

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202210024



非局部 Swift-Hohenberg 方程的 积分因子龙格库塔格式

汪亚楠, 蔡耀雄

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 基于显式稳定性积分因子龙格库塔法和傅里叶谱方法, 提出 4 种快速有效求解非局部 Swift-Hohenberg 方程的数值格式. 通过 4 个数值算例验证格式的收敛性, 并进行长时间动力行为的模拟. 结果表明: 文中算法具有良好的稳定性, 且满足能量递减性质.

关键词: 非局部 Swift-Hohenberg 方程; 积分因子; 龙格库塔; 傅里叶谱方法

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)05-0654-07

Integrating Factor Runge-Kutta Format of Nonlocal Swift-Hohenberg Equation

WANG Yanan, CAI Yaoxiong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Based on the explicit stability integrating factor Runge-Kutta method and Fourier spectral method, four fast and effective numerical formats for solving nonlocal Swift-Hohenberg equations are proposed. Through four numerical examples, the convergence of the formats are verified, and the simulation of long-term dynamic behaviors are also carried out. The results show that the proposed algorithm has good stability and satisfies the property of decreasing energy.

Keywords: nonlocal Swift-Hohenberg equation; integrating factor; Runge-Kutta; Fourier spectral method

Swift-Hohenberg(SH)模型^[1]最初是由 Swift 和 Hohenberg 在研究 Rayleigh-Bénard 对流时引入的, 并且已经成为导致复杂模式形成的非线性动力系统的范例之一, 其研究成果被广泛应用于复杂流体和生物组织^[2-3]. 近年来, 随着流体力学、反应扩散化学和生物学等学科的发展, 非局部 SH 模型的研究吸引了众多学者的关注. Roberts^[4]指出, 将二维局部 SH 模型用作特定物理系统中空间模式演化的可靠模型是不够的, 应使用非局部 SH 模型. 2014 年, Morgan 等^[5]首次提出带有非局部非线性项的 SH 模型, 即

$$u_t = -(\Delta + 1)^2 u + \varepsilon u - uG * u^2, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (1)$$

非局部项 $G * u^2$ 的定义为

$$G * u^2 = \int_{\Omega} G(x - y) u^2(y, t) dy.$$

卷积核 G 满足以下 3 个条件: 1) $G(x) \geq 0$, 对于任意的 $x \in \Omega$; 2) G 是 Ω -周期性; 3) $G(x) = G(|x|)$

收稿日期: 2022-10-29

通信作者: 蔡耀雄(1979-), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解及理论的研究. E-mail: cai_yx@126.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2020J01074)

是一个给定的径向对称函数.

非局部 SH 方程(式(1))可看作能量函数 $E(u)$ 的 L^2 梯度流, 有

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{u}{2} (\Delta + 1)^2 u - \frac{\varepsilon}{2} u^2 \right) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x - y) u^2(x) u^2(y) dx dy, \tag{2}$$

且能量函数关于 t 的导数 $\frac{d}{dt} E(u) \leq 0$, 故能量泛函是非增的.

关于局部 SH 方程的理论和数值研究已有大量的优秀成果^[6-7], 而关于非局部 SH 方程的研究工作还十分有限. 非局部 SH 方程中的非局部和非线性项给研究带来巨大挑战. Firth 等^[8] 提出非线性光学系统的非局部模型. Purwins 等^[9] 提出介质气体放电动力学的非局部模式. Du 等^[10] 提出非局部算子的向量演算. Zhang 等^[11] 提出一个带有拉格朗日乘子的守恒型非局部 SH 方程. Weng 等^[12] 利用傅里叶谱方法求解带有非局部非线性项的 SH 方程.

近年来, 作为求解偏微分方程的有效数值方法, 积分因子龙格库塔法受到广泛关注. Ju 等^[13] 提出关于半线性抛物方程的保极值原理的积分因子龙格库塔方法. Ahmed 等^[14] 提出关于非齐次边界条件系统的高阶积分因子法. Zhang 等^[15] 提出保守 Allen-Cahn 方程的显式三阶保结构格式. Nan 等^[16] 提出求解非局部 Allen-Cahn 方程的高阶极值原理积分因子龙格库塔方法. 基于此, 本文结合积分因子龙格库塔法和谱方法^[17] 对式(1)进行有效求解, 并提出 4 种快速有效求解非局部 Swift-Hohenberg 方程的数值格式.

1 数值格式

给出求解非局部 SH 方程的高效数值格式, 在周期边界条件下考虑时间区域 $(0, T]$, 空间区域 $\Omega = [-a, a]^2$ 上的全离散格式. 给定整数 M 和 N , 时间步长 $\tau = \frac{T}{M}$, 空间步长 $h = \frac{2a}{N}$, 时间节点 $t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, M$, 空间节点 $(x_i, y_j) = (-a + ih, -a + jh), i, j = 0, 1, \dots, N - 1$.

1.1 预备知识

空间区域 $\Omega = [-a, a]^2$ 上的网格剖分为

$$\Omega_h^{\text{per}} = \{ (x_i, y_j) = (-a + ih, -a + jh), 0 \leq i, j \leq N - 1 \}.$$

式中: 定义所有 Ω_h^{per} 的二维周期网络函数为 M_h .

为了求解周期边界条件下的非局部 SH 方程(式(1)), 基于谱方法的相关理论, 采用傅里叶级数逼近 $\{u_{i,j}\}$ 进行空间离散求解.

给定 $u_{i,j} \in M_h$, 则傅里叶变换 $\hat{u} = F_N u$ 及傅里叶逆变换 $u = F_N^{-1} \hat{u}$ 分别定义为

$$F_N[u^k](p, q) := \hat{u}_{p,q}^k = \frac{h^2}{C_p^{\text{per}} C_q^{\text{per}}} \frac{1}{(2a)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j}^k \exp\left(-i \frac{2p\pi(x_i + a)}{2a} - i \frac{2q\pi(y_j + a)}{2a}\right), \tag{3}$$

$$F_N^{-1}[\hat{u}^k](i, j) := u_{i,j}^k = \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{q=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{u}_{p,q} \exp\left(i \frac{2p\pi(x_i + a)}{2a} + i \frac{2q\pi(y_j + a)}{2a}\right). \tag{4}$$

式(3)~(4)中: $C_r^{\text{per}} = \begin{cases} 2, & |r| = N/2, r = p, q \\ 1, & |r| < N/2, r = p, q. \end{cases}$

引理 1^[12] 对于任意的网络函数 $u \in M_h$, 扩散算子 $(\Delta + 1)^2 u$ 及非局部卷积算子 $G * u$ 的谱离散形式分别为

$$\begin{aligned} F_N[(\Delta + 1)^2 u](p, q) &= \lambda_{p,q}^{\Delta} \hat{u}_{p,q}, \\ F_N[G * u](p, q) &= \lambda_{p,q}^G \hat{u}_{p,q}. \end{aligned}$$

式中: $\lambda_{p,q}^{\Delta} = \left(1 - \left(\frac{p\pi}{a}\right) - \left(\frac{q\pi}{a}\right)\right)^2$; $\lambda_{p,q}^G = h^2 \hat{G}_{p,q}$.

1.2 显式稳定性积分因子龙格库塔求解非局部 SH 方程

相较于传统的强稳定性龙格库塔方法, 强稳定性积分因子龙格库塔可避免线性算子的时间步长限制, 但由于非线性算子带来的时间步长限制, 需要引入一种无时间步长限制的保界格式.

显式稳定性积分因子龙格库塔法(eSIFRK)^[13,18-19]是一种显性格式且保极值原理的离散方法,其时间步长的约束仅取决于非线性项,故时间步长大小的选择与空间网格大小无关.

采用显式稳定性积分因子龙格库塔法,分别建立求解式(1)的一步一阶、二步二阶、三步三阶、四步四阶的无时间步长限制的保界格式.

积分因子(IF)法^[20]的步骤如下.

首先,将式(1)改写为

$$u_t = Lu + f(u). \tag{5}$$

式中: $Lu = -(\Delta + 1)^2 u$; $f(u) = \epsilon u - uG * u^2$.

其次,引入新变量 v , 定义为

$$v = e^{-L\tau} u. \tag{6}$$

式(6)中: $e^{-L\tau}$ 为积分因子.

然后,式(5)两边同时乘以 $e^{-L\tau}$, 可得

$$e^{-L\tau} u_t - Le^{-L\tau} u = e^{-L\tau} f(u). \tag{7}$$

注意到 $v_t = e^{-L\tau} u_t - Le^{-L\tau} u$, 则式(7)可简化为

$$v_t = e^{-L\tau} f(e^{L\tau} v). \tag{8}$$

根据文献[13], 可得式(8)的 s 步稳定性积分因子龙格库塔格式为

$$u^{(0)} = u^n, \tag{9}$$

$$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \exp((c_i - c_k)\tau L) [\alpha_{i,k} u^{(k)} + \tau \beta_{i,k} f(u^k)], \quad 1 \leq i \leq s, \tag{10}$$

$$u^{n+1} = u^{(s)}. \tag{11}$$

给定 $s = 1, 2, 3, 4$, 可得一步一阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式 eSIFRK(1,1)为

$$u^{n+1} = e^{\tau L} [u^n + \tau f(u^n)].$$

二步二阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式 eSIFRK(2,2)为

$$u^{(1)} = e^{L\tau} u^n + \tau e^{L\tau} f(u^n),$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} e^{L\tau} u^n + \frac{1}{2} [u^{(1)} + \tau f(u^{(1)})].$$

三步三阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式 eSIFRK(3,3)为

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} e^{\frac{2\tau}{3}L} u^n + \frac{1}{2} e^{\frac{2\tau}{3}L} [u^n + \frac{4\tau}{3} f(u^n)],$$

$$u^{(2)} = \frac{2}{3} e^{\frac{2\tau}{3}L} u^n + \frac{1}{3} [u^{(1)} + \frac{4\tau}{3} f(u^{(1)})],$$

$$u^{n+1} = \frac{59}{128} e^{\tau L} u^n + \frac{15}{128} e^{\tau L} [u^n + \frac{4\tau}{3} f(u^n)] + \frac{27}{64} e^{\frac{\tau}{3}L} [u^{(2)} + \frac{4\tau}{3} f(u^{(2)})].$$

四步四阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式 eSIFRK(4,4)为

$$u^{(1)} = e^{\frac{\tau}{2}L} [u^n + \frac{\tau}{2} f(u^n)],$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{2}L} [u^n - \frac{\tau}{2} f(u^n)] + \frac{1}{2} [u^{(1)} + \tau f(u^{(1)})],$$

$$u^{(3)} = \frac{1}{9} e^{\tau L} [u^n - \tau f(u^n)] + \frac{2}{9} e^{\frac{\tau}{2}L} [u^{(1)} - \frac{3\tau}{2} f(u^{(1)})] + \frac{2}{3} e^{\frac{\tau}{2}L} [u^{(2)} + \frac{3\tau}{2} f(u^{(2)})],$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3} e^{\frac{\tau}{2}L} [u^{(1)} + \frac{\tau}{2} f(u^{(1)})] + \frac{1}{3} e^{\frac{\tau}{2}L} u^{(2)} + \frac{1}{3} [u^{(3)} + \frac{\tau}{2} f(u^{(3)})].$$

2 数值算例

通过 4 个数值算例研究文中方法的精度和效率,包括收敛性和能量递减. 在数值算例中,核函数为

$$G(x,y) = \frac{4}{\pi \delta^4} \exp(-\frac{|x|^2 + |y|^2}{\delta^2}).$$

数值解的 L^2 范数误差 $\text{Err}_{L^2}(\tau, h)$ 为

$$\text{Err}_{L^2}(\tau, h) = \sqrt{\sum_{i,j=0}^{N-1} h^2 |u_{i,j}^M - u_{i,j}^{2M}|^2},$$

数值解的最大误差 $\text{Err}_{\max}(\tau, h)$ 为

$$\text{Err}_{\max}(\tau, h) = \max_{0 \leq i,j \leq N-1} \{|u_{i,j}^M - u_{i,j}^{2M}|\}.$$

式中: $\{u_{i,j}^M\}$ 表示空间剖分为 N , 时间剖分为 M 时, 对应位置上的数值解; $\{u_{i,j}^{2M}\}$ 表示空间剖分为 N , 时间剖分为 $2M$ 时, 对应位置上的数值解.

2.1 算例 1

为了验证时间收敛阶, 算例 1 的空间区域 $\Omega = [-20, 20]^2$, 初始值为

$$u_0(x, y) = 0.01 \times (\cos \pi x + \cos \pi y + 2 \cos 0.25 \pi y).$$

设置系数 $\epsilon = 0.125, \delta = 0.5, h = \frac{5}{16}, T = 1$, 不同时间步长下的时间误差和时间收敛阶, 如表 1 所示.

表 1 中: R_1, R_2 分别为 $\text{Err}_{\max}, \text{Err}_{L^2}$ 的时间收敛阶.

由表 1 可知: 时间收敛阶都达到了预期精度.

表 1 不同时间步长下的时间误差和时间收敛阶 ($\epsilon = 0.125, \delta = 0.5, T = 1, h = \frac{5}{16}$)

Tab. 1 Time errors and time convergence rates at different time steps ($\epsilon = 0.125, \delta = 0.5, T = 1, h = \frac{5}{16}$)

eSIFRK	M	Err_{\max}	R_1	Err_{L^2}	R_2
eSIFRK(1,1)	100	1.0968×10^{-6}	—	6.9369×10^{-6}	—
	200	5.0516×10^{-7}	1.1185	3.1949×10^{-6}	1.1185
	400	2.4103×10^{-7}	1.0675	1.5244×10^{-6}	1.0675
	800	1.1758×10^{-7}	1.0356	7.436×10^{-7}	1.0356
eSIFRK(2,2)	100	1.8139×10^{-7}	—	1.1472×10^{-6}	—
	200	4.7026×10^{-8}	1.9476	2.9742×10^{-7}	1.9476
	400	1.1868×10^{-8}	1.9864	7.5059×10^{-8}	1.9864
	800	2.9742×10^{-9}	1.9965	1.8810×10^{-8}	1.9965
eSIFRK(3,3)	100	1.8449×10^{-8}	—	1.1668×10^{-7}	—
	200	2.3722×10^{-9}	2.9592	1.5003×10^{-8}	2.9592
	400	2.9658×10^{-10}	2.9997	1.8757×10^{-9}	2.9997
	800	3.6936×10^{-11}	3.0053	2.3360×10^{-10}	3.0053
eSIFRK(4,4)	100	2.2327×10^{-9}	—	1.4121×10^{-8}	—
	200	1.4745×10^{-10}	3.9205	9.3256×10^{-10}	3.9205
	400	9.3252×10^{-12}	3.9830	5.8977×10^{-11}	3.9830
	800	5.8238×10^{-13}	4.0011	3.6829×10^{-12}	4.0012

2.2 算例 2

算例 2 考虑带有随机初始扰动的非局部 SH 方程, 其空间区域 $\Omega = [-64, 64]^2$, 初始值为

$$u_0(x, y) = 0.07 + 0.001 \times \text{rand}(x, y).$$

式中: $\text{rand}(x, y)$ 表示取值在 $[-1, 1]$ 的随机数.

设置系数 $\epsilon = 0.035, \delta = 0.5$, 固定空间步长 $h = 1$, 时间步长 $\tau = 1$.

采用四步四阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式可得不同时刻数值解图像和能量图 ($T = 2\,000$), 如图 1 所示. 由图 1 可知: 能量是递减的.

2.3 算例 3

为了研究数值解与能量的变化, 算例 3 空间区域 $\Omega = [-64, 64]^2$, 初始值为

$$u_0 = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设置系数 $\epsilon = 0.035, \delta = 0.5$, 固定空间步长 $h = 1$, 时间步长 $\tau = 0.1$.

采用四步四阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式可得不同时刻数值解图像及能量图 ($T = 1\,000$),

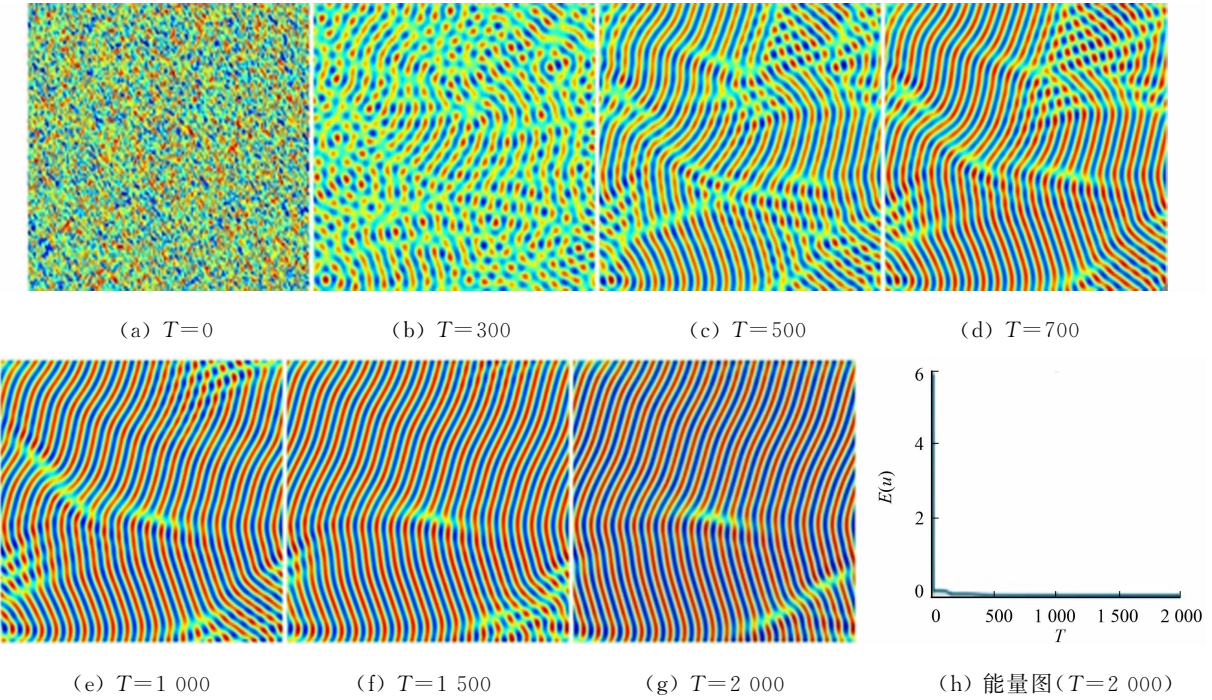


图 1 算例 2 不同时刻的数值解图像和能量图

Fig. 1 Numerical solution images and energy map at different times of example 2

如图 2 所示.由图 2 可知:能量是递减的.

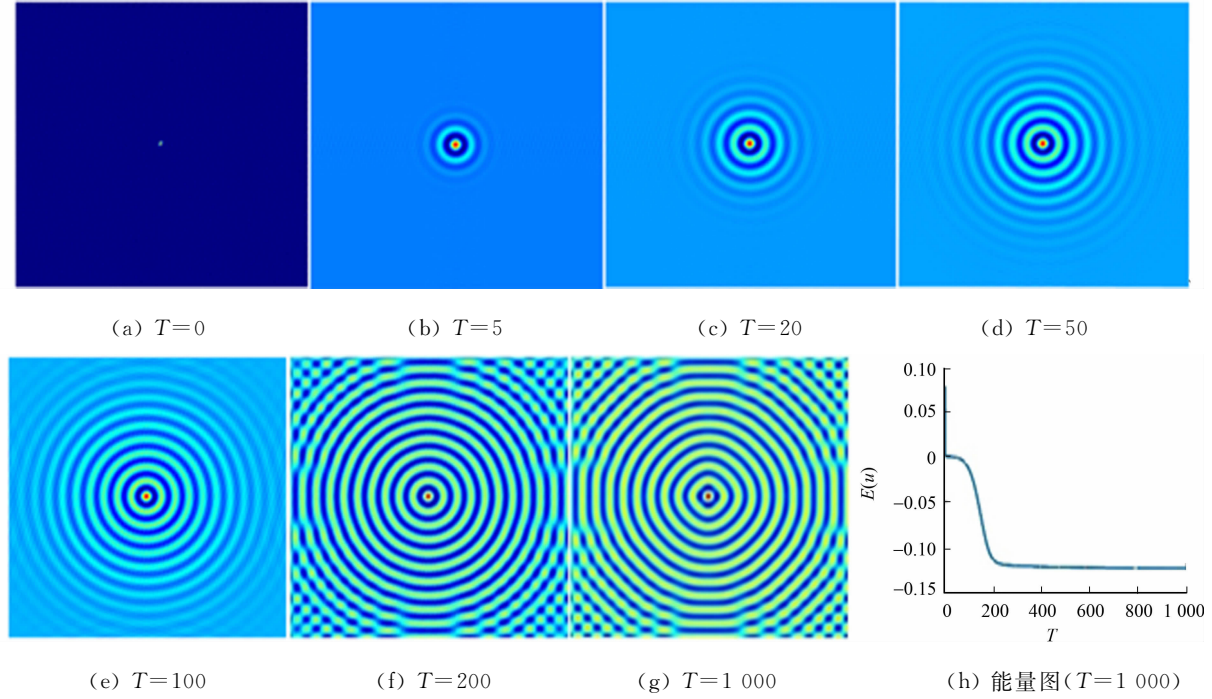


图 2 算例 3 不同时刻的数值解图像和能量图

Fig. 2 Numerical solution images and energy map at different times of example 3

2.4 算例 4

考虑空间区域 $\Omega=[-150,150]^2$ 时液晶体的生长,初始值为

$$u_0(x_l,y_l)=\varphi+C_1\left(\cos(C_2x_l)\cos\left(\frac{C_2}{\sqrt{3}}y_l\right)-0.5\cos\left(\frac{2C_2}{\sqrt{3}}y_l\right)\right).$$

式中: $C_1=0.446$; $C_2=0.66$; x_l,y_l 分别表示笛卡尔坐标的局部系统,有 $x_l(x,y)=x\sin\theta+y\cos\theta$, $y_l(x,y)=-x\cos\theta+y\sin\theta,\theta=\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$.

为了使 3 个微晶小正方体具有不同的角度, 设定 $u=0.285$, 固定长度为 20 的 3 个微晶小正方体的位置中心分别为 $(-90,90),(90,90),(0,20)$, 设置系数 $\epsilon=0.01, \delta=0.5$, 固定空间步长 $h=\frac{75}{64}$, 时间步长 $\tau=0.1$.

采用四步四阶显式稳定性积分因子龙格库塔格式可得不同时刻数值解图像及能量图 ($T=1\,000$), 如图 3 所示. 由图 3 可知: 随着时间的推移, 微晶相互碰撞并开始形成晶界; 当 $T=1\,000$ 时, 能量随着时间逐渐减小达到稳态.

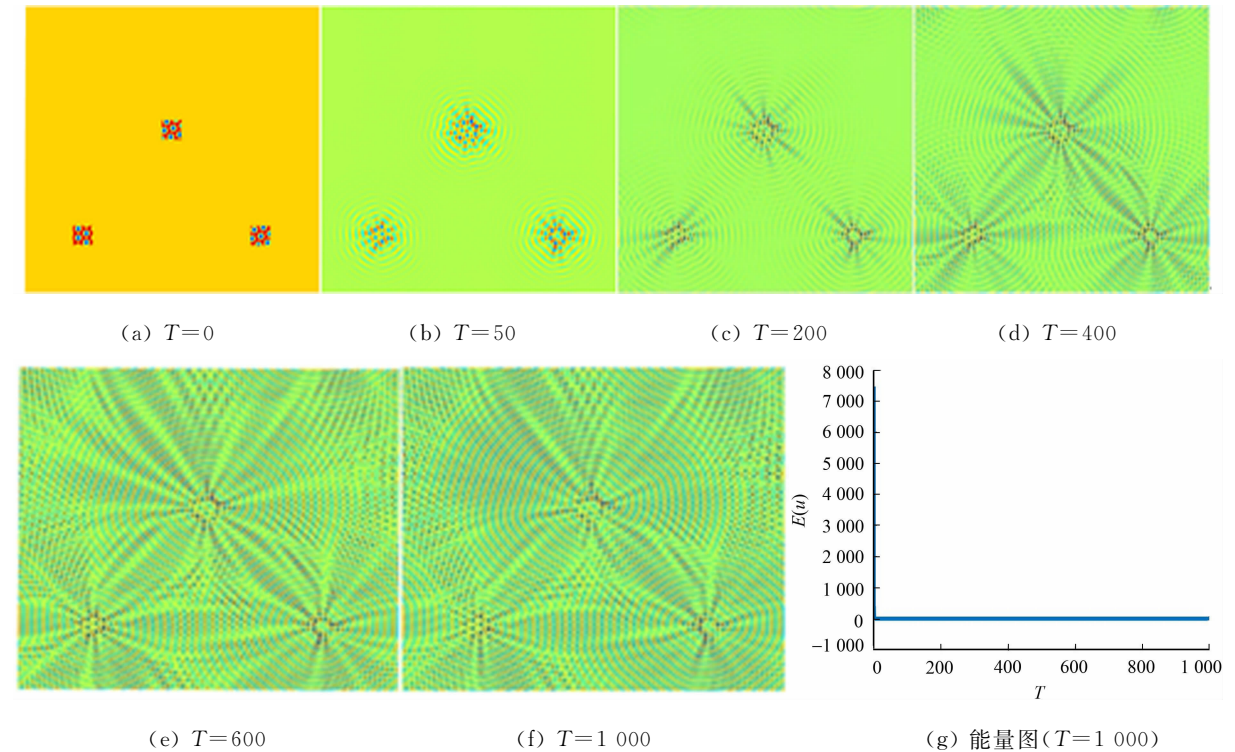


图 3 算例 4 不同时刻的数值解图像和能量图

Fig. 3 Numerical solution images and energy map at different times of example 4

3 结束语

结合积分因子龙格库塔法和傅里叶谱方法求解非局部 SH 方程, 得到一种快速有效的数值格式, 数值算例表明文中算法具有较好的稳定性及较高的准确性, 且满足能量递减性质.

参考文献:

[1] SWIFT J, HOHENBERG P C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability[J]. Physical Review A, 1977, 15(1): 319-328. DOI:10.1103/PhysRevA.15.319.

[2] HUTT A, ATAY F M. Analysis of nonlocal neural fields for both general and gamma-distributed connectivities[J]. Physica D, 2005, 203(1/2): 30-54. DOI:10.1016/j.physd.2005.03.002.

[3] HUTT A, LONGTIN A, SCHIMANSKY-GEIER L. Additive noise-induced turing transitions in spatial systems with application to neural fields and the Swift-Hohenberg equation[J]. Physica D, 2008, 237(6): 755-773. DOI:10.1016/j.physd.2007.10.013.

[4] ROBERTS A J. The Swift-Hohenberg equation requires nonlocal modifications to model spatial pattern evolution of physical problems[EB/OL]. (1994-12-09) [2022-10-05]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.patt-sol/9412002>.

[5] MORGAN D, DAWES J H P. The Swift-Hohenberg equation with a nonlocal nonlinearity[J]. Physica D, 2014, 270: 60-80. DOI:10.1016/j.physd.2013.11.018.

[6] LIU Zhengguang, LI Xiaoli. Efficient modified techniques of invariant energy quadratization approach for gradient flows[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 98: 206-214. DOI:10.1016/j.aml.2019.06.006.

- [7] SU Jian, FANG Weiwei, YU Qian, *et al.* Numerical simulation of Swift-Hohenberg equation by the fourth-order compact scheme[J]. Computational and Applied Mathematics, 2019, 38(2): 1-15. DOI: 10. 1007/s40314-019-0822-8.
- [8] FIRTH W J, COLUMBO L, SCROGGIE A J. Proposed resolution of theory-experiment discrepancy in homoclinic snaking[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(10): 104503. DOI: 10. 1103/PhysRevLett. 99. 104503.
- [9] PURWINS H G, BÖDEKER H U, AMIRANASHVIL S H. Dissipative solitons[J]. Advances in Physics, 2010, 59(5): 485-701. DOI: 10. 1080/00018732. 2010. 498228.
- [10] DU Qiang, GUNZBURGER M, LEHOUCQ R B, *et al.* A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2013, 23(3): 493-540. DOI: 10. 1142/S0218202512500546.
- [11] ZHANG Jun, YANG Xiaofeng. Numerical approximations for a new L^2 -gradient flow based phase field crystal model with precise nonlocal mass conservation[J]. Computer Physics Communications, 2019, 243: 51-67. DOI: 10. 1016/j. cpc. 2019. 05. 006.
- [12] WENG Zhifeng, DENG Yangfang, ZHUANG Qingqu, *et al.* A fast and efficient numerical algorithm for Swift-Hohenberg equation with a nonlocal nonlinearity[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 118: 107170. DOI: 10. 1016/j. aml. 2021. 107170.
- [13] JU Lili, LI Xiao, QIAO Zhonghua, *et al.* Maximum bound principle preserving integrating factor Runge-Kutta methods for semilinear parabolic equations[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 439: 110405. DOI: 10. 1016/j. jcp. 2021. 110405.
- [14] AHMED S, LIU Xinfeng. High order integration factor methods for systems with inhomogeneous boundary conditions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 348: 89-102. DOI: 10. 1016/j. cam. 2018. 08. 036.
- [15] ZHANG Hong, YAN Jingye, QIAN Xu, *et al.* Explicit third-order unconditionally structure-preserving schemes for conservative Allen-Cahn equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2022, 90(1): 1-29. DOI: 10. 1007/s10915-021-01691-w.
- [16] NAN Caixia, SONG Huailing. The high-order maximum-principle-preserving integrating factor Runge-Kutta methods for nonlocal Allen-Cahn equation[J]. Journal of Computational Physics, 2022, 456: 111028. DOI: 10. 1016/j. jcp. 2022. 111028.
- [17] 刘飞. 谱方法与高阶时间离散方法及应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2012.
- [18] SHU Chiwang, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439-471. DOI: 10. 1016/0021-9991(88)90177-5.
- [19] 李精伟. 保证反应扩散方程物理性质的数值方法[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2020.
- [20] ISHERWOOD L, GRANT Z J, GOTTLIEB S. Strong stability preserving integrating factor Runge-Kutta methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2018, 56(6): 3276-3307. DOI: 10. 1137/17M1143290.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)