第 44 卷　第 6 期　　　　华侨大学学报(自然科学版)　　　　Vol. 44　No. 6
2023 年 11 月　　　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　　　Nov.　2023

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202308007

向量值全纯映射 Schwarz 引理的刚性

林雄，李锦成，王建飞

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 借助 Schwarz 引理，给出单位圆盘上全纯自映射的 Schwarz 引理刚性结果。作为应用，得到了单位圆盘到 $\mathbf{C}^n$ 中单位球上的向量值全纯映射的刚性，丰富了 Schwarz 引理的研究。

关键词： 多复变；全纯映射；Schwarz 引理；刚性

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2023)06-0777-04

Rigidity of Schwarz Lemma for Vector-Valued Holomorphic Mappings

LIN Xiong, LI Jincheng, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By using Schwarz lemma, rigidity result of Schwarz lemma for the holomorphic self-map of the unit disk is given. As an application, the rigidity of the vector valued holomorphic mapping from the unit disk to the unit ball of $\mathbf{C}^n$ is proved, which enriches the study of Schwarz lemma.

Keywords: several complex variables; holomorphic mapping; Schwarz lemma; rigidity

1　预备知识

记 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘，即 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$，n 维复欧氏空间 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球记为

$$B_n=\{\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\|\boldsymbol{z}\|<1\}。$$

式中：$\|\boldsymbol{z}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}z_j\,\overline{z}_j}$，$\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^n$。

注意到 $n=1$ 时，$B_1=D$。记 $S^n=\partial B_n$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球面。单位多圆柱记为

$$D^n=\underbrace{D\times D\times\cdots\times D}_{n\text{个}}。$$

当 $n\geqslant 2$ 时，B_n 与 D^n 不是双全纯等价的[1-2]。

Schwarz 引理是复分析的重要定理(Schwarz 引理给出全纯映射的一个重要基本性质)，也是复分析和复几何研究的一个重要工具。文献[3-15]对 Schwarz 引理进行了推广及应用。引理 1 为经典的 Schwarz 引理。

引理 1[3]　设 $f:D\to D$ 是全纯映射，$f(0)=0$，则在单位圆盘 D 内恒有 $|f(z)|\leqslant|z|$，$|f'(0)|\leqslant 1$。$|f'(0)|=1$ 或 $|f(z_0)|=|z_0|$ 在某个点 $z_0\in D\backslash\{0\}$ 处成立，当且仅当 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z(|z|<1)$。其中，$\theta$ 为实常数。

收稿日期： 2023-08-07

通信作者： 李锦成(1974-)，男，讲师，主要从事复分析的研究。E-mail:hquljc@hqu.edu.cn。

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12071161)

特别地,若 $f'(0)=1$,则在 D 内,$f(z)\equiv z$。

一般地,如果把引理 1 中的 $f(0)=0$ 这个条件去掉,则有 Schwarz-Pick 引理(引理 2)。

引理 2[13]　设 $f:D\to D$ 是全纯映射,则有

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2},\qquad |z|<1。$$

特别地,$|f'(0)|\leqslant 1-|f(0)|^2$。

如果 $f'(0)=1$,那么有 $1\leqslant 1-|f(0)|^2\Rightarrow f(0)=0$。

由经典的 Schwarz 引理可知,在 D 内,$f(z)\equiv z$。设 $f:D\to D$ 是全纯映射,且存在一点 $a\in D$,使得 $f'(a)=\dfrac{1}{1-|a|^2}$,那么有

$$f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\qquad |z|<1。$$

基于此,本文给出了更一般的向量值全纯映射的刚性结果。

2　单位圆盘 D 上的 Schwarz 引理的刚性

定理 1　设 $f:D\to D$ 是全纯映射,若存在一点 $a\in D$,使得 $f'(a)=\dfrac{1}{1-|a|^2}$,那么,对于任意一点 $z\in D$,有

$$f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}。$$

证明:证明分两种情况。

情况 1　若 $a=0$,则 $f'(0)=1$。由 Schwarz-Pick 引理,$1=|f'(0)|\leqslant 1-|f(0)|^2$,从而 $f(0)=0$。再由经典的 Schwarz 引理,有 $f(z)=z\ (|z|<1)$。结论得证。

情况 2　若 $a\in D\backslash\{0\}$,令 $g(z)=-f(\varphi_a(z))$,其中,$\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}\in \mathrm{Aut}(D)$,则由 g 的定义易知,g 是 D 上的全纯自映射,且有

$$g'(0)=-f'(a)\varphi'_a(0)=-\frac{1}{1-|a|^2}(-1+|a|^2)=1。$$

由情况 1 的结论,对于任意一点 $\omega\in D$,有 $g(\omega)\equiv\omega$,即 $f(\varphi_a(\omega))=-\omega$。记 $z=\varphi_a(\omega)$,则有

$$f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\qquad |z|<1。$$

3　向量值 Schwarz 引理的刚性

引理 3[14]　如果 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 是全纯映射,$\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)$,则对于任意一点 $z\in D$,有

$$\|\boldsymbol{f}(z)\|\leqslant|z|。$$

证明:任意取定一点 $z\in D$,则对于满足 $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{0}$ 的点 z,有 $0=\|\boldsymbol{f}(z)\|\leqslant|z|$,结论成立。对于 $\boldsymbol{f}(z)\neq\boldsymbol{0}$ 的点 z,则取定 $\boldsymbol{\xi}=\dfrac{\boldsymbol{f}(z)}{\|\boldsymbol{f}(z)\|}\in S^n$,$\lambda(\omega)=\langle\boldsymbol{f}(\omega),\boldsymbol{\xi}\rangle(\omega\in D)$,那么 λ 是 D 上的全纯自映射,且有 $\lambda(0)=0$。

由经典的 Schwarz 引理,对任意一点 $\omega\in D$,有 $|\lambda(\omega)|\leqslant|\omega|$,即 $|\langle\boldsymbol{f}(\omega),\boldsymbol{\xi}\rangle|\leqslant|\omega|$。取 $\omega=z$,则 $\|\boldsymbol{f}(z)\|\leqslant|z|$。

引理 4[4]　若 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 是全纯映射,则有

$$\|\boldsymbol{f}'(0)\|\leqslant\sqrt{1-\|\boldsymbol{f}(0)\|^2}。$$

定理 2　设 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 是全纯映射,若 $\boldsymbol{f}'(0)=\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)$,则对任意一点 $z\in D$,有

$$\boldsymbol{f}(z)=(z,0,\cdots,0)。$$

证明:记 $\boldsymbol{f}(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$,$z\in D$。由于 $\boldsymbol{f}'(0)=\boldsymbol{e}_1$,从而有

$$\begin{cases} f'_1(0)=1, \\ f'_j(0)=0, \qquad j=2,3,\cdots,n。\end{cases}$$

又显然，f_1 是 D 上的全纯自映射。那么由定理 1，有 $f_1(z)=z\ (z\in D)$。

由引理 4 知，$1=\|\boldsymbol{f}'(0)\|\leqslant\sqrt{1-\|\boldsymbol{f}(0)\|^2}$，从而 $\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{0}$。

由引理 3，对于任意一点 $z\in D$，有 $\|\boldsymbol{f}(z)\|\leqslant|z|$，即

$$\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|^2\leqslant|z|^2。$$

又因为 $f_1(z)=z$，所以有

$$|z|^2+\sum_{j=2}^{n}|f_j(z)|^2\leqslant|z|^2。$$

那么，$f_j(z)=0$，$j=2,3,\cdots,n$，$\boldsymbol{f}(z)=(z,0,\cdots,0)$，$z\in D$。

推论 1　设 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 全纯，若存在 $\boldsymbol{\alpha}\in S^n$，使得 $\boldsymbol{f}'(0)=\boldsymbol{\alpha}$，则存在 n 阶酉方阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{f}(z)=(z,0,\cdots,0)\boldsymbol{U}$，$z\in D$。

证明：取 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}_1$，使 $\boldsymbol{\alpha U}_1=\boldsymbol{e}_1$。令 $\boldsymbol{g}(z)=\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{U}_1(z\in D)$，则有 $\boldsymbol{g}'(0)=\boldsymbol{f}'(0)\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{e}_1$。应用定理 2，得 $\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{g}(z)=(z,0,\cdots,0)$，即 $\boldsymbol{f}(z)=(z,0,\cdots,0)\overline{\boldsymbol{U}_1}'$，$z\in D$。取 $\boldsymbol{U}=\overline{\boldsymbol{U}_1}'$，$\overline{\boldsymbol{U}_1}'$ 为 $\boldsymbol{U}_1$ 的共轭转置。结论成立。

定理 2 对于取值在单位多圆柱 $D^n(n\geqslant 2)$ 上的全纯映射族是不成立的。反例如下。

假设 $\boldsymbol{f}(z)=(z,z^2,\cdots,z^n)$，$z\in D$。显然，$\boldsymbol{f}:D\to D^n$ 是全纯映射，且 $\boldsymbol{f}'(0)=\boldsymbol{e}_1$。但是，$\boldsymbol{f}(z)\equiv(z,0,\cdots,0)$，$z\in D$。

定理 2 类似于定理 1 的特殊情况。要想推出类似定理 1 的一般刚性结果，需要讨论 D 到 B_n 的全纯映射族 $H(D,B_n)$ 的类似 Schwarz-Pick 引理结论(引理 5，引理 4 的直接推广)。

引理 5　若 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 是全纯映射，则对于任意一点 $a\in D$，有

$$\|\boldsymbol{f}'(a)\|\leqslant\frac{\sqrt{1-\|\boldsymbol{f}(a)\|^2}}{1-|a|^2}。$$

证明：任意取定一点 $a\in D$，令 $\boldsymbol{g}(z)=\boldsymbol{f}(\varphi_a(z))\ (z\in D)$，则 $\boldsymbol{g}:D\to B_n$ 是全纯映射，且

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{g}(0)\|=\|\boldsymbol{f}(a)\|, \\ \|\boldsymbol{g}'(0)\|=\|\boldsymbol{f}'(a)\|\cdot|\varphi'_a(0)|=\|\boldsymbol{f}'(a)\|\cdot(1-|a|^2)。\end{cases}$$

由引理 4，有

$$\|\boldsymbol{f}'(a)\|\cdot(1-|a|^2)\leqslant\sqrt{1-\|\boldsymbol{f}(a)\|^2},$$

再移项可得结论成立。

由引理 5，推出更一般的刚性结果(定理 3)。

定理 3　设 $\boldsymbol{f}:D\to B_n$ 是全纯映射，若存在一点 $a\in D$，使得 $\boldsymbol{f}'(a)=\dfrac{1}{1-|a|^2}\boldsymbol{e}_1$，则有

$$\boldsymbol{f}(z)=(\frac{z-a}{1-\bar{a}z},0,\cdots,0), \qquad z\in D。$$

证明：根据 a 的选取，分成如下两种情况予以证明。

情况 1　当 $a=0$ 时，由定理 3，结论显然成立。

情况 2　当 $a\in D\backslash\{0\}$ 时，令 $\boldsymbol{g}(\omega)=-\boldsymbol{f}(\varphi_a(\omega))$，$\omega\in D$，则 $\boldsymbol{g}\in H(D,B_n)$ 且有

$$\boldsymbol{g}'(0)=\boldsymbol{e}_1。$$

对 $\boldsymbol{g}$ 应用定理 3，即有

$$\boldsymbol{g}(\omega)=\omega\boldsymbol{e}_1, \qquad \omega\in D。$$

再令 $z=\varphi_a(\omega)$，则有

$$\boldsymbol{f}(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\boldsymbol{e}_1, \qquad z\in D。$$

类似推论 1 的证明，即可得到推论 2。

推论 2 设 $\boldsymbol{f}:D \to B_n$ 是全纯映射,若存在 $a \in D$ 和 $\boldsymbol{\alpha} \in S^n$,使得 $\boldsymbol{f}'(a) = \dfrac{1}{1-|a|^2}\boldsymbol{\alpha}$,则存在一个 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得

$$\boldsymbol{f}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{U}, \qquad z \in D。$$

参考文献:

[1] 史济怀.多复变函数论基础[M].北京:高等教育出版社,2014.

[2] SCHEIDEMANN V. Introduction to complex analysis in several variables[M]. Switzerland:BirkhäUser,2023.

[3] BEARDON F,MINDA D. The hyperbolic metric and geometric function theory[C]// Proceedings of the International Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi:Narosa Publishing House,2007:9-56.

[4] PAVLOVIC M. A Schwarz lemma for the modulus of a vector-valued analytic function[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2011,139(3):969-973. DOI:10.1090/S0002-9939-2010-10578-6.

[5] LIU Yang,DAI Shaoyu. A note on Schwarz lemma for the modulus of holomorphic mappings on D[J]. Acta Mathematica Scientia,2015,35(1):89-94. DOI:10.1016/S0252-9602(14)60141-7.

[6] 徐庆华,刘太顺.关于全纯映照模的 Schwarz 引理一点注记[J].数学年刊 A 辑(中文版),2016,37(2):147-154. DOI:10.16205/j.cnki.cama.2016.0014.

[7] 张宇芳,徐庆华.单位圆盘上全纯映照模的精细 Schwarz 引理[J].数学物理学报,2017,37(1):18-25. DOI:10.3969/j.issn.1003-3998.2017.01.003.

[8] DAI Shaoyu,PAN Yifei. A Schwarz-Pick lemma for the modulus of holomorphic mappings between the unit balls in complex spaces[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2014,60(6):864-874. DOI:10.1080/17476933.2014.981170.

[9] DAVID K. Schwarz lemma for holomorphic mappings in the unit ball[J]. Glasgow Mathematical Journal,2018,60(1):219-224. DOI:10.1017/S0017089517000052.

[10] KNESE G. A Schwarz lemma on the polydisk[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2007,135(9):2759-2768. DOI:10.1090/S0002-9939-07-08766-7.

[11] DAI Shaoyu,PAN Yifei. A Schwarz-Pick lemma for the modulus of holomorphic mappings from the polydisk into the unit ball[J]. Acta Mathematica Scientia,2014,34(6):1775-1780. DOI:10.1016/S0252-9602(14)60122-3.

[12] WANG Jianfei,LIU Yang. The generalized Schwarz-Pick estimates of arbitrary order on the unit polydisk[J]. Complex Analysis and Operator Theory,2013,7(3):519-528. DOI:10.1007/s11785-011-0189-3.

[13] 史济怀,刘太顺.复变函数[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1998.

[14] RUDIN W. Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$[M]. New York:Springer-Verlag,1980.

[15] RUDIN W. Real and complex analysis[M]. Singapore:McGraw-Hill Book Company,1987.

(**责任编辑:** 陈志贤 **英文审校:** 黄心中)