

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202209015



非线性 Schrödinger 方程的 算子分裂配点格式

姚梦丽, 田朝薇, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用算子分裂格式结合重心 Lagrange 插值配点法求解非线性 Schrödinger 方程. 首先, 将非线性 Schrödinger 方程分解为线性部分和非线性部分, 线性部分在空间方向上采用重心 Lagrange 插值配点格式进行离散, 在时间方向上采用 Crank-Nicolson 格式进行离散, 非线性部分采用解析求解; 然后, 对线性子问题空间半离散技术进行相容性分析. 最后, 采用数值算例进行验证. 结果表明: 算子分裂配点格式具有高精度, 且满足离散的质量守恒和能量守恒.

关键词: 非线性 Schrödinger 方程; 算子分裂格式; 重心 Lagrange 插值配点法; Crank-Nicolson 格式

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2023)05-0645-09

Operator Splitting Collocation Scheme for Nonlinear Schrödinger Equation

YAO Mengli, TIAN Zhaowei, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The operator splitting scheme combined with the barycentric Lagrange interpolation collocation method is used to solve the nonlinear Schrödinger equation. Firstly, the nonlinear Schrödinger equation is decomposed into linear and nonlinear parts. The linear part is discretized by the barycentric Lagrange interpolation collocation scheme in the spatial direction, and the Crank-Nicolson scheme is used for discretization in the time direction, the nonlinear part is solved analytically. Then, the consistency analysis of space semi discrete technique for linear subquestion is proved. Finally, numerical experiments are used for verification. The results show that the operator splitting collocation scheme has high accuracy and satisfies discrete conservation of mass and conservation of energy.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; operator splitting scheme; barycentric Lagrange interpolation collocation method; Crank-Nicolson scheme

Schrödinger 方程是量子力学领域的基本方程, 对物理领域的研究具有深远的意义. 非线性 Schrödinger 方程(NLS 方程)在量子力学、非线性光学、电磁学、等离子理论、固体物理等领域中有着广泛的应用. 考虑以下 NLS 方程的初边值问题, 即

$$\left. \begin{aligned} iu_t + \rho \Delta u + v(x)u + \beta |u|^2 u &= 0, & (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= \alpha(x), & x \in [a, b]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期: 2022-09-29

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: zfwmath@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 福建省自然科学基金面上资助项目(2022J01308); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(ZQN702)

式(1)中: i 为虚数单位; a, b, ρ, β 均为常数; $\alpha(x), v(x)$ 均为已知函数; u 为未知函数.

众所周知,NLS 方程满足质量守恒和能量守恒,有

$$M(t)=\int_a^b|u(x,t)|^2dx=M(0),\quad t\in\mathbf{R}^+, \tag{2}$$

$$E(t)=\int_a^b(\rho|\nabla u(x,t)|^2-v(x)|u(x,t)|^2-\frac{\beta}{2}|u(x,t)|^4)dx=E(0),\quad t\in\mathbf{R}^+. \tag{3}$$

式(2),(3)中: $M(t)$ 为质量函数; $E(t)$ 为能量函数.

Schrödinger 方程作为一类重要的量子力学方程,在实际复杂的系统中,由于包含复数且为耦合的问题,其精确解往往不容易求得.因此,对其进行数值求解具有重要意义.许多研究者设计了有效的数值算法求解非线性 Schrödinger 方程.孙传志等^[1]研究 NLS 方程的几种差分格式.王廷春等^[2]用紧致有限差分格式求解非线性耗散 Schrödinger 方程. Gong 等^[3]采用 Fourier 拟谱方法构造二维 NLS 方程的能量和质量守恒格式. Cui 等^[4]用标量辅助变量(SAV)方法构造 NLS 方程的任意高阶保结构指数 Runge-Kutta 方法. Feng 等^[5]研究 NLS 方程的高阶守恒 SAV-Gauss 配置有限元格式. 张法勇等^[6]研究带五次项的 NLS 方程的守恒差分格式. Wang 等^[7]用两层网格有限元方法对 NLS 方程进行超收敛性分析. Wang 等^[8]采用伽辽金有限元法求解阻尼 NLS 方程. Hu 等^[9]采用牛顿迭代 Crank-Nicolson 有限元方法求解 NLS 方程. Chen 等^[10]采用两层网格有限体积元法求解 NLS 方程. 以上方法都是基于网格剖分思想求解 NLS 方程数值解问题. 最近,一种新型的无网格方法重心插值配点法广泛应用于求解微分方程初边值问题. 重心插值配点法具有计算格式简单、精度高、程序实施方便、节点适应性好等特点,特别使用 Chebyshev 节点的重心 Lagrange 插值公式可以有效克服 Runge 现象. 目前,重心插值配点法已被推广到求解高维 Fredholm 积分方程^[11]、耦合 Burgers 方程^[12]、粘弹性波方程^[13]、Allen-Cahn 方程^[14-16]、Cahn-Hilliard 方程^[17]、Black-Scholes 方程^[18]、分数阶电报方程^[19]等.

算子分裂法^[20-22]将复杂的问题分解成几个简单的子问题,并根据子问题的性质采用不同的求解方法,用算子分裂格式将子问题结合起来得到原问题的解,可降低原问题的求解规模,此方法广泛应用于复杂非线性模型的数值求解中. 基于此,本文提出一种非线性 Schrödinger 方程的算子分裂配点格式.

1 重心 Lagrange 插值配点格式

1.1 重心 Lagrange 插值

设有插值节点 x_j 和一组对应的实数 $g_j(j=0,1,\cdots,m)$,采用多项式插值,则在次数不超过 m 的多项式空间可以找到唯一的插值多项式 $p(x)$,满足 $p(x_j)=g_j$. 将 $p(x)$ 写成 Lagrange 插值公式,即

$$p(x)=\sum_{j=0}^mL_j(x)g_j,\quad L_j(x)=\frac{\prod_{i=0,i\neq j}^m(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^m(x_j-x_i)}. \tag{4}$$

式(4)中: $L_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数,满足

$$L_j(x_i)=\delta_{j,i}=\begin{cases}1,&j=i,\\0,&j\neq i,\end{cases}\quad i,j=0,1,\cdots,m, \tag{5}$$

以及

$$\sum_{j=0}^mL_j(x)=1. \tag{6}$$

令

$$l(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m), \tag{7}$$

定义重心插值权 w_j 为

$$w_j=1/\prod_{i=0,i\neq j}^m(x_j-x_i), \tag{8}$$

则 Lagrange 插值基函数 $L_j(x)$ 可表示为

$$L_j(x)=l(x)\frac{\omega_j}{x-x_j}.$$
(9)

将式(9)代入式(4),可得

$$p(x)=l(x)\sum_{j=0}^m\frac{\omega_j}{x-x_j}g_j.$$
(10)

当 $p(x)=1$ 时,有恒等式

$$1=l(x)\sum_{j=0}^m\frac{\omega_j}{x-x_j}.$$
(11)

用式(10)除以式(11),可得重心 Lagrange 插值公式为

$$p(x)=\frac{\sum_{j=0}^m\frac{\omega_j}{x-x_j}g_j}{\sum_{j=0}^m\frac{\omega_j}{x-x_j}}:=\sum_{j=0}^mL_j(x)g_j.$$
(12)

由式(8)可知:重心插值权仅依赖插值节点的分布,因此,对于一些特殊的节点分布可以简化重心插值权.特别地,当选择 Chebyshev 点族时,可保证重心 Lagrange 插值具有良好的数值稳定性.

利用重心插值逼近未知函数时均采用第二类 Chebyshev 节点,即

$$x_j=\cos\left(\frac{j}{m}\pi\right),\quad j=0,1,\cdots,m,$$
(13)

其重心 Lagrange 插值的重心插值权为

$$\omega_j=(-1)^j\delta_j,\quad \delta_j=\begin{cases} \frac{1}{2}, & j=0 \text{ 或 } j=m \\ 1, & \text{其他.} \end{cases}$$
(14)

1.2 重心 Lagrange 插值微分矩阵

对区间 $[a,b]$ 上的节点 $a=x_1<x_2<\cdots<x_m=b$,函数 $g(x)$ 在节点处的函数值为 $g_j=g(x_j),j=0,1,\cdots,m$,则函数 $g(x)$ 的重心型插值函数为

$$g(x)=\sum_{j=0}^mL_j(x)g_j.$$
(15)

由式(15),未知函数 $g(x)$ 在节点 x_0,x_1,\cdots,x_m 处的 p 阶导数表示为

$$g_i^{(p)}=g^{(p)}(x_i)=\sum_{j=0}^mL_j^{(p)}(x_i)g_j=\sum_{j=0}^mD_{i,j}^{(p)}g_j,\quad p=1,2,\cdots,m.$$
(16)

将式(16)写成矩阵形式,即

$$\mathbf{g}^{(p)}=\mathbf{D}^{(p)}\mathbf{g}.$$
(17)

式(17)中: $\mathbf{g}^{(p)}=[g_0^{(p)},g_1^{(p)},\cdots,g_m^{(p)}]'$, $\mathbf{g}=[g_0,g_1,\cdots,g_m]'$,矩阵 $\mathbf{D}^{(p)}$ 为 p 阶微分矩阵,其元素为

$$D_{i,j}^{(p)}=L_j^{(p)}(x_i)=\frac{\mathrm{d}^pL_j(x_i)}{\mathrm{d}t^p}.$$

由文献[23]可知,一阶和二阶微分矩阵元素的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} D_{i,j}^{(1)} &= L_j'(x_i) = \frac{\omega_j/\omega_i}{x_i-x_j}, & j \neq i, \\ D_{i,j}^{(2)} &= L_j''(x_i) = -2\frac{\omega_j/\omega_i}{x_i-x_j}\left(\sum_{p \neq i} \frac{\omega_p/\omega_i}{x_i-x_p} + \frac{1}{x_i-x_j}\right), & j \neq i, \\ D_{i,i}^{(1)} &= -\sum_{j=0,j \neq i}^m D_{i,j}^{(1)}, & D_{i,i}^{(2)} &= -\sum_{j=0,j \neq i}^m D_{i,j}^{(2)}. \end{aligned} \right\}$$
(18)

通过数学归纳法,可得 p 阶微分矩阵的递推公式为

$$\left. \begin{aligned} D_{i,j}^{(p)} &= p\left(D_{i,i}^{(p-1)}D_{i,j}^{(1)} - \frac{D_{i,j}^{(p-1)}}{x_i-x_j}\right), & j \neq i, \\ D_{i,i}^{(p)} &= -\sum_{j=0,j \neq i}^m D_{i,j}^{(p)}. \end{aligned} \right\}$$
(19)

2 基于重心 Lagrange 插值的 NLS 方程算子分裂格式

2.1 Strang 算子分裂法

将式(1)改写为

$$\mathrm{i}u_t=L(u)+N(u). \tag{20}$$

式(20)中: $L(u)=-\rho\Delta u$; $N(u)=-v(x)u-\beta|u|^2u$.

算子分裂法的本质是将方程(20)分为两个子问题,即

$$\text{线性部分 } S^A:\mathrm{i}u_t=L(u)=-\rho\Delta u, \tag{21}$$

$$\text{非线性部分 } S^B:\mathrm{i}u_t=N(u)=-v(x)u-\beta|u|^2u. \tag{22}$$

式(21),(22)中: S^A 和 S^B 分别为方程(21)和方程(22)的精确解,可得 Strang 算子分裂格式为

$$u(x,t+\tau)=S^B\left(\frac{\tau}{2}\right)S^A(\tau)S^B\left(\frac{\tau}{2}\right)u(x,t)+O(\tau^3). \tag{23}$$

式(23)中: τ 为时间步长, $\tau=\frac{T}{n}$, n 为时间节点数.

2.2 S^A 和 S^B 的数值逼近

设空间节点 $x_j(j=0,1,\cdots,m)$ 为 Chebyshev 节点,时间节点 $t_k=k\tau(k=0,1,2,\cdots,n)$.

首先,在空间方向上采用重心 Lagrange 插值配点法,可得半离散格式为

$$\mathrm{i}u_t(x_j,t)=-\rho\left(\sum_{k=0}^mL''_j(x)\right)u(x_j,t). \tag{24}$$

将式(24)写成矩阵形式,即

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{u}_h(t))_t=-\rho\boldsymbol{D}^{(2)}\boldsymbol{u}_h(t), \tag{25}$$

式(25)中: $\boldsymbol{u}_h(t)=[u_0(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)]'$.

其次,令 $u_h^k=u_h(t_k)$,在时间方向上用 Crank-Nicolson 格式进行离散,可得全离散格式为

$$\mathrm{i}\frac{u_h^{k+1}-u_h^k}{\tau}=-\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}u_h^{k+1}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}u_h^k\right). \tag{26}$$

因此,有

$$S_h^A:u_h^{k+1}=\left(\mathrm{i}\boldsymbol{I}+\frac{\rho\tau}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{I}-\frac{\rho\tau}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}\right)u_h^k. \tag{27}$$

方程(22)采用解析求解,即

$$S_h^B:u_h^{k+1}=\exp(\mathrm{i}\tau(v(x)+\beta|u_h^k|^2))u_h^k, \tag{28}$$

则算子分裂格式为

$$\left. \begin{aligned} u_h^{(1)} &= \exp(\mathrm{i}\tau(v(x)+\beta|u^{(k)})_h|^2)u_h^k, \\ u_h^{(2)} &= \left(\mathrm{i}\boldsymbol{I}+\frac{\rho\tau}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{I}-\frac{\rho\tau}{2}\boldsymbol{D}^{(2)}\right)u_h^{(1)}, \\ u_h^{k+1} &= \exp(\mathrm{i}\tau(v(x)+\beta|u_h^{(2)}|^2))u_h^{(2)}. \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

3 相容性分析

考虑线性子问题的空间半离散格式(24)的相容性分析. 设 $p(x)$ 为 $u(x)$ 的 Lagrange 插值函数,满足 $p(x_j)=u(x_j),j=0,1,\cdots,m$. 定义误差函数 $r(x)$ 为

$$r(x)=u(x)-p(x). \tag{30}$$

引理 1^[19] 假设 $u\in C^{m+1}(a,b)$,则有

$$\|r(x)\|_\infty\leqslant C_1\left(\frac{\mathrm{e}l_x}{2m}\right)^m\|u^{(m+1)}\|_\infty.$$

式中: l_x 表示区间 $[a,b]$ 的一半. 类似地,可得

$$\|r_{xx}(x)\|_\infty\leqslant C_1^*\left(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}\|u^{(m+1)}\|_\infty.$$

为了给出线性子问题 S^A 的空间半离散格式(24)的相容性分析,首先,定义算子 Γ 为

$$\Gamma:=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}.\tag{31}$$

对线性子问题 S^A 未知函数 $u(x,t)$ 的重心插值近似函数 $u(x_j,t)$,有 $\Gamma u(x_j,t)=0,\lim_{j\rightarrow\infty}\Gamma u(x_j,t)=0$. 基于引理 1,可得线性子问题的空间半离散格式(24)误差分析.

定理 1 如果 $u\in C^1([0,T])\cup C^{m+1}([a,b])$,有

$$\|u(x,t)-u(x_j,t)\|_\infty\leqslant C_1^{**}\left(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty.$$

证明:由式(21)和式(24),可得

$$\begin{aligned}\Gamma u(x,t)-\Gamma u(x_j,t)&=\mathrm{i}u_t(x,t)+\rho u_{xx}(x,t)-\mathrm{i}u_t(x_j,t)-\rho u_{xx}(x_j,t)=\\&\mathrm{i}u_t(x,t)-\mathrm{i}u_t(x_j,t)+\rho u_{xx}(x,t)-\rho u_{xx}(x_j,t)=R_1+R_2.\end{aligned}\tag{32}$$

式(32)中:

$$R_1=\mathrm{i}u_t(x,t)-\mathrm{i}u_t(x_j,t),\quad R_2=\rho u_{xx}(x,t)-\rho u_{xx}(x_j,t).\tag{33}$$

对于 R_1 ,有

$$R_1=\mathrm{i}u_t(x,t)-\mathrm{i}u_t(x_j,t)=\mathrm{i}(u_t(x,t)-u_t(x_j,t))=\mathrm{i}r_t(x_j,t).\tag{34}$$

由引理 1 可得

$$\|R_1\|_\infty=\|r_t(x_j,t)\|_\infty\leqslant C_1\left(\frac{\mathrm{e}l_x}{2m}\right)^m\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty.\tag{35}$$

类似地,可得

$$\|R_2\|_\infty=\|r_{xx}(x_j,t)\|_\infty\leqslant C_1^{**}\left(\frac{\mathrm{e}l_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}\|\partial_x^{(m+1)}u\|_\infty.\tag{36}$$

将式(35),(36)代入式(32)即可,证毕.

4 数值算例

定义 L^∞ 误差和 L^2 误差分别为

$$\mathrm{Err}_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant N}|U_i-u_i|,\quad \mathrm{Err}_2=h\sqrt{\sum_{i=1}^m(U_i-u_i)^2}.$$

式中: u_i 为点 x_i 处的精确解; U_i 为点 x_i 处的数值解.

4.1 算例 1

比较重心 Lagrange 插值配点格式和有限差分格式的数值结果,以验证插值配点格式的有效性及其高精度. $\rho=1,\beta=1$,选取带右端项的真解 $u(x,t)=\cos t\sin \pi x,0\leqslant x\leqslant 1$,右端项为 $f(x)=-\mathrm{i}\sin t\sin \pi x-\pi^2\cos t\sin \pi x+|\cos t\sin \pi x|^2\cos t\sin \pi x$,初始条件为 $u(x,0)=\sin \pi x,0\leqslant x\leqslant 1$,边界条件为 $u(0,t)=u(1,t)=0,0\leqslant t\leqslant 1$,势函数 $v(x)=0$.

固定时间步长($\tau=10^{-4}$),改变空间节点数(M),重心 Lagrange 插值配点格式和有限差分格式的误差,如表 1 所示. 由表 1 可知:算例 1 的重心 Lagrange 插值配点格式选取 6 个节点差值即可达到 10^{-5} 量级,而有限差分格式选取 256 个节点差值才能达到 10^{-5} 量级,这表明重心 Lagrange 插值配点格式在空间上用较少的点可达到更高的精度.

表 1 重心 Lagrange 插值配点格式和有限差分格式的误差(算例 1)

重心 Lagrange 插值配点格式			有限差分格式		
M	Err_∞	Err_2	M	Err_∞	Err_2
4	$1.310\ 7\times 10^{-2}$	$5.861\ 7\times 10^{-3}$	16	$8.138\ 9\times 10^{-3}$	$1.974\ 0\times 10^{-3}$
6	$3.472\ 4\times 10^{-5}$	$1.312\ 5\times 10^{-5}$	32	$2.028\ 0\times 10^{-3}$	$3.530\ 4\times 10^{-4}$
8	$2.436\ 7\times 10^{-7}$	$8.122\ 3\times 10^{-8}$	64	$5.066\ 0\times 10^{-4}$	$6.283\ 6\times 10^{-5}$
10	$7.393\ 4\times 10^{-9}$	$2.229\ 2\times 10^{-9}$	128	$1.266\ 3\times 10^{-4}$	$1.114\ 9\times 10^{-5}$
12	$7.430\ 3\times 10^{-9}$	$2.060\ 8\times 10^{-9}$	256	$3.165\ 9\times 10^{-5}$	$1.974\ 9\times 10^{-6}$

固定空间节点数($M=8$),改变时间步长,重心 Lagrange 插值配点格式的误差及时间收敛阶,如表 2 所示.表 2 中: $R_{t,1},R_{t,2}$ 分别为 L^∞ 误差和 L^2 误差的时间收敛阶.由表 2 可知:基于重心 Lagrange 插值配点格式的 NLS 方程在时间上是二阶精度.

表 2 重心 Lagrange 插值配点格式的误差及时间收敛阶(算例 1)

τ	Err_∞	$R_{t,1}$	Err_2	$R_{t,2}$
1/8	$1.196\ 9\times10^{-2}$	—	$3.989\ 6\times10^{-3}$	—
1/16	$2.861\ 5\times10^{-3}$	2.064 4	$9.538\ 4\times10^{-4}$	2.064 4
1/32	$7.149\ 0\times10^{-4}$	2.001 0	$2.383\ 0\times10^{-4}$	2.001 0
1/64	$1.800\ 4\times10^{-4}$	1.989 4	$6.001\ 4\times10^{-5}$	1.989 4

不同数值格式的空间收敛阶,如图 1 所示.图 1 中: R_s 为空间收敛阶.由图 1 可知:有限差分格式的空间收敛阶是二阶精度;重心 Lagrange 插值配点格式的空间收敛阶满足指数收敛的性质.

4.2 算例 2

通过算例 2 验证 NLS 方程的质量守恒和能量守恒. $\rho=\frac{1}{2},\beta=-1$,选取真解 $u(x,t)=\exp(-\frac{3it}{2})\sin x,0\leq x\leq 2\pi$,初始条件为 $u(x,0)=\sin x,0\leq x\leq 2\pi$,边界条件为 $u(0,t)=u(2\pi,t)=0,0\leq t\leq 1$,势函数 $v(x)=-\cos^2 x$.

算例 2 的重心 Lagrange 插值配点格式和有限差分格式的误差($\tau=10^{-4}$),如表 3 所示.由表 3 可知:算例 2 的重心 Lagrange 插值配点格式选取 8 个节点差值即可达到 10^{-4} 量级,而有限差分格式选取 128 个节点差值也只能达到 10^{-4} 量级,故重心 Lagrange 插值配点格式具有较高的精度.

表 3 重心 Lagrange 插值配点格式和有限差分格式的误差(算例 2)

重心 Lagrange 插值配点格式			有限差分格式		
M	Err_∞	Err_2	M	Err_∞	Err_2
4	$8.583\ 5\times10^{-2}$	$3.838\ 7\times10^{-2}$	16	$6.392\ 6\times10^{-3}$	$1.550\ 4\times10^{-3}$
6	$9.521\ 8\times10^{-3}$	$3.598\ 9\times10^{-3}$	32	$1.604\ 3\times10^{-3}$	$2.792\ 8\times10^{-4}$
8	$2.595\ 3\times10^{-4}$	$8.651\ 2\times10^{-5}$	64	$4.014\ 7\times10^{-4}$	$4.979\ 6\times10^{-5}$
10	$4.839\ 5\times10^{-6}$	$1.459\ 2\times10^{-6}$	128	$1.003\ 9\times10^{-4}$	$8.838\ 9\times10^{-6}$
12	$7.171\ 3\times10^{-8}$	$1.989\ 0\times10^{-8}$	256	$2.509\ 9\times10^{-5}$	$1.565\ 7\times10^{-6}$

重心 Lagrange 插值配点格式的数值解和精确解($M=64,t=1$),如图 2 所示.不同数值格式的空间收敛阶,如图 3 所示.重心 Lagrange 插值配点格式守恒量的保持情况,如图 4 所示.

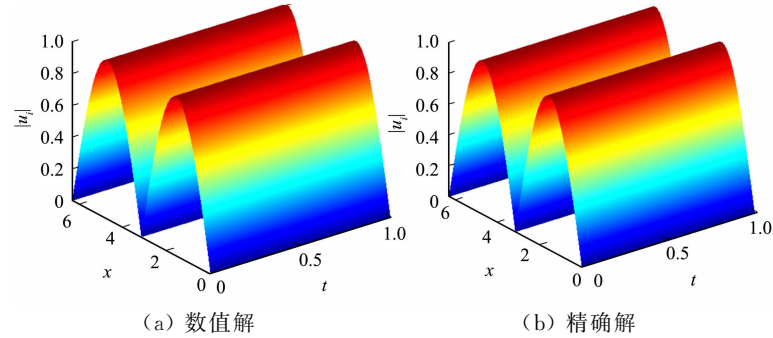


图 2 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解和精确解

Fig. 2 Numerical solution and exact solution of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme

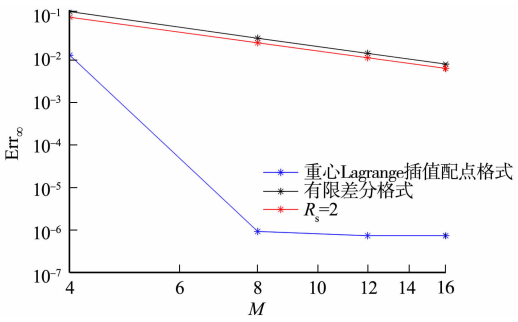


图 1 不同数值格式的空间收敛阶(算例 1)
Fig. 1 Spatial convergence orders for different numerical schemes (example 1)

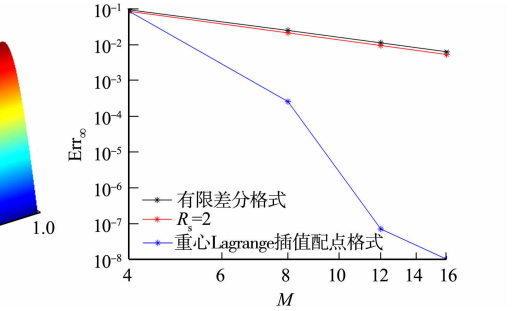


图 3 不同数值格式的空间收敛阶(算例 2)
Fig. 3 Spatial convergence orders for different numerical schemes (example 2)

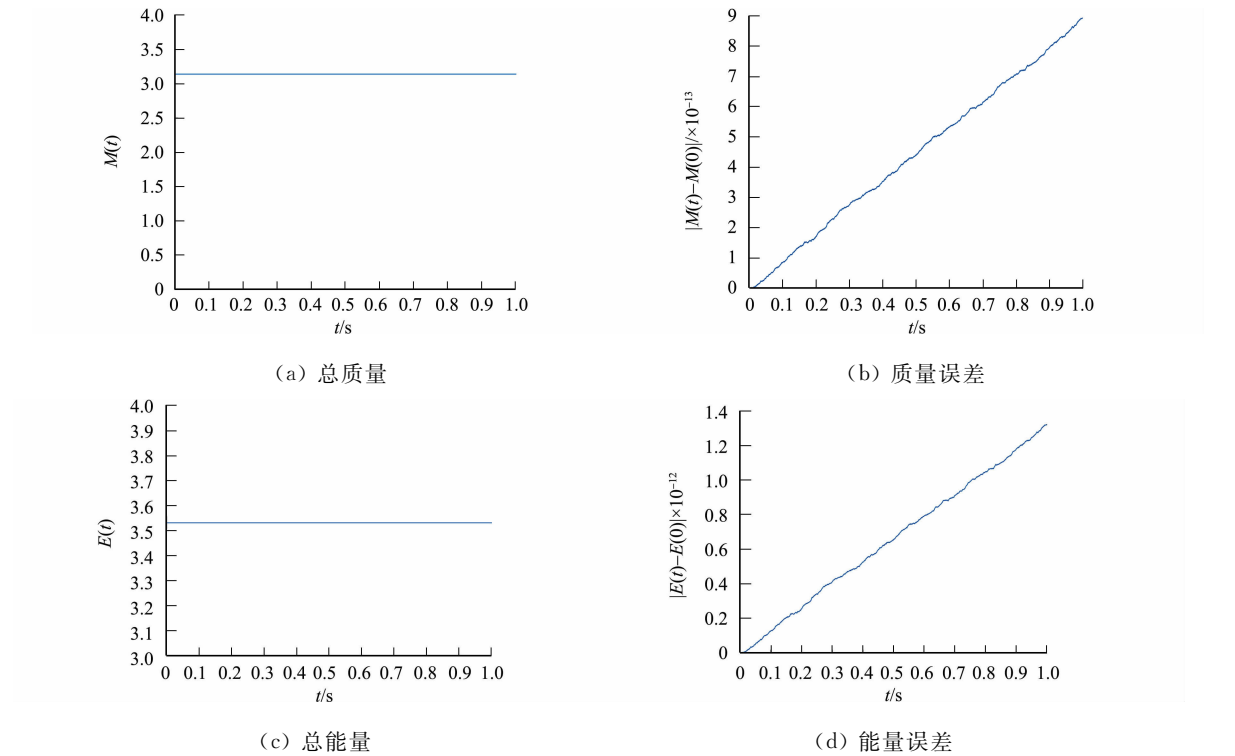


图 4 重心 Lagrange 插值配点格式对守恒量的保持情况(算例 2)

Fig. 4 Conservation of conserved quantities by barycentric Lagrange interpolation collocation scheme (example 2)

由图 2 可知:NLS 方程的重心 Lagrange 插值配点格式是稳定的. 由图 3 可知:有限差分格式是二阶精度,重心 Lagrange 插值配点格式呈指数递减. 由图 4 可知:基于重心 Lagrange 插值配点格式的 NLS 方程满足质量守恒和能量守恒.

4.3 算例 3

通过算例 3 进行孤立波的演化实验. 选取空间节点 $M=248$,时间步长 $\tau=10^{-4}$,对应的计算区间为 $[-10\pi,10\pi]\times[0,T]$, $\rho=1,\beta=2$,选取真解 $u(x,t)=\exp(i(2x-3t))\operatorname{sech}(x-4t)$,初始条件为 $u(x,0)=\exp(2ix)\operatorname{sech}x$,边界条件为 $u(a,t)=u(b,t)=0$,势函数 $v(x)=0$.

算例 3 的重心 Lagrange 插值配点格式的误差及时间收敛阶($M=248$),如表 4 所示. 由表 4 可知:算例 3 验证了时间收敛阶为二阶精度.

表 4 重心 Lagrange 插值配点格式的误差及时间收敛阶(算例 3)

Tab. 4 Errors and time convergence orders of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme (example 3)

τ	$\operatorname{Err}_\infty$	$R_{1,1}$	Err_2	$R_{1,2}$
1/16	1.5708×10^{-1}	—	9.9548×10^{-3}	—
1/32	3.5503×10^{-2}	2.145 5	2.2499×10^{-3}	2.145 5
1/64	8.7189×10^{-3}	2.025 7	5.5254×10^{-4}	2.025 7
1/128	2.2214×10^{-3}	1.972 7	1.4078×10^{-4}	1.972 7

初始孤立波波形,如图 5 所示.

重心 Lagrange 插值配点格式的孤立波波形,如图 6 所示. 由图 6 可知:算例 3 的重心 Lagrange 插值配点格式的孤立波波形随时间的变化而变化,符合物理意义,而且每个时刻的波形都没有出现震荡,这说明该格式是稳定的.

重心 Lagrange 插值配点格式守恒量的保持情况,如图 7 所示. 由图 7 可知:算例 3 的重心 Lagrange 插值配点格式保持质量守恒和能量守恒.

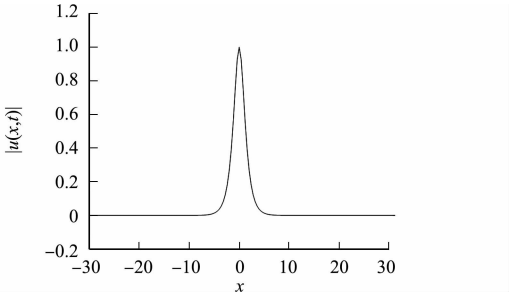


图 5 初始孤立波波形

Fig. 5 Initial isolated wave shape

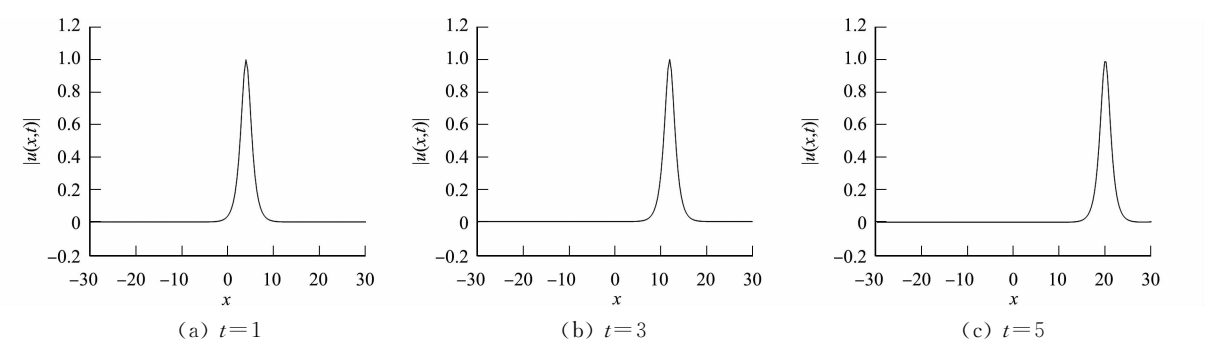


图 6 重心 Lagrange 插值配点格式的孤立波波形

Fig. 6 Isolated wave shapes of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme

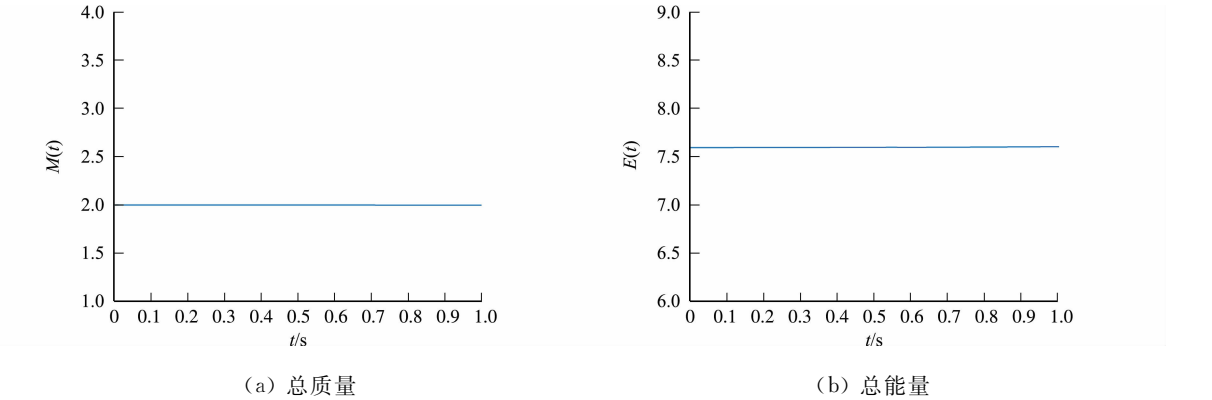


图 7 重心 Lagrange 插值配点格式守恒量的保持情况(算例 3)

Fig. 7 Conservation of conserved quantities of barycentric Lagrange interpolation collocation scheme (example 3)

5 结束语

将算子分裂格式与重心 Lagrange 插值配点格式相结合,提出一种求解 NLS 方程的有效数值格式.此外,对方程的非线性部分采用解析求解,降低非线性迭代的计算量,提高计算效率,并给出线性子问题空间半离散格式的相容性分析.最后,通过数值算例验证格式的高精度和有效性.与经典的有限差分格式进行比较可知,文中格式可用较少的点达到较高的精度.今后,可将该方法推广到其他非线性微分方程,为解决同类问题提供一种高精度数值求解方法,如耦合的非线性 Schrödinger 方程、时间分数阶非线性 Schrödinger 方程等.

参考文献:

[1] 孙传志,汪佳玲. 非线性薛定谔方程的几种差分格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2021,42(4):551-560. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202011019.

[2] 王廷春,张雯,王国栋. 非线性耗散 Schrödinger 方程的紧致差分格式[J]. 工程数学学报,2018,35(6):693-706. DOI:10.3969/j.issn.1005-3085.2018.06.009.

[3] GONG Yuezheng,WANG Qi,WANG Yushun,*et al.* A conservative Fourier pseudo-spectral method for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Computational Physics,2017,328:354-370. DOI:10.1016/j.jcp.2016.10.022.

[4] CUI Jin,XU Zhuangzhi,JIANG Chaolong. Mass-and energy-preserving exponential Runge-Kutta methods for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Applied Mathematics Letters,2020,112:106770. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106770.

[5] FENG Xiaobing,LI Buyang,MA Shu. High-order mass-and energy-conserving SAV-Gauss collocation finite element methods for the nonlinear Schrödinger equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2021,59:1566-1591. DOI: 10.1137/20M1344998.

[6] 张法勇,安晓丽. 带五次项的非线性 Schrödinger 方程的守恒差分格式[J]. 计算数学,2022,44(1):63-70. DOI:10.

- 12286/jssx. j2019-0557.
- [7] WANG Junjun, LI Meng, GUO Lijuan. Superconvergence analysis for nonlinear Schrödinger equation with two-grid finite element method[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 122: 107553. DOI: 10. 1016/j. aml. 2021. 107553.
- [8] WANG Lingli, LI Meng. Galerkin finite element method for damped nonlinear Schrödinger equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2022, 178: 216-247. DOI: 10. 1016/j. apnum. 2022. 03. 018.
- [9] HU Hanzhang, LI Buyang, ZOU Jun. Optimal convergence of the Newton iterative Crank-Nicolson finite element method for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Computational Methods in Applied Mathematics, 2022, 22(3): 591-612. DOI: 10. 1515/cmam-2022-0057.
- [10] CHEN Chuanjun, LOU Yuzhi, HU Hanzhang. Two-grid finite volume element method for the time-dependent Schrödinger equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2022, 108: 185-195. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2022. 01. 008.
- [11] LIU Hongyan, HUANG Jin, PAN Yubin, *et al.* Barycentric interpolation collocation methods for solving linear and nonlinear high-dimensional Fredholm integral equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 327: 141-154. DOI: 1016/j. cam. 2017. 06. 004.
- [12] LIU Feifei, WANG Yulan, LI Shuguang. Barycentric interpolation collocation method for solving the coupled viscous Burgers equations[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2018, 95: 2162-2173. DOI: 10. 1080/00207160. 2017. 1384546.
- [13] ORUC Ö. Two meshless methods based on local radial basis function and barycentric rational interpolation for solving 2D viscoelastic wave equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2020, 79(12): 3273-3288. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2020. 01. 025.
- [14] DENG Yangfang, WENG Zhifeng. Barycentric interpolation collocation method based on Crank-Nicolson scheme for the Allen-Cahn equation[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6: 3857-3873. DOI: 10. 3934/math. 2021229.
- [15] 翁智峰, 姚泽丰, 赖淑琴. 重心插值配点格式求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(1): 133-140. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 20180643.
- [16] 邓杨芳, 姚泽丰, 汪精英, 等. 二维 Allen-Cahn 方程的有限差分法/配点法求解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, 41(5): 133-140. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202001001.
- [17] 邓杨芳, 黄蓉, 翁智峰. 重心插值配点法求解 Cahn-Hilliard 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2022, 43(1): 135-144. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202011026.
- [18] 赖舒琴, 华之维, 翁智峰. 重心插值配点法求解 Black-Scholes 方程[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(5): 481-485. DOI: 10. 19728/j. issn1672-6634. 2020. 05. 001.
- [19] YI Shichao, YAO Linquan. A steady barycentric Lagrange interpolation method for solving the 2D higher-order time-fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. Numerical Methods Partial Differential Equations, 2019, 35(5): 1694-1716. DOI: 10. 1002/num. 22371.
- [20] LUBICH C. On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations[J]. Mathematics of Computation, 2008, 77(264): 2141-2153. DOI: 10. 1090/S0025-5718-08-02101-7.
- [21] ZHAI Shuying, WANG Dongling, ZHAO Xuan. Error analysis and numerical simulations of strang splitting method for space fractional nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Scientific Computing, 2019, 81: 965-989. DOI: 10. 1007/s10915-019-01050-w.
- [22] DENG Yangfang, WENG Zhifeng. Operator splitting scheme based on barycentric Lagrange interpolation collocation method for the Allen-Cahn equation[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2022, 68: 3347-3365. DOI: 10. 1007/s12190-021-01666-y.
- [23] BERRUT J P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. SIAM Review, 2004, 46: 501-507. DOI: 10. 1137/S0036144502417715.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)