

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202303014



一类具有弱 Allee 效应 离散捕食系统的 1 : 4 共振

杨金玲, 邓圣福

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类具有弱 Allee 效应的离散捕食系统。当参数满足一定条件时,该系统有一个正不动点,其线性算子的特征值为 $\pm i$, 这对应于 1 : 4 共振。利用 Picard 迭代及时间 1 映射,将差分系统转化为常微分方程系统,讨论常微分方程系统退化平衡点附近的性质,得到该差分系统不动点附近的性质,并用数学软件模拟其局部相图。结果表明:随着参数值和扰动的变化,系统会产生稳定的焦点、“方形”异宿环、“叶形”异宿环及 Neimark-Sacker 分支等。

关键词: 离散捕食系统; Allee 效应; 1 : 4 共振; Picard 迭代

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)06-0769-08

1 : 4 Resonance of Discrete Predator-Prey System With Weak Allee Effect

YANG Jinling, DENG Shengfu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Study on a class of discrete predator-prey system with weak Allee effect. If parameters meet certain conditions, the studied system has a positive fixed point and its linear operator has eigenvalues $\pm i$, which corresponds to 1 : 4 resonance. Using Picard iteration and the time-one mapping, this discrete system is transformed into an ordinary differential equation system, and the properties near the degenerate equilibrium of the ordinary differential equation system are discussed, the properties near the fixed point of this discrete system are obtained, and their local phase portraits are simulated by mathematical software. The results show that with the change of parameter values and disturbances, the system can produce stable focal points, “square” heteroclinic cycles, “clover” heteroclinic cycles and Neimark-Sacker bifurcations and so on.

Keywords: discrete predator-prey system; Allee effect; 1 : 4 resonance; Picard iteration

在许多生物数学模型中,捕食者-猎物模型一直是学者们研究的热点之一,它在人口动力学行为中扮演着十分重要的角色。对于离散模型的研究,很多学者做出了重要的贡献。例如, Huang 等^[1]分析具有 Holling IV 函数的非单调功能反应的捕食者-猎物模型的分岔。Zhong 等^[2]研究具有强 Allee 效应^[3]的捕食者-猎物模型,并对不动点附近的拓扑结构进行讨论。Chen 等^[4]研究具有 Allee 效应的捕食系统的动力学问题。Wang 等^[5]讨论 Allee 效应对猎物和捕食者种群的稳定作用。Zhang 等^[6-7]研究具有强 Allee 效应的捕食系统不动点的 1 : 2 共振,还研究具有弱 Allee 效应的捕食系统不动点的 1 : 2 和 1 : 3 共振。更多有关 Allee 效应的研究参见文献[8-14]。

收稿日期: 2023-03-29

通信作者: 邓圣福(1974-),男,教授,博士,主要从事微分方程和动力系统的研究。E-mail: sfdeng@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金面上基金资助项目(12171171);福建省自然科学基金面上基金资助项目(2022J01303)

考虑具有弱 Allee 效应的离散捕食系统^[15],有

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + rx_n(1-x_n)\frac{x_n}{c+x_n} - ax_ny_n, \\ y_{n+1} &= y_n + ay_n(x_n - y_n). \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: x_n, y_n 分别为第 n 代猎物和捕食者的种群密度; r 为猎物的生长速度; a 为捕食者的攻击率; $\frac{x_n}{c+x_n}$ 为弱 Allee 效应函数^[3], c 为 Allee 效应的常数。

由系统(1)可知,该系统有 3 个不动点 $E_0=(0,0), E_1=(1,0), E^*=\left(\frac{r-ac}{a+r}, \frac{r-ac}{a+r}\right)$ 。假设 Allee 效应的常数 c 满足

$$0 < c < \frac{r}{a}, \tag{2}$$

则不动点 E^* 是一个正的不动点。Zhang 等^[7]等研究系统(1)在不动点 E^* 处的 1:2 和 1:3 共振,发现该系统会发生 Neimark-Sacker 分岔、倍周期分岔等,并采用混合控制策略控制 1:2 和 1:3 共振。然而,系统(1)在不动点 E^* 处的 1:4 共振还未被分析。因此,本文对一类具有弱 Allee 效应离散捕食系统的 1:4 共振进行研究。

1 预备知识

考虑不动点为 $x=0$ 的映射,有

$$x \rightarrow F(x) = Ax + f^2(x) + f^3(x) + \cdots + f^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

式(3)中: A 为 Jacobian 矩阵; $f^s(x)$ 是 C^r 光滑的 s 次多项式向量值函数, $f^s(x) = O(|x|^s)$, 即

$$f^s(x) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=s} b_{j_1j_2\cdots j_n}^{(s)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}.$$

考虑近似恒同变换

$$x = H(y) = y + h^s(y), \quad h^s(y) \in H_n^s. \tag{4}$$

式(4)中: H_n^s 为 n 元 n 维 s 次齐次向量多项式组成的空间, $s=2, \cdots, r-1$ 。令

$$G(y) = H^{-1} \circ F \circ H(y),$$

则可以将式(3)化为

$$G(y) = Ay + f^2(y) + \cdots + f^{r-1}(y) + [f^s(y) - (h^s(Ay) - Ah^s(y))] + O(|y|^{s+1}).$$

式中: $|y| \ll 1$ 。

每次变换后,再将 y 换回 x ,最后可以将式(3)化为

$$G(x) = Ax + g^2(x) + \cdots + g^{r-1}(x) + O(|x|^r), \quad g^s(x) \in \mathcal{G}. \tag{5}$$

式(5)中: \mathcal{G} 为 $\mathcal{R}^s := \mathcal{R}(L_A^s)$ 在 H_n^s 中的补空间,算子 L_A^s 的定义为

$$L_A^s: H_n^s \rightarrow H_n^s, \quad L_A^s(h^s(x)) = h^s(Ax) - Ah^s(x), \quad s=2, \cdots, r-1.$$

定义 1^[16] 映射(5)的 j 次截取式($2 \leq j \leq r-1$),即映射(3)的 j 次正规形为

$$Ax + g^2(x) + \cdots + g^j(x).$$

式中: $g^i(x) \in \mathcal{G}^i, i=2, \cdots, j$ 。

系统(1)可以写成一个平面映射,即

$$G_0: (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x + rx(1-x)\frac{x}{c+x} - axy \\ y + ay(x-y) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其 Jacobian 矩阵为

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - ay - \frac{rx(3cx + 2x^2 - 2c - x)}{(c+x)^2} & -ax \\ ay & ax - 2ay + 1 \end{pmatrix}.$$

$J(x, y)$ 的特征方程为

$$p(\lambda)=\lambda^2+Q(x^*,y^*)\lambda+S(x^*,y^*)。$$

式中: $Q(x^*,y^*)=\frac{(r-ac)^2}{r(c+1)}-2;S(x^*,y^*)=1+\frac{(r-ac)^2}{r(c+1)}\left(\frac{a(r-ac)}{a+r}-1\right)。$

对 1 : 4 共振进行研究,对应于不动点 E^* 附近有特征值 $\pm i$,即 $p(\lambda)=\lambda^2+1$,将其与 $p(\lambda)$ 的表达式进行比较,可得 $Q(x^*,y^*)=0,S(x^*,y^*)=1$ 。由此可得

$$c=\frac{2-a}{a(2a-3)},\quad r=\frac{a}{2a-3}。 \tag{7}$$

式中: $\frac{3}{2}<a<2。$

对系统(6)进行线性变换, $\tilde{u}=x-x^*,\tilde{v}=y-y^*$,将不动点 (x^*,y^*) 平移到原点,则系统(6)变为

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{A} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^3c^2+3ac^2r(a+r)-r^3(2c+1)}{r^2(c+1)^2}\tilde{u}^2-a\tilde{u}\tilde{v}-\frac{c^2(a+r)^4}{r^3(c+1)^3}\tilde{u}^3+O(|(\tilde{u},\tilde{v})|^4) \\ a\tilde{u}\tilde{v}-a\tilde{v}^2+O(|(\tilde{u},\tilde{v})|^3) \end{pmatrix}。 \tag{8}$$

其中有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1-\frac{(a^2c+2acr-r^2)(ac-r)}{r(c+1)(a+r)} & \frac{a(ac-r)}{a+r} \\ \frac{a(r-ac)}{a+r} & 1+\frac{a(ac-r)}{a+r} \end{pmatrix}。$$

为研究系统(8)的 1 : 4 共振,取 $a=a_0+\alpha_1,r=r_0+\alpha_2$,其中, $\frac{3}{2}<a_0<2,\alpha_1,\alpha_2$ 为充分小的参数。由式(7),考虑参数情形

$$a=a_0+\alpha_1,\quad c=\frac{2-a_0}{a_0(2a_0-3)},\quad r=\frac{a_0}{2a_0-3}+\alpha_2。 \tag{9}$$

将系统(9)代入系统(8),有

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d_1\tilde{u}+d_2\tilde{v}+d_4\tilde{u}^2-(a_0+\alpha_1)\tilde{u}\tilde{v}+d_5\tilde{u}^3 \\ -d_2\tilde{u}+d_3\tilde{v}+(a_0+\alpha_1)\tilde{u}\tilde{v}-(a_0+\alpha_1)\tilde{v}^2 \end{pmatrix}+O(|(u,v)|^4)。 \tag{10}$$

式(10)中: $d_1=\left(\frac{2}{a_0-1}-\frac{7}{2a_0}\right)\alpha_1+\left(1+\frac{2}{a_0-1}-\frac{15}{2a_0}\right)\alpha_2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^2);d_2=-1-\frac{1}{2a_0}\alpha_1+\frac{3-2a_0}{2a_0}\alpha_2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^2);d_3=-\frac{1}{2a_0}\alpha_1+\frac{3-2a_0}{2a_0}\alpha_2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^2);d_4=\frac{a_0(a_0-3)}{a_0-1}+\frac{3(a_0-2)^2}{(a_0-1)^2}\alpha_1-\frac{(2a_0-3)(9+2a_0(a_0-4))}{(a_0-1)^2}\alpha_2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^2);d_5=-\frac{2a_0^2(a_0-2)^2}{(a_0-1)^2}+\frac{4a_0(3-2a_0)(a_0-2)^2}{(a_0-1)^3}\alpha_1+\frac{2a_0(a_0-2)^2(2a_0-3)(3a_0-5)}{(a_0-1)^3}\alpha_2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^2)。$

令 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{(d_1-d_3)^2}{4d_2^2}} & \frac{d_3-d_1}{2d_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,对系统(10)作可逆线性变换 $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}=\mathbf{T}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,可将其线性部分的

矩阵 Jordan 化,此时,系统(10)变为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_1u+A_2v+\sum_{2\leq k+l\leq 3}f_{k,l}u^kv^l+O(|(u,v)|^4) \\ -A_2u+A_1v+\sum_{k+l=2}h_{k,l}u^kv^l+O(|(u,v)|^3) \end{pmatrix}。 \tag{11}$$

式(11)中: $A_2=-\frac{\alpha_1-3\alpha_2+2a_0(1+\alpha_2)}{2a_0}\sqrt{1-\frac{(a_0-3)^2(\alpha_1+(3-2a_0)\alpha_2)^2}{(a_0-1)^2(\alpha_1-3\alpha_2+2a_0(1+\alpha_2))^2}};f_{1,1}=-a_0+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|);f_{2,0}=\frac{a_0(a_0-3)}{a_0-1}+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|);h_{2,0}=0;h_{0,2}=-a_0+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|);f_{0,2}=-\frac{(a_0-3)^2}{2a_0(a_0-1)^3}\alpha_1^2+\frac{(a_0-3)^2(2a_0-3)}{a_0(a_0-1)^3}\alpha_1\alpha_2-\frac{(9-9a_0+2a_0^2)^2}{2a_0(a_0-1)^3}\alpha_2^2+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|^3);f_{3,0}=-\frac{2a_0^2(a_0-2)^2}{(a_0-1)^2}+O(|(\alpha_1,\alpha_2)|);$

$$h_{1,1} = a_0 + O(|(\alpha_1, \alpha_2)|); A_1 = \frac{(2-a_0)\alpha_1 + (3-2a_0)\alpha_2}{a_0(a_0-1)}; f_{2,1} = \frac{3a_0(a_0-3)(a_0-2)^2}{(a_0-1)^3} \alpha_1 - \frac{3a_0(a_0-3)(2a_0-3)(a_0-2)^2}{(a_0-1)^3} \alpha_2 + O(|(\alpha_1, \alpha_2)|^2); f_{1,2} = -\frac{3(6-5a_0+a_0^2)^2}{2(a_0-1)^4} \alpha_1^2 + \frac{3(2a_0-3)(6-5a_0+a_0^2)^2}{(a_0-1)^4} \alpha_1 \alpha_2 - \frac{3(3-2a_0)^2(a_0-3)^2(a_0-2)^2}{2(a_0-1)^4} \alpha_2^2 + O(|(\alpha_1, \alpha_2)|^3); f_{0,3} = \frac{(a_0-2)^2(a_0-3)^3}{4a_0(a_0-1)^5} \alpha_1^3 - \frac{3(2a_0-3)(a_0-2)^2(a_0-3)^3}{4a_0(a_0-1)^5} \alpha_1^2 \alpha_2 + \frac{3(a_0-3)^3(6-7a_0+2a_0^2)^2}{4a_0(a_0-1)^5} \alpha_1 \alpha_2^2 - \frac{(a_0-2)^2(9-9a_0+2a_0^2)^3}{4a_0(a_0-1)^5} \alpha_2^3 + O(|(\alpha_1, \alpha_2)|^4).$$

令 $z=u+iv$, 它的共轭为 $\bar{z}=u-iv$, 将系统(11)化为复数形式, 即

$$z \mapsto \mu(\alpha)z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} g_{k,l} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4). \tag{12}$$

式(12)中: $\mu(\alpha)=A_1-iA_2; g_{2,0}=\frac{1}{4}(f_{2,0}-if_{1,1}+h_{1,1}-f_{0,2}-ih_{0,2}); g_{1,1}=\frac{1}{2}(f_{2,0}+f_{0,2}+ih_{0,2}); g_{0,2}=\frac{1}{4}(f_{2,0}+if_{1,1}-h_{1,1}-f_{0,2}-ih_{0,2}); g_{3,0}=\frac{1}{8}(f_{3,0}-if_{2,1}-f_{1,2}+if_{0,3}); g_{2,1}=\frac{1}{8}(3f_{3,0}-if_{2,1}+f_{1,2}-3if_{0,3}); g_{1,2}=\frac{1}{8}(3f_{3,0}+if_{2,1}+f_{1,2}+3if_{0,3}); g_{0,3}=\frac{1}{8}(f_{3,0}+if_{2,1}-f_{1,2}-if_{0,3}).$

2 主要结论及证明

定理 1 对充分小的 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, 映射(12)可经光滑可逆变换化为

$$\omega \mapsto \Gamma_\alpha(\omega) = \mu(\alpha)\omega + H_{2,1}(\alpha)\omega^2 \bar{\omega} + H_{0,3}(\alpha)\bar{\omega}^3 + O(|\omega|^4). \tag{13}$$

式(13)中: $H_{2,1}, H_{0,3}$ 为 α 的光滑函数, 且 $\mu(\alpha) = \left(\frac{1}{a_0-1} - \frac{2}{a_0}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1}{a_0-1} - \frac{3}{a_0}\right)\alpha_2 + i\frac{(\alpha_1-3\alpha_2+2a_0(1+\alpha_2))}{2a_0} \sqrt{1 - \frac{(a_0-3)^2(\alpha_1+(3-2a_0)\alpha_2)^2}{(a_0-1)^2(\alpha_1-3\alpha_2+2a_0(1+\alpha_2))^2}}$, 则有

$$\left. \begin{aligned} H_{2,1}(0) &= \frac{a_0^2(-6+5i)-a_0^3(1-2i)(a_0-4-i)}{4(a_0-1)^2}, \\ H_{0,3}(0) &= -\frac{a_0^2(8-i)+a_0^3(a_0-6+i)}{4(a_0-1)^2}. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

证明: 取光滑的多项式变换

$$z = \omega + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} R_{k,l} \omega^k \bar{\omega}^l.$$

根据正规形理论^[16]及计算, 若取

$$R_{2,0} = \frac{g_{2,0}}{\mu(\mu-1)}, \quad R_{1,1} = \frac{g_{1,1}}{\mu(\bar{\mu}-1)}, \quad R_{0,2} = -\frac{g_{0,2}}{\mu-\bar{\mu}^2}, \quad R_{2,1} = 0, \quad R_{0,3} = 0,$$
$$R_{3,0} = \frac{2g_{2,0}^2 + \mu(\mu-1)g_{3,0}}{\mu^2(\mu-1)^2(1+\mu)} + \frac{g_{1,1}\bar{g}_{0,2}}{\mu(\mu-1)(1+\mu)(\mu^2-\bar{\mu})},$$
$$R_{1,2} = \frac{\bar{\mu}^3 g_{1,1}^2 + \mu^3(\mu(\bar{\mu}-1)g_{1,2} + g_{1,1}\bar{g}_{2,0}) - \mu\bar{\mu}(1+\mu^2)g_{1,1}^2}{\mu^2\bar{\mu}(\mu-1)(\bar{\mu}-1)^2(\bar{\mu}+1)(\mu-\bar{\mu}^2)} + \frac{\mu\bar{\mu}(\bar{\mu}-1)(\bar{\mu}^2 g_{1,2} + 2g_{0,2}g_{2,0} - 2\bar{\mu}g_{0,2}\bar{g}_{1,1}) + \mu\bar{\mu}^2 g_{1,1}\bar{g}_{2,0}}{\mu^2\bar{\mu}(\mu-1)(\bar{\mu}-1)^2(\bar{\mu}+1)(\mu-\bar{\mu}^2)} - \frac{\mu^2(2g_{0,2}\bar{g}_{1,1} - \bar{\mu}^3 g_{1,2} + \bar{\mu}^4 g_{1,2} - \bar{\mu}(g_{1,1}^2 + g_{1,2} + 2(g_{2,0} + \bar{g}_{1,1})g_{0,2}))}{\mu^2\bar{\mu}(\mu-1)(\bar{\mu}-1)^2(\bar{\mu}+1)(\mu-\bar{\mu}^2)} - \frac{\mu^2 g_{1,1}\bar{g}_{2,0} + \mu^2\bar{\mu}^2(g_{1,2} + 2g_{0,2}g_{2,0} + g_{1,1}\bar{g}_{2,0})}{\mu^2\bar{\mu}(\mu-1)(\bar{\mu}-1)^2(\bar{\mu}+1)(\mu-\bar{\mu}^2)}.$$

式中: $\mu=\mu(\alpha)$, 可以将映射(12)化为正规形(13)的形式。

$H_{2,1}(0), H_{0,3}(0)$ 是 $H_{2,1}(\alpha), H_{0,3}(\alpha)$ 当参数 α 取 0 时的结果, 证毕。

为了将差分方程转化为微分方程, 用流去近似 $\Gamma_a(\omega)$ 。 $\Gamma_a(\omega)$ 的线性部分为

$$\omega \mapsto \mu(\alpha)\omega.$$

可以将 $\mu(\alpha)$ 写成指数的形式

$$\mu(\alpha) = e^{\lambda(\alpha)} = e^{\varepsilon_1(\alpha) + i\varepsilon_2(\alpha)}.$$

其中: $\varepsilon_1(0)=0, \varepsilon_2(0)=\frac{\pi}{2}, \mu(0)=i$ 。 $\Gamma_a(\omega)$ 的线性部分是对 $\lambda(\alpha)=\varepsilon_1(\alpha)+i\varepsilon_2(\alpha)$ 沿着线性方程 $\dot{\omega}=\lambda(\alpha)\omega$ 轨道的单位-时间的位移。

定理 2 对充分小的 α , 映射(13)的第 4 次迭代可表示为

$$\Gamma_a^4(\omega) = \varphi_a^1\omega + O(|\omega|^4).$$

式中: φ_a^1 为平面系统

$$\dot{\omega} = \sigma(\alpha)\omega + \widetilde{H}_{2,1}(\alpha)\omega^2\overline{\omega} + \widetilde{H}_{0,3}(\alpha)\overline{\omega}^3 \tag{15}$$

的流, $\widetilde{\sigma}, \widetilde{H}_{2,1}, \widetilde{H}_{0,3}$ 为 α 的光滑复值函数且 $\sigma(0)=0$, 有

$$\widetilde{H}_{2,1}(0) = -4iH_{2,1}(0), \quad \widetilde{H}_{0,3}(0) = -4iH_{0,3}(0). \tag{16}$$

证明: $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\mu(0)=i$, 故 $\mu^4(0)=1$, 因此, 在 $\alpha=0$ 附近, 可将 $\mu^4(\alpha)$ 表示为 $\mu^4(\alpha)=e^{\sigma(\alpha)}$, $\sigma(\alpha)$ 为满足 $\sigma(0)=0$ 的光滑复值函数, 而 $\dot{\omega}=\sigma(\alpha)\omega$ 的解为 $\omega(\tau)=e^{\sigma(\alpha)\tau}\omega_0$, 其中, ω_0 为初值。由此得到系统(15)的线性部分。

考虑非线性部分, 对映射(13)进行 4 次迭代, 每一次迭代的形式分别为

$$\begin{aligned} \Gamma_a^1(\omega) &= \mu\omega + H_{2,1}\omega^2\overline{\omega} + H_{0,3}\overline{\omega}^3 + O(|\omega|^4), \\ \Gamma_a^2(\omega) &= \mu^2\omega + \mu(1+\mu\overline{\mu})H_{2,1}\omega^2\overline{\omega} + (\mu+\overline{\mu}^3)H_{0,3}\overline{\omega}^3 + O(|\omega|^4), \\ \Gamma_a^3(\omega) &= \mu^3\omega + \mu^2(1+\mu\overline{\mu}(1+\mu\overline{\mu}))H_{2,1}\omega^2\overline{\omega} + (\mu^2+\mu\overline{\mu}^3+\overline{\mu}^6)H_{0,3}\overline{\omega}^3 + O(|\omega|^4), \\ \Gamma_a^4(\omega) &= \mu^4\omega + \mu^3(1+\mu\overline{\mu})(1+\mu^2\overline{\mu}^2)H_{2,1}\omega^2\overline{\omega} + (\mu+\overline{\mu}^3)(\mu^2+\overline{\mu}^6)H_{0,3}\overline{\omega}^3 + O(|\omega|^4). \end{aligned}$$

对于充分小的 $|\alpha|$, 由 $\mu^4(0)=1$ 可知, 映射 $\Gamma_a(\omega)$ 接近于恒同映射 $\text{id}(\omega)=\omega$, 故可用流的单位-时间位移进行近似。对系统(15)进行 3 次 Picard 迭代, 即

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(\tau) &= \omega^{(2)}(\tau) = e^{\sigma(\alpha)\tau}\omega_0, \\ \omega^{(3)}(\tau) &= e^{\sigma(\alpha)\tau}\omega_0 + \frac{\widetilde{H}_{2,1}(\alpha)e^{\sigma(\alpha)\tau}}{\sigma(\alpha)+\overline{\sigma}(\alpha)}(e^{(\sigma(\alpha)+\overline{\sigma}(\alpha))\tau}-1)\omega_0^2\overline{\omega}_0 + \\ &\quad \frac{\widetilde{H}_{0,3}(\alpha)e^{\sigma(\alpha)\tau}}{3\overline{\sigma}(\alpha)-\sigma(\alpha)}(e^{(3\overline{\sigma}(\alpha)-\sigma(\alpha))\tau}-1)\overline{\omega}_0^3 + O(|\omega_0|^4). \end{aligned}$$

比较 $\omega^{(3)}(1)$ 与 $\Gamma_a^4(\omega_0)$ 中各项系数, 可得式(16), 证毕。

考虑 $\sigma(\alpha)$ 的实部和虚部为新开折参数。假设

$$\sigma(\alpha) = \beta(\alpha) = \beta_1(\alpha) + i\beta_2(\alpha),$$

把 β_1, β_2 作为参数, 其中,

$$\beta_1(\alpha) = 4\varepsilon_1(\alpha) = 4\ln \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad \beta_2(\alpha) = 4\varepsilon_2(\alpha) \pmod{2\pi} = 4\arctan \frac{p_2}{p_1}.$$

式中: p_1, p_2 分别为 $\mu(\alpha)$ 的实部和虚部, 显然,

$$\det\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} = \frac{16}{1-a_0} + \frac{72}{a_0^2} \neq 0.$$

因此, 将 β 作为参数, 则式(15)化为

$$\dot{\omega} = (\beta_1 + i\beta_2)\omega + h_{2,1}(\beta)\omega^2\overline{\omega} + h_{0,3}(\beta)\overline{\omega}^3. \tag{17}$$

式(17)中: $h_{2,1}(\beta) = \widetilde{H}_{2,1}(\alpha(\beta)); h_{0,3}(\beta) = \widetilde{H}_{0,3}(\alpha(\beta)), h_{0,3}(0) = \widetilde{H}_{0,3}(0) \neq 0, \widetilde{H}_{0,3}(0)$ 的定义见式(16)。

对系统(17)进行尺度变换, 令 $\omega = \gamma(\beta)\eta, \gamma(\beta) \in \mathbb{C}^*$, 其中,

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{|h_{0,3}(\beta)|}} \exp\left(i \frac{\arg h_{0,3}(\beta)}{4}\right).$$

系统(17)可化为

$$\dot{\eta}=(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)\eta+A(\beta)\eta^2\bar{\eta}+\bar{\eta}^3,$$

(18)

式(18)中: $A(\beta)=\frac{h_{2,1}(\beta)}{|h_{0,3}(\beta)|}$ 。

最后,对系统(18)作极坐标变换,令 $\eta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= \beta_1\rho+a(\beta)\rho^3+\rho^3\cos 4\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \beta_2+b(\beta)\rho^2-\rho^2\sin 4\varphi. \end{aligned} \right\}$$

(19)

式(19)中: $a(\beta)=\operatorname{Re} A(\beta);b(\beta)=\operatorname{Im} A(\beta)$ 。

由文献[17]中的引理 9.15,类似地,可得定理 3。

定理 3 系统(18)有以下 7 种复杂的分岔曲线。

- 1) 系统(18)始终有平凡平衡点 $E_0(0,0)$,且在 E_0 处发生 Hopf 分岔。此外,当 $\lambda=-\mathrm{i}$ 时,有一个稳定的极限环;当 $\lambda=\mathrm{i}$ 时,极限环消失。
- 2) 系统(18)的非平凡平衡点 $S_k,E_k(k=1,2,3,4)$ 存在切(折)分支,在相应的参数值处,8 个非平凡平衡点出现或消失。
- 3) 非平凡平衡点 S_k,E_k 发生 Hopf 分岔,从非平凡反鞍点 E_k 分支出 4 个“小”极限环。
- 4) 存在“小”同宿回路分支。“小”环由 Hopf 分支产生,由于非平凡鞍点 S_k 的同宿轨道而消失。
- 5) 存在“方形”异宿环。
- 6) 存在“叶形”异宿环。根据鞍点量 $\sigma_0=\operatorname{tr} \Lambda(S_k)$ 的符号,可以确定产生的是稳定或不稳定的“大”极限环。
- 7) “大”极限环的切(折)分支。在两个“大”环处,外面的极限环稳定,且两个极限环碰撞并消失。
- 系统(18)的分支图 1~4^[17],如图 1~4 所示。

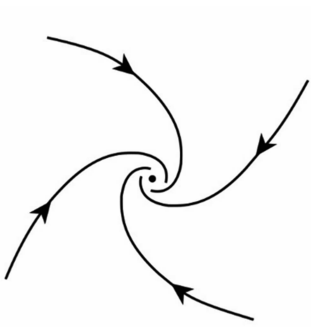


图 1 系统(18)的分支图 1

Fig. 1 Bifurcation diagram 1 of system (18)

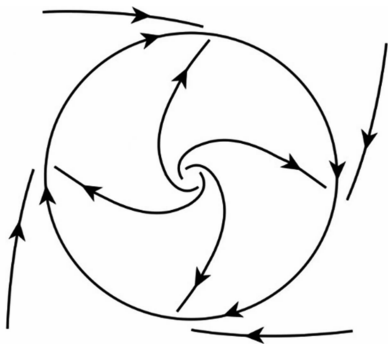


图 2 系统(18)的分支图 2

Fig. 2 Bifurcation diagram 2 of system (18)

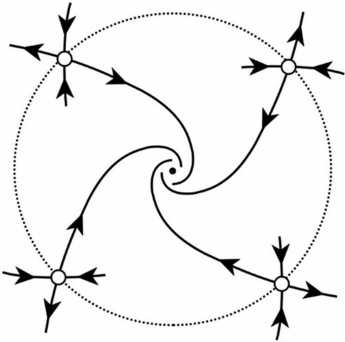


图 3 系统(18)的分支图 3

Fig. 3 Bifurcation diagram 3 of system (18)

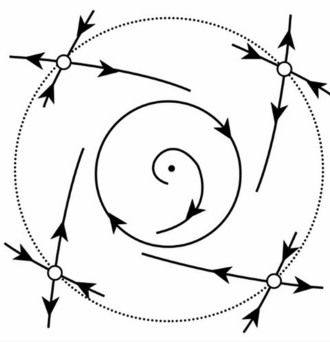


图 4 系统(18)的分支图 4

Fig. 4 Bifurcation diagram 4 of system (18)

根据定理 3,可以得到系统(1)的相关结论。显然,系统(18)的平凡平衡点对应系统(1)的平凡不动点,系统(18)的 4 个非平凡对称平衡点对应系统(1)的单个周期 4 环。系统(18)非平凡平衡点的切分支和 Hopf 分支对应系统(1)非平凡不动点的切分支和 Neimark-Sacker 分支,系统(18)的同宿轨道和异宿

轨道对应系统(1)的异宿结构, 系统(18)的极限环对应系统(1)的不变曲线。

3 数值模拟

对系统(1)的参数进行赋值, 模拟系统(1)的相关性质。系统(1)在 E^* 附近的相图, 如图 5 所示。当 $a_0=1.8, r_0=3, \alpha_1=0.003, \alpha_2=-0.087\ 31, c=0.185\ 185$ 时(条件 1), 系统(1)的不动点 E^* 为稳定的焦点(图 5(a))。当 $a_0=1.63, c=0.873\ 053, r_0=6.269\ 230, \alpha_1=0.012, \alpha_2=0.345$ 时(条件 2), 系统(1)在不动点 E^* 处发生 Neimark-Sacker 分岔, 产生“方形”异宿环(图 5(b))。当 $a_0=1.812, c=0.166\ 27, r_0=2.903\ 85, \alpha_1=0.063, \alpha_2=0.055$ 时(条件 3), 系统(1)在不动点 E^* 处产生了“叶形”异宿环(图 5(c))。当 $a_0=1.99, \alpha_2=-0.01, c=0.005\ 12, r_0=2.020\ 6, \alpha_1=-0.04$ 时(条件 4), 系统(1)的不动点 E^* 为稳定的焦点(图 5(d))。

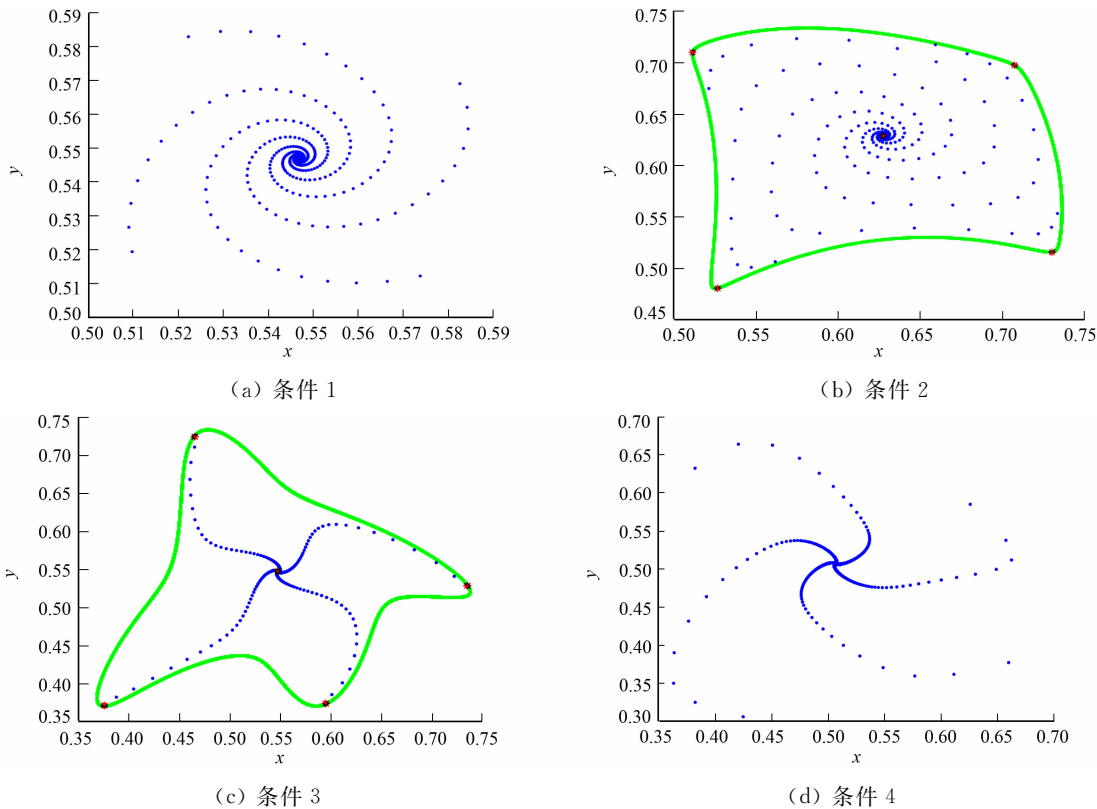


图 5 系统(1)在 E^* 附近的相图

Fig. 5 Phase portraits of system (1) near E^*

4 结束语

研究具有弱 Allee 效应的捕食者-猎物系统, 当参数满足一定条件时, 系统(1)的不动点 E^* 发生 1 : 4 共振。为更方便地研究系统(1)的性质, 首先, 将系统(1)写成一个平面映射, 对映射的线性部分进行 Jordan 化, 再将系统化为复数的形式。然后, 根据正规形理论将其化为正规形, 利用 Picard 迭代及时间 1 映射, 将离散系统化为常微分方程系统。最后, 作尺度变换和极坐标变换, 将常微分方程系统转化为极坐标的形式。通过分析常微分方程退化平衡点附近的性质, 得到离散系统不动点附近的性质。对离散系统进行相应的数值模拟, 结果表明, 随着参数值和扰动的变化系统会产生稳定的焦点、“方形”异宿环、“叶形”异宿环及 Neimark-Sacker 分支等。

参考文献:

[1] HUANG Jicai, LIU Sanhong, RUAN Shigui, *et al.* Bifurcations in a discrete predator-prey model with nonmonotonic functional response[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 464(1): 201-230. DOI: 10.1016/j.

jmaa, 2018, 03, 074.

- [2] ZHONG Jiyu, YU Zhiheng. Qualitative properties and bifurcations of Mistro-Rodrigues-Petrovskii model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(4): 2063-2075. DOI: 10. 1007/s11071-017-3932-0.
- [3] DENNIS B. Allee effects: Population growth, critical density, and the change of extinction[J]. *Nature Resource Modeling*, 1989, 3(4): 481-538. DOI: 10. 1111/j. 1939-7445. 1989. tb00119. x.
- [4] CHEN Xianwei, FU Xiangling, JING Zhujun. Dynamics in a discrete-time predator-prey system with Allee effect[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2013, 29(1): 143-164. DOI: 10. 1007/s10255-013-0207-5.
- [5] WANG Wanxiong, ZHANG Yanbo, LIU Changzhong. Analysis of a discrete-time predator-prey system with Allee effect[J]. *Ecological Complexity*, 2011, 8(1): 81-85. DOI: 10. 1016/j. ecocom. 2010. 04. 005.
- [6] ZHANG Limin, ZHANG Chaofeng, HE Zhirong. Codimension-one and codimension-two bifurcations of a discrete predator-prey system with strong Allee effect[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2019, 162: 155-178. DOI: 10. 1016/j. matcom. 2019. 01. 006.
- [7] ZHANG Limin, XU Yike, LIAO Guangyuan. Codimension-two bifurcations and bifurcation controls in a discrete biological system with weak Allee effect[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2022, 32(3): 1-27. DOI: 10. 1142/S0218127422500365.
- [8] PECORN N. Analysis of 1 : 4 resonance in a monopoly model with memory[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018, 110: 95-104. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2018. 03. 005.
- [9] LI Bo, HE Zhimin. 1 : 2 and 1 : 4 resonances in a two-dimensional discrete Hindmarsh-Rose model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1): 705-720. DOI: 10. 1007/s11071-014-1696-3.
- [10] LUO Guangwei, ZHANG Yanlong, XIE Jianhua, *et al.* Periodic-impact motions and bifurcations of vibro-impact systems near 1 : 4 strong resonance point[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(5): 1002-1014. DOI: 10. 1016/j. cnsns. 2006. 08. 004.
- [11] CHEN Qiaoling, TENG Zhidong, WANG Lei, *et al.* The existence of codimension-two bifurcation in a discrete SIS epidemic model with standard incidence[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 71(1): 55-73. DOI: 10. 1007/s11071-012-0641-6.
- [12] CHAKRABORTY P, SARKAR S, GHOSH U. Stability and bifurcation analysis of a discrete prey-predator model with sigmoid functional response and Allee effect[J]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 2021, 70(1): 253-273. DOI: 10. 1007/s12215-020-00495-5.
- [13] KANGALGIL F, TOPSAKAL N, ÖZTÜRK N. Analyzing bifurcation, stability, and chaos control for a discrete-time prey-predator model with Allee effect[J]. *Turkish Journal of Mathematics*, 2022, 46(6): 2047-2068. DOI: 10. 55730/1300-0098. 3253.
- [14] CHENG Lifang, CAO Hongjun. Bifurcation analysis of a discrete-time ratio-dependent predator-prey model with Allee effect[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 38(1): 288-302. DOI: 10. 1016/j. cnsns. 2016. 02. 038.
- [15] CELIK C, DUMAN O. Allee effect in a discrete-time predator-prey system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 40: 1956-1962. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2007. 09. 077.
- [16] 张芷芬, 李承治, 郑志明, 等. 向量场的分岔理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
- [17] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory[M]. 2 ed. New York: Springer, 1998.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)