_i(t,\boldsymbol{Ly})}{(u_i(t,\boldsymbol{Ly}))^2}=\\&\frac{u_i(t,\boldsymbol{Lx})f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Lx}))u_i(t,\boldsymbol{Ly})-u_i(t,\boldsymbol{Lx})u_i(t,\boldsymbol{Ly})f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Ly}))}{(u_i(t,\boldsymbol{Ly}))^2}=\\&\frac{u_i(t,\boldsymbol{Lx})(f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Lx}))-f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Ly})))}{u_i(t,\boldsymbol{Ly})}=\\&W(t)(f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Lx}))-f_i(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Ly})))=\\&W(t)\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\lambda(s))(u_j(t,\boldsymbol{Lx})-u_j(t,\boldsymbol{Ly}))\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

上式中：$\lambda(s)=s\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Lx})+(1-s)\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Ly}),s\in[0,1]$。

又由系统(3)易知 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}<0$，如果 $S_i\boldsymbol{x}<S_i\boldsymbol{y}$，那么有

$$u_i(t,\boldsymbol{Lx})<u_i(t,\boldsymbol{Ly}),t\in[0,\varphi\omega],i=1,2,\cdots,n。$$

从而 $\dot{W}(t)>0$，即 $W(\varphi\omega)>W(0)$，因此，

$$\begin{cases}\dfrac{u_i(\varphi\omega,\boldsymbol{Lx})}{u_i(\varphi\omega,\boldsymbol{Ly})}>\dfrac{u_i(0,\boldsymbol{Lx})}{u_i(0,\boldsymbol{Ly})}=\dfrac{(\boldsymbol{Lx})_i}{(\boldsymbol{Ly})_i}=\dfrac{\exp(-\lambda_i(1-\varphi)\omega)x_i}{\exp(-\lambda_i(1-\varphi)\omega)y_i}=\dfrac{x_i}{y_i}.\\[2ex]\dfrac{S_i\boldsymbol{x}}{S_i\boldsymbol{y}}>\dfrac{x_i}{y_i}。\end{cases}$$

条件 H6)成立。证明完毕。

4　结论

1) 当 $n=1$ 时，系统(1)存在阈值动力学，即当 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)\leqslant 0$ 时，不管种群的初始数量处于什么水平，种群都将走向灭绝；当 $r\varphi-\lambda(1-\varphi)>0$ 时，系统(1)存在唯一的正周期解，使种群的初始数量为非零值时，最终都将收敛到这个正周期解。

2) 当 $n\geqslant 2$ 时，系统(1)必将存在一个 $(n-1)$ 维的有界不变闭曲面(负载单形)，其吸引了系统(1)的所有非平凡轨道。

参考文献：

[1]　WHITE E R，HASTINGS A. Seasonality in ecology：Progress and prospects in theory [J]. Ecological Complexity，2020，44：100867. DOI：10.1016/j.ecocom.2020.100867.

[2] KLAUSMEIER C A. Successional state dynamics: A novel approach to modeling nonequilibrium foodweb dynamics [J]. Journal of Theoretical Biology, 2010, 262: 584-595. DOI: 10.1016/j.jtbi.2009.10.018.

[3] KREMER C T, KLAUSMEIER C A. Coexistence in a variable environment: Eco-evolutionary perspectives[J]. Journal of Theoretical Biology, 2013, 339: 14-25. DOI: 10.1016/j.jtbi.2013.05.005.

[4] SOMMER U, GLIWICZ Z M, LAMPERT W, *et al*. The PEG-model of seasonal succession of planktonic events in fresh waters[J]. Archiv für Hydrobiologie, 1986, 106: 433-471.

[5] HSU S B, ZHAO Xiaoqiang. A Lotka-Volterra competition model with seasonal succession[J]. Journal of Mathematical Biology, 2012, 64: 109-130. DOI: 10.1007/s00285-011-0408-6.

[6] FENG Xiaomei, LIU Yunfeng, RUAN Shigui, *et al*. Periodic dynamics of a single species model with seasonal Michaelis-Menten type harvesting[J]. Journal of Differential Equations, 2023, 354: 237-263. DOI: 10.1016/j.jde.2023.01.014.

[7] PU Liqiong, LIN Zhigui, LOU Yuan. A west nile virus nonlocal model with free boundaries and seasonal succession [J]. Journal of Mathematical Biology, 2023, 86: 25. DOI: 10.1007/s00285-022-01860-x.

[8] GILPIN M, AYALA F. Global models of growth and competition[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1973, 70: 3590-3593. DOI: 10.1073/pnas.70.12.3590.

[9] GILPIN M, AYALA F. Schoener's model and drosophila competition[J]. Theoretical Population Biology, 1976, 9(1): 12-14. DOI: 10.1016/0040-5809(76)90031-9.

[10] GOH B S, AGNEW T T. Stability in Gilpin and Ayala's models of competition[J]. Journal of Mathematical Biology, 1977, 4: 275-279. DOI: 10.1007/BF00280977.

[11] WANG Yi, JIANG Jifa. Uniqueness and attractivity of the carrying simplex for discrete-time competitive dynamical systems[J]. Journal of Differential Equations, 2002, 186: 611-632. DOI: 10.1016/S0022-0396(02)00025-6.

[12] ZHAO Xiaoqiang. Dynamical systems in population biology[M]. 2nd. New York: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-56433-3.

[13] DIEKMANN O, WANG Yi, YAN Ping. Carrying simplices in discrete competitive systems and age-structured semelparous populations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2008, 20: 37-52. DOI: 10.3934/dcds.2008.20.37.

[14] NIU Lin, WANG Yi, XIE Xizhuang. Carrying simplex in the Lotka-Volterra competition model with seasonal succession with applications[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2021, 26(4): 2161-2172. DOI: 10.3934/dcdsb.2021014.

[15] SMITH H L. Periodic solutions of periodic competitive and cooperative systems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1986, 17: 1289-1318. DOI: 10.1137/0517091.

[16] JIANG Jifa, MIERCZYSKI J, WANG Yi. Smoothness of the carrying simplex for discrete-time competitive dynamical systems: A characterization of neat embedding[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246: 1623-1672. DOI: 10.1016/j.jde.2008.10.008.

(**责任编辑:** 陈志贤　　**英文审校:** 黄心中)