第 44 卷　第 5 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 44　No. 5
2023 年 9 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Sep.　2023

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202209011

具有相依性元件的串联系统的冗余元件分配问题

李晓琴，游银萍

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 对具有两个相依性元件的串联系统的冗余元件分配问题进行研究，假设工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性，建立不同冗余分配策略下系统寿命在随机占优序下的大小关系.结果表明：分配两个冗余元件中的一个冗余元件时，将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件可以延长系统的寿命；分配两个冗余元件时，将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件的分配策略较优.

关键词： 普通随机序；随机占优序；随机排列递增；左尾弱随机排列递增

中图分类号： O 213.2　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1000-5013(2023)05-0636-09

Redundancies Allocation Problem in Series System With Interdependent Components

LI Xiaoqin, YOU Yinping

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Research on the redundancies allocation problem in series system with two interdependent components, assuming that the lifetimes of dependent working components and the lifetimes of interdependent redundancies are are independent, we establish the size relationship of system lifetimes under different redundancy allocation policy in the sense of stochastic preference order. The results show that on allocation of one of two redundancies, allocating a redundancy with longer lifetimes to a working components with shorter lifetimes can extend the lifetimes of the system and on allocation of two redundancies, allocating a redundancy with longer lifetimes to a working component with shorter lifetimes makes a better allocation policy.

Keywords: usual stochastic order; stochastic preference order; stochastic arrangement increasing; left tail weak stochastic arrangement increasing

在工业工程中，冗余分配是提高系统可靠性的常见做法.工程师通常采用冷储备和热储备这两种分配方式.热储备是指将冗余元件并联在工作元件上一同运行；冷储备是指将冗余元件置于备用阶段，只有当工作元件失效后才开始工作.目前，已有一些学者对冗余元件分配进行开创性讨论[1-10].其中，关于冗余分配的大部分研究都是在元件寿命相互独立的假设下进行的.然而，在实际问题中，工作元件都是在相同环境中运行，故考虑工作元件寿命具有相依性的相关研究更切合实际.在元件寿命相互独立的假设下，Misra 等[5]和 Romera 等[11]分别研究了两个冗余元件下串联系统在随机占优序下的冗余冷分配

收稿日期： 2022-09-15

通信作者： 游银萍(1988-)，女，副教授，博士，主要从事可靠性、保险精算、经济金融和风险管理等领域分配问题的研究.E-mail:youyinping19881203@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(11701194)；福建省自然科学基金资助项目(2020J01074)

问题和冗余热分配问题，证明了分配两个冗余元件中的一个冗余元件时，将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件可以延长系统寿命，分配两个冗余元件时，将寿命较长的冗余分配给寿命较短的工作元件的分策略较优. 在工作元件寿命具有相依性的假设下，除了 Belzunce 等[12-13]和 You 等[14]建立了单个冗余元件下不同冗余分配策略的冗余串联系统寿命在随机占优序下的大小关系外，还未有关于工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的假设下串联系统在随机占优序下的冗余分配问题的研究. 因此，本文在工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的假设下，研究分配两个冗余元件后的冗余系统寿命在随机占优序下的大小关系.

1　预备知识

在许多与概率相关的领域，如工程可靠性、金融精算、风险管理和统计等，随机序发挥着重要的作用，采用使用随机占优序来比较随机变量之间的大小关系.

定义 1　对于任意两个非负随机变量 X，Y，记 F_X，F_Y 分别为 X，Y 的分布函数，$\overline{F}$，$\overline{G}$分别为 X，Y 的生存函数. 然后，称 Y 在以下意义下比 X 小：1) 失效率序(记为 $Y\leqslant_{\mathrm{hr}}X$)，如果 $\overline{F}(x)/\overline{G}(x)$关于 x 递增；2) 随机占优序(记为 $Y\leqslant_{\mathrm{pr}}X$)，如果 $P(X>Y)\geqslant P(X<Y)$；3) 普通随机序(记为 $Y\leqslant_{\mathrm{st}}X$)，如果$\overline{G}(x)\leqslant\overline{F}(x)$，对任意的 x.

根据具有排列递增的相依概念，对于任意函数 $g:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$，任意对$(i,j)$，使 $1\leqslant i<j\leqslant n$，令

$$\mathscr{G}_{\mathrm{s}}^{i,j}(n)=\{g:g(\boldsymbol{x})\geqslant g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))\text{，对任意的 } x_i\leqslant x_j\}\text{，}$$

$$\mathscr{G}_{\mathrm{lws}}^{i,j}(n)=\{g:g(\boldsymbol{x})-g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))\text{在 } x_i\leqslant x_j \text{ 范围内关于 } x_i \text{ 递减}\}.$$

式中：$\tau_{i,j}(\boldsymbol{x})=(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$是向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$的一个置换.

定义 2[15-16]　向量 $\boldsymbol{X}$ 或者它的概率分布为

1) 随机排列递增(SAI)，如果满足性质 $E[g(\boldsymbol{X})]\geqslant E[g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{X}))]$，对任意函数 $g\in\mathscr{G}_{\mathrm{s}}^{i,j}(n)$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

2) 左尾弱随机排列递增(LWSAI)，如果满足性质 $E[g(\boldsymbol{X})]\geqslant E[g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{X}))]$，对于任意函数 $g\in\mathscr{G}_{\mathrm{lws}}^{i,j}(n)$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

容易证明 SAI⇒LWSAI.

对于连续型的随机变量，Li 等[17]首次提出置换单调相依性的概念.

定义 3　称联合概率密度 $f(\boldsymbol{x})$为

1) 关于(i,j)高尾置换递减(UTPD)，其中，$i<j$，如果满足性质 $\int_t^{+\infty}[f(\boldsymbol{x})-f(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))]\mathrm{d}x_j$，对于任意的 $t\geqslant x_i$；

2) 关于(i,j)低尾置换递减(LTPD)，其中，$i<j$，如果满足性质 $\int_{-\infty}^t[f(\boldsymbol{x})-f(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))]\mathrm{d}x_i$，对于任意的 $t\leqslant x_j$.

对于连续型的随机变量 LTPD 等价于 LWSAI.

引理 1～5 在主要结论中起到关键作用.

引理 1[3]　设函数 $h(x)$和 $w(x)$，满足：1) $h(x)$单调递减且非负；2) $\int_{-\infty}^{+\infty}w(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)w(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

引理 2[15]　设(X_1,X_2)是 SAI 的，当且仅当 $E[g_2(X_1,X_2)]\geqslant E[g_1(X_1,X_2)]$，对于任意的 $x_1\leqslant x_2$，其中，g_2，g_1 满足：1) $g_2(x_1,x_2)\geqslant g_1(x_1,x_2)$；2) $g_2(x_1,x_2)+g_2(x_2,x_1)\geqslant g_1(x_1,x_2)+g_1(x_2,x_1)$.

引理 3[15-16]　SAI 和 LWSAI 性质的一些充要条件. 1) 如果$(X_1,\cdots,X_n)$相互独立，那么 $\boldsymbol{X}$ 是 SAI 的，当且仅当 $X_1\leqslant_{\mathrm{lr}}\cdots\leqslant_{\mathrm{lr}}X_n$；2) 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 由生成元具有完全单调性的阿基米德 copula 耦合，那么 $\boldsymbol{X}$ 是 LWSAI 的，当且仅当 $X_1\leqslant_{\mathrm{rh}}\cdots\leqslant_{\mathrm{rh}}X_n$.

引理 4[18]　假设 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度函数为 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$，那么 $\boldsymbol{X}$ 是 SAI 的，当且仅当 $f(\boldsymbol{x})$是排

列递增的.

引理 5[19] 假设(X_1,X_2)是 LWSAI 的,当且仅当 $E[g_2(X_1,X_2)]\geqslant E[g_1(X_1,X_2)]$,其中,$g_2$,$g_1$ 满足:1) $g_2(x_1,x_2)-g_1(x_1,x_2)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减;2) $g_2(x_1,x_2)+g_2(x_2,x_1)\geqslant g_1(x_1,x_2)+g_1(x_2,x_1)$,对于任意 $x_1\leqslant x_2$.

建立引理 6,7.

引理 6 对于任意的 $y_1\geqslant y_2$,令 $g_1(x_1,x_2)=I(x_2<x_1\wedge y_2)$,$g_2(x_1,x_2)=I(x_1<x_2\wedge y_1)$,则有 1) $g_2(x_1,x_2)-g_1(x_1,x_2)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减;2) $g_2(x_1,x_2)+g_2(x_2,x_1)\geqslant g_1(x_1,x_2)+g_1(x_2,x_1)$,对于任意 $x_1\leqslant x_2$.

证明:对于 $x_1\leqslant x_2$,容易得 $I(x_2<x_1\wedge y_2)=0$,显然,$g_2(x_1,x_2)-g_1(x_1,x_2)=I(x_1<x_2\wedge y_1)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

对于 $y_1\geqslant y_2$ 和 $x_1\leqslant x_2$,有 $I(x_1<x_2\wedge y_1)\geqslant I(x_1<x_2\wedge y_2)$和 $I(x_2<x_1\wedge y_1)=I(x_2<x_1\wedge y_2)=0$,从而可得 $g_2(x_1,x_2)+g_2(x_2,x_1)-g_1(x_1,x_2)-g_1(x_2,x_1)=I(x_1<x_2\wedge y_1)-I(x_1<x_2\wedge y_2)\geqslant 0$.

引理 7 对于任意给定的 $y_1\geqslant y_2$,令 $g(x_1,x_2)=I(x_1\vee y_2<x_2\wedge y_1)+I(x_2\vee y_1<x_1\wedge y_2)$,则有 $\Delta g(x_1,x_2)=g(x_1,x_2)-g(x_2,x_1)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

证明:1) 固定 $x_2\in[y_2,y_1]$和 $x_1\leqslant x_2$,有 $I(y_1<x_1\wedge y_2)=I(x_2<x_1\wedge y_1)=I(x_1\vee y_1<y_2)=0$,从而可得 $\Delta g(x_1,x_2)=I(x_1\vee y_2<x_2)+I(y_1<x_1\wedge y_2)-I(x_1\vee y_1<y_2)-I(x_2<x_1\wedge y_1)=I(x_1\vee y_2<x_2)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

2) 固定 $x_2\leqslant y_2\leqslant y_1$ 和 $x_1\leqslant x_2$,有 $I(x_1\vee y_2<x_2)=I(y_1<x_1\wedge y_2)=I(x_1\vee y_1<x_2)=0$,从而可得 $\Delta g(x_1,x_2)=I(x_1\vee y_2<x_2)+I(y_1<x_1\wedge y_2)-I(x_1\vee y_1<x_2)-I(y_2<x_1\wedge y_1)=-I(y_2<x_1\wedge y_1)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

3) 固定 $x_2\geqslant y_1$,$x_1\leqslant x_2$,有 $I(x_2<x_1\wedge y_2)=I(x_1\vee y_1<y_2)=I(x_2<x_1\wedge y_1)=0$,可得到 $\Delta g(x_1,x_2)=I(x_1\vee y_2<y_1)+I(x_2<x_1\wedge y_2)-I(x_1\vee y_1<y_2)-I(x_2<x_1\wedge y_1)=I(x_1\vee y_2<y_1)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

综上所述,对于任意的 $y_1\geqslant y_2$,可得 $\Delta g(x_1,x_2)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$递减.

2 主要结论及其证明

假设两个冗余元件的寿命分别为 Y_1,Y_2;两个工作元件的寿命分别为 X_1,X_2;X_1,X_2,Y_1,Y_2 的生存函数分别为$\overline{F}_1(x)$,$\overline{F}_2(x)$,$\overline{G}_1(x)$,$\overline{G}_2(x)$.

2.1 冗余元件热分配

研究具有相依性工作元件的串联系统分配两个热储备冗余元件中的一个热储备冗余元件和分配两个热储备冗余元件之后,冗余系统寿命在随机占优序下的大小关系.

假设分配两个热储备冗余元件中的一个热储备冗余元件后,两个系统寿命分别为

$$U_1=(X_1\vee Y_1)\wedge X_2,\qquad U_2=X_1\wedge(X_2\vee Y_2).$$

假设分配两个热储备冗余元件之后,两个系统寿命分别为

$$V_1=(X_1\vee Y_1)\wedge(X_2\vee Y_2),\qquad V_2=(X_1\vee Y_2)\wedge(X_2\vee Y_1).$$

Romera 等[11]考虑在工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立的条件下,研究两种分配模型的冗余热分配问题,获得冗余系统寿命在随机占优序下的大小关系.其中,一种分配模型是分配两个热储备冗余元件中的一个热储备冗余元件,建立命题 1.

命题 1[11] 假设 X_1,X_2,Y_1,Y_2 之间相互独立,若满足 X_1 和 X_2 具有概率密度函数,$\lambda_1(x)\overline{G}_1(x)\geqslant\lambda_2(x)\overline{G}_2(x)$,其中,$\lambda_1(x)$,$\lambda_2(x)$分别为 X_1,X_2 的概率密度函数与生存函数的比值;或 $X_1\leqslant_{\mathrm{st}}X_2$,$\overline{F}_2(x)\overline{G}_1(x)\geqslant\overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x)$,则有 $U_1\geqslant_{\mathrm{pr}}U_2$.

由命题 1 可知:对于冗余元件寿命和工作元件寿命相互独立的冗余系统,分配两个热储备冗余元件中的一个热储备冗余元件时,将寿命长的热储备冗余元件分配给寿命较短的工作元件可延长系统的寿命.考虑到元件在相同环境下工作,故猜想可以将文献[11]的结论从元件寿命相互独立推广到工作元件

寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的情形上.

由此可得在工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性下的第 1 个结论(定理 1).

定理 1　假设(X_1,X_2)是 LWSAI 的,(X_1,X_2)和(Y_2,Y_1)相互独立,且(Y_2,Y_1)是 SAI 的,则得到 $U_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} U_2$.

证明:由文献[11]的命题 1(a)可知,在几乎处处意义下 $U_1>U_2$ 等价于

$$X_1<X_2 \wedge Y_1.$$

故 $U_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} U_2$ 等价于证明

$$P(X_1<X_2 \wedge Y_1) \geqslant P(X_2<X_1 \wedge Y_2).$$

令 $g_1(x_1,x_2)=I(x_2<x_1 \wedge y_2)$, $g_2(x_1,x_2)=I(x_1<x_2 \wedge y_1)$, $y_1 \geqslant y_2$,由引理 6 可知,g_1, g_2 满足引理 5 的条件 1),2),又因为(X_1,X_2)是 LWSAI 的,可推出 $E[g_2(X_1,X_2)] \geqslant E[g_1(X_1,X_2)]$,即

$$E[I(X_1<X_2 \wedge y_1)] \geqslant E[I(X_2<X_1 \wedge y_2)].$$

对任意的 $y_1 \geqslant y_2$,令

$$t_1(y_2,y_1)=E[I(X_2<X_1 \wedge y_2)], \qquad t_2(y_2,y_1)=E[I(X_1<X_2 \wedge y_1)].$$

由上式可得

$$t_2(y_2,y_1) \geqslant t_1(y_2,y_1). \tag{1}$$

令 $m(x_1,x_2)=I(x_1<x_2 \wedge y_1)+I(x_1<x_2 \wedge y_2)$,显然,$m(x_1,x_2)$关于 $x_1 \in (-\infty,x_2]$递减,因此,可得 $m(x_1,x_2) \in \mathscr{G}_{\mathrm{lws}}^{1:2}(n)$,又因为$(X_1,X_2)$是 LWSAI 的,从而可得 $E[m(X_1,X_2)] \geqslant E[m(X_2,X_1)]$,有

$$E[I(X_1<X_2 \wedge y_1)+I(X_1<X_2 \wedge y_2)] \geqslant E[I(X_2<X_1 \wedge y_1)+I(X_2<X_1 \wedge y_2)],$$

即

$$t_2(y_2,y_1)+t_2(y_1,y_2) \geqslant t_1(y_2,y_1)+t_1(y_1,y_2).$$

结合式(1)可知,t_1, t_2 满足引理 2 的条件 1),2),又因为(Y_2,Y_1)是 SAI 的,可推出 $E[t_2(Y_2,Y_1)] \geqslant E[t_1(Y_2,Y_1)]$,即

$$E[I(X_1<X_2 \wedge Y_1)] \geqslant E[I(X_2<X_1 \wedge Y_2)].$$

从而可得

$$P(X_1<X_2 \wedge Y_1) \geqslant P(X_2<X_1 \wedge Y_2).$$

证毕.

定理 1 说明分配两个热储备冗余元件中的一个热储备冗余元件给具有 LWSAI 寿命的两个工作元件的串联系统时,将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件可以提高系统可靠性. 引入例 1,以说明定理 1 中寿命(Y_2,Y_1)的 SAI 条件是不可去的.

例 1(Clayton copula)　对于任意 $x \in (0,1)$,贝塔分布 $\mathscr{B}(a,b)$的概率密度函数为 $x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a,b)$,其中,参数 $a>0$, $b>0$ 且 $B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$. 假设 X_1, X_2 是失效率分别为 0.001,0.000 1 的指数分布函数,联合概率密度为 $f(x_1,x_2)$, $Y_1 \sim \mathscr{B}(2,2)$, $Y_2 \sim \mathscr{B}(3,3)$, $g_2(y)$和 $g_1(y)$分别表示 Y_2, Y_1 的概率密度函数且(Y_2,Y_1)由 Clayton copula 耦合,有

$$C(u_1,u_2)=(u_1^{-2}+u_2^{-2}-1)^{-0.5}, \qquad 0<u_1,u_2<1.$$

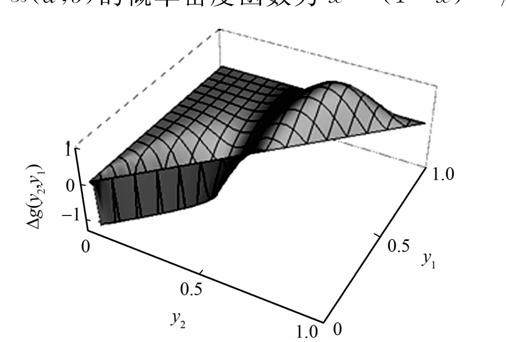

图 1　$\boldsymbol{Y}$ 的概率密度差值($0 \leqslant y_2<y_1 \leqslant 1$)

Fig. 1　Probability density difference of $\boldsymbol{Y}$ ($0 \leqslant y_2<y_1 \leqslant 1$)

$\boldsymbol{Y}$ 的概率密度差值($\Delta g(y_2,y_1)$, $0 \leqslant y_2<y_1 \leqslant 1$),如图 1 所示. 由图 1 可知:$(Y_2,Y_1)$的概率密度函数 $g(y_2,y_1)$关于$(y_2,y_1) \in [0,1]^2$ 不是排列递增的,(Y_2,Y_1)不是 SAI 的(引理 4). X_1, X_2 相互独立且 $X_1 \leqslant_{\mathrm{lr}} X_2$, (X_1,X_2)是 SAI 的(引理 3 的条件 1)),那么(X_1,X_2)也是 LWSAI 的. 由此可得两个系统寿命概率分布函数的差值为

$$P(X_1<X_2 \wedge Y_1)-P(X_2<X_1 \wedge Y_2)=\iiint f(x_1,x_2)g_1(y_1)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-$$

$$\iiint f(x_1,x_2)g_2(y_2)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$
$$\int_0^1\mathrm{d}x_1\Big(\int_{x_1}^{+\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\int_{x_1}^1 g_1(y_1)\mathrm{d}y_1\Big)-\int_0^1\mathrm{d}x_2\Big(\int_{x_2}^{+\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\int_{x_2}^1 g_2(y_2)\mathrm{d}y_2\Big)=$$
$$\int_0^1 0.001\mathrm{e}^{-0.001\,1x_1}(1-3x_1^2+2x_1^3)\mathrm{d}x_1-\int_0^1 0.000\,1\mathrm{e}^{-0.001\,1x_2}(1-10x_2^3+15x_2^4-6x_2^5)\mathrm{d}x_2=$$
$$-0.002\,349\,67\leqslant 0,$$

该例子说明 $U_1\geqslant_{\mathrm{pr}}U_2$ 是不成立的.

对于分配两个热储备冗余元件,Romera 等[11]建立命题 2.

命题 2[11] 假设 X_1,X_2,Y_1,Y_2 相互独立,如果满足 $X_1\leqslant_{\mathrm{hr}}X_2$ 和 $Y_2\leqslant_{\mathrm{hr}}Y_1$,则有 $V_1\geqslant_{\mathrm{pr}}V_2$.

由命题 2 可知:对于冗余元件寿命和工作元件寿命相互独立的冗余系统,分配两个热储备冗余元件时,将寿命较长的冗余分配给寿命较短的工作元件的分配策略较好.将上述结论从元件寿命相互独立推广到工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的情形上,得到第 2 个结论(定理 2).

定理 2 设(X_1,X_2)是 LWSAI 的,(X_1,X_2),(Y_2,Y_1)相互独立且(Y_2,Y_1)是 SAI 的,则 $V_1\geqslant_{\mathrm{pr}}V_2$.

证明:由文献[11]的命题 2(a)可知,在几乎处处意义下 $V_1>V_2$ 等价于

$$X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1 \text{ 或 } X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2.$$

式中:$X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1$ 和 $X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2$ 互斥.

因此,有

$$P(V_1>V_2)=P(X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1)+P(X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2),$$

类似可得

$$P(V_1<V_2)=P(X_1\vee Y_1<X_2\wedge Y_2)+P(X_2\vee Y_2<X_1\wedge Y_1).$$

由此可知,$V_1\geqslant_{\mathrm{pr}}V_2$ 等价于证明

$$P(X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1)+P(X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2)\geqslant P(X_1\vee Y_1<X_2\wedge Y_2)+P(X_2\vee Y_2<X_1\wedge Y_1).$$

令 $g(x_1,x_2)=I(x_1\vee y_2<x_2\wedge y_1)+I(x_2\vee y_1<x_1\wedge y_2)$,$\Delta g(x_1,x_2)=g(x_1,x_2)-g(x_2,x_1)$,$y_1\geqslant y_2$,由引理 7 可知,$g\in\mathscr{G}_{\mathrm{lws}}^{1,2}(n)$.又因$(X_1,X_2)$是 LWSAI 的,可推出 $E[g(X_1,X_2)]\geqslant E[g(X_2,X_1)]$,即

$$E[I(X_1\vee y_2<X_2\wedge y_1)+I(X_2\vee y_1<X_1\wedge y_2)]\geqslant E[I(X_2\vee y_2<X_1\wedge y_1)+I(X_1\vee y_1<X_2\wedge y_2)].$$

对任意的 $y_1\geqslant y_2$,令

$$t(y_2,y_1)=E[I(X_1\vee y_2<X_2\wedge y_1)+I(X_2\vee y_1<X_1\wedge y_2)].$$

由上式可知,对于 $y_1\geqslant y_2$ 时,有

$$t(y_2,y_1)\geqslant t(y_1,y_2).$$

因此,$t\in\mathscr{G}_{\mathrm{s}}^{1,2}(n)$,又因$(Y_2,Y_1)$是 SAI 的,可得 $E[t(Y_2,Y_1)]\geqslant E[t(Y_1,Y_2)]$,即

$$E[I(X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1)+I(X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2)]\geqslant E[I(X_2\vee Y_2<X_1\wedge Y_1)+I(X_1\vee Y_1<X_2\wedge Y_2)].$$

从而可得

$$P(X_1\vee Y_2<X_2\wedge Y_1)+P(X_2\vee Y_1<X_1\wedge Y_2)\geqslant P(X_1\vee Y_1<X_2\wedge Y_2)+P(X_2\vee Y_2<X_1\wedge Y_1).$$

证毕.

由定理 2 可知,分配两个热储备冗余元件给工作元件寿命具有 LWSAI 寿命的串联系统时,将寿命较长的热储备冗余元件分配给寿命较短的工作元件的分配策略较优.

2.2 冗余元件冷分配

给工作元件寿命具有相依性的串联系统分配两个冷储备冗余元件中的一个冷储备冗余元件和分配两个冷储备冗余元件之后,冗余系统寿命在随机占优序下的大小关系.

假设分配两个冷储备冗余元件中的一个冷储备冗余元件后,两个系统寿命分别为

$$W_1=(X_1+Y_1)\wedge X_2,\qquad W_2=X_1\wedge(X_2+Y_2).$$

假设分配两个冷储备冗余元件后,两个系统寿命分别为

$$Z_1=(X_1+Y_1)\wedge(X_2+Y_2),\qquad Z_2=(X_1+Y_2)\wedge(X_2+Y_1).$$

Misra 等[5]考虑在工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立的条件下,研究两种分配模型下的冗余冷分配问题,获得冗余系统寿命在随机占优序下的大小关系.其中,一种分配模型是分配两个冷储备冗

余元件中的一个冷储备冗余元件，建立命题 3.

命题 3[5]　假设 X_1, X_2, Y_1, Y_2 相互独立，如果 X_1 或 X_2 具有凸性的生存函数，那么当 $X_1 \leqslant_{\mathrm{icv}} X_2$ 时，则有 $W_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} W_2$.

由命题 3 可知：对于冗余元件和工作元件寿命相互独立的冗余系统，分配两个冷储备冗余元件中的一个冷储备冗余元件时，将寿命较长的冷储备冗余元件分配给寿命较短的工作元件可延长系统的寿命. 将该结论从元件相互独立推广到工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的情形上，得到第 3 个结论(定理 3).

定理 3　假设(X_1, X_2)是 LWSAI 的，(X_1, X_2)和(Y_2, Y_1)相互独立且(Y_2, Y_1)是 LWSAI 的，则有 $W_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} W_2$.

证明：由文献[5]的定理 2.4 的证明可知，在几乎处处意义下 $W_1 > W_2$ 等价于

$$X_1 < X_2 \text{ 且 } Y_1 > 0.$$

由此可知：$W_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} W_2$ 等价于

$$P(X_1 < X_2, Y_1 > 0) \geqslant P(X_1 > X_2, Y_2 > 0).$$

因此，要证明 $W_1 \geqslant_{\mathrm{pr}} W_2$ 等价于证明 $P(X_1 < X_2, Y_1 > 0) \geqslant P(X_1 > X_2, Y_2 > 0)$.

对于任意的 $y_1 \geqslant y_2$，令

$$t_1(y_2, y_1) = E[I(X_2 < X_1) I(y_2 > 0)], \qquad t_2(y_2, y_1) = E[I(X_1 < X_2) I(y_1 > 0)].$$

当 $x_1 \leqslant x_2$ 时，易得 $I(x_2 < x_1) I(y_2 > 0) = I(x_2 < x_1) I(y_1 > 0) = 0$，可得

$$\begin{aligned}
t_2(y_2, y_1) - t_1(y_2, y_1) = {} & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) I(y_1 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \geqslant x_2} I(x_1 < x_2) I(y_1 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_2 < x_1) I(y_2 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \geqslant x_2} I(x_2 < x_1) I(y_2 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) I(y_1 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_2 < x_1) I(y_1 > 0) f(x_2, x_1) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_2 < x_1) I(y_2 > 0) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) I(y_2 > 0) f(x_2, x_1) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \\
& I(y_1 > 0) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \\
& I(y_2 > 0) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) f(x_2, x_1) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

式中：$P(X_1 > X_2)$是非负的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1 \leqslant x_2} I(x_1 < x_2) f(x_2, x_1) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \geqslant 0.$$

又因为$-I(y_2 > 0)$关于 $y_2 \in (-\infty, y_1)$递减，故可知 $t_2(y_2, y_1) - t_1(y_2, y_1)$关于 $y_2 \in (-\infty, y_1)$递减.

令 $h(x_1, x_2) = I(x_1 < x_2) I(y_2 > 0) + I(x_1 < x_2) I(y_1 > 0)$，易知 $h(x_1, x_2)$关于 $x_1 \in (-\infty, x_2]$递减，因此可得 $h(x_1, x_2) \in \mathscr{G}_{\mathrm{lws}}^{1:2}(n)$，又因为$(X_1, X_2)$是 LWSAI 的，可得 $E[h(X_1, X_2)] \geqslant E[h(X_2, X_1)]$，即

$$E[I(X_1 < X_2) I(y_2 > 0) + I(X_1 < X_2) I(y_1 > 0)] \geqslant E[I(X_1 > X_2) I(y_2 > 0) + I(X_1 > X_2) I(y_1 > 0)],$$

即

$$t_2(y_2, y_1) + t_2(y_1, y_2) \geqslant t_1(y_2, y_1) + t_1(y_1, y_2).$$

对于任意的 $y_1 \geqslant y_2$，综上可知，t_1, t_2 满足引理 5 的条件 1)，2)，又因为(Y_2, Y_1)是 LWSAI 的，可得 $E[t_2(Y_2, Y_1)] \geqslant E[t_1(Y_2, Y_1)]$，即

$$E[I(X_1<X_2)I(Y_1>0)]\geqslant E[I(X_2<X_1)I(Y_2>0)],$$

从而可得

$$P(X_1<X_2,Y_1>0)\geqslant P(X_1>X_2,Y_2>0).$$

证毕.

定理 3 指出分配两个冷储备冗余元件中的一个冷储备冗余元件给具有 LWSAI 寿命的两个元件的串联系统时,将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件可延长系统寿命.为了更好说明定理 3 的结论,引入例 2.

例 2(Clayton copula) 假设 X_1,X_2 是失效率分别为 2,1 的指数分布函数,联合概率密度可表示为 $f(x_1,x_2)$,Y_2,Y_1 服从标准指数分布,$g_2(y)$,$g_1(y)$ 分别表示 Y_2,Y_1 的概率密度函数且 (Y_2,Y_1) 由 Clayton copula 耦合.X_1,X_2 相互独立且 $X_1\leqslant_{\mathrm{lr}}X_2$,可知 (X_1,X_2) 是 LWSAI 的.又因为 $Y_2\leqslant_{\mathrm{rh}}Y_1$,由引理 3 的条件 2)可知 (Y_2,Y_1) 是 LWSAI 的.根据两个系统寿命概率分布函数可知它们的差值为

$$\begin{aligned}&P(X_1<X_2,Y_1>0)-P(X_1>X_2,Y_2>0)=\\&\iiint f(x_1,x_2)g_1(y_1)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-\iiint f(x_1,x_2)g_2(y_2)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\\&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x_1(\int_{x_1}^{+\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\int_0^{+\infty}g_1(y_1)\mathrm{d}y_1)-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x_2(\int_{x_2}^{+\infty}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\int_0^{+\infty}g_2(y_2)\mathrm{d}y_2)=\\&\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-3x_1}\mathrm{d}x_1-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x_2}\mathrm{d}x_2=\frac{1}{3}\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此,$W_1\geqslant_{\mathrm{pr}}W_2$ 成立.

对于分配两个冷储备冗余元件,Misra 等[5]建立以下结论(命题 4).

命题 4[5] 假设 X_1,X_2,Y_1,Y_2 相互独立,如果 X_1 或 X_2 具有凸性的生存函数,那么当 $X_1\leqslant_{\mathrm{icv}}X_2$ 和 $Y_2\leqslant_{\mathrm{hr}}Y_1$ 时,则有 $Z_1\geqslant_{\mathrm{pr}}Z_2$.

由命题 4 可知:对于冗余元件寿命和工作元件寿命相互独立的冗余系统,分配两个冷储备冗余元件时,将寿命长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件的分配策略较好.将该结论从元件寿命相互独立推广到工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的情形上,得到第 4 个结论(定理 4).

定理 4 假设 (X_1,X_2) 是 LWSAI 的,(X_1,X_2) 和 (Y_2,Y_1) 相互独立且 (Y_2,Y_1) 是 LWSAI 的,则有 $Z_1\geqslant_{\mathrm{pr}}Z_2$.

证明:由文献[5]的定理 3.1 的证明可知,在几乎处处意义下 $Z_1>Z_2$ 等价于

$$X_2>X_1,Y_2<Y_1 \text{ 或 } X_2<X_1,Y_2>Y_1.$$

式中:$X_2>X_1,Y_2<Y_1$ 和 $X_2<X_1,Y_2>Y_1$ 互斥.

因此,有

$$P(Z_1>Z_2)=P(X_2>X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2>Y_1),$$

类似可得

$$P(Z_2>Z_1)=P(X_2<X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2>X_1,Y_2>Y_1).$$

由此可知,$Z_1\geqslant_{\mathrm{pr}}Z_2$ 等价于

$$P(X_2>X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2>Y_1)\geqslant P(X_2>X_1,Y_2>Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2<Y_1).$$

因此,要证明 $Z_1\geqslant_{\mathrm{pr}}Z_2$ 等价于证明

$$P(X_2>X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2>Y_1)\geqslant P(X_2<X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2>X_1,Y_2>Y_1).$$

对于任意的 $y_1\geqslant y_2$,令

$$t(y_2,y_1)=E[I(X_2>X_1)I(y_2<y_1)+I(X_2<X_1)I(y_2>y_1)],$$

$$\Delta t(y_2,y_1)=t(y_2,y_1)-t(y_1,y_2).$$

对任意的 $x_1\leqslant x_2,y_1\geqslant y_2$,易得

$$I(x_1>x_2)I(y_2<y_1)=I(x_1>x_2)I(y_1<y_2)=I(x_1<x_2)I(y_1<y_2)=0,$$

可得

$$\Delta t(y_2,y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_1<x_2)I(y_2<y_1)+I(x_2<x_1)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\geqslant x_2}[I(x_1<x_2)I(y_2<y_1)+I(x_2<x_1)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_2<x_1)I(y_2<y_1)+I(x_1<x_2)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\geqslant x_2}[I(x_2<x_1)I(y_2<y_1)+I(x_1<x_2)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_1<x_2)I(y_2<y_1)+I(x_2<x_1)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_2<x_1)I(y_2<y_1)+I(x_1<x_2)I(y_2>y_1)]f(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_2<x_1)I(y_2<y_1)+I(x_1<x_2)I(y_2>y_1)]f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}[I(x_1<x_2)I(y_2<y_1)+I(x_2<x_1)I(y_2>y_1)]f(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$
$$I(y_2<y_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_1\leqslant x_2}I(x_1<x_2)[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

令 $h(x_1)=I(x_1<x_2)$，$w(x_1)=[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)]I(x_1<x_2)$. 对任意的 $y_1\geqslant y_2$，$I(x_1<x_2)$关于 $x_1\in(-\infty,x_2]$单调递减且非负. 又知(X_1,X_2)是 LWSAI 的，可得 $\int_{-\infty}^{x_2}f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\geqslant\int_{-\infty}^{x_2}f(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1$，进而可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}w(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)]I(x_1<x_2)\mathrm{d}x_1=$$
$$\int_{-\infty}^{x_2}[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)]\mathrm{d}x_1\geqslant 0.$$

根据引理 1 可知

$$\int_{-\infty}^{x_2}I(x_1<x_2)[f(x_1,x_2)-f(x_2,x_1)]\mathrm{d}x_1=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x_1)w(x_1)\mathrm{d}x_1\geqslant 0.$$

又因为 $I(y_2<y_1)$显然关于 $y_2\in(-\infty,y_1)$递减，故可推出 $\Delta t(y_2,y_1)$关于 $y_2\in(-\infty,y_1)$递减. 因此，可知 $t\in\mathcal{G}_{\mathrm{lws}}^{1:2}(n)$，又因为$(Y_2,Y_1)$是 LWSAI 的，可推出 $E[t(Y_2,Y_1)]\geqslant E[t(Y_1,Y_2)]$，即

$$E[I(X_2>X_1)I(Y_2<Y_1)+I(X_2<X_1)I(Y_2>Y_1)]\geqslant$$
$$E[I(X_2<X_1)I(Y_2<Y_1)+I(X_2>X_1)I(Y_2>Y_1)].$$

从而可得

$$P(X_2>X_1,Y_2<Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2>Y_1)\geqslant P(X_2>X_1,Y_2>Y_1)+P(X_2<X_1,Y_2<Y_1).$$

证毕.

定理 4 指出分配两个冷储备冗余元件给具有 LWSAI 寿命的两个工作元件的串联系统时，将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件的分配策略较好.

3　结束语

考虑在工作元件寿命和冗余元件寿命相互独立且分别具有相依性的条件下，分别研究串联系统下一个冗余元件和两个冗余元件的冷储备问题和热储备问题. 利用随机序和相依性相关的定义和性质，建立不同冗余分配策略下串联系统在随机占优序下的冗余最优分配，研究表明，将寿命较长的冗余元件分配给寿命较短的工作元件的分配策略较好. 注意到，串联系统是属于特殊的 n 中取 k 系统结构，因此，一个直接的想法是在工作元件寿命具有相依性下，考虑冗余分配之后 n 中取 k 系统的寿命之间的随机占优序关系，这将是今后工作的一个中心.

参考文献：

[1]　BOLAND P J，EL-NEWEIHI E，PROSCHAN F. Active redundancy allocation in coherent systems[J]. Probability in the Engineering and Informational Science，1988，2(3)：343-353. DOI：10.1017/s0269964800000899.

[2]　BOLAND P J，EL-NEWEIHI E，PROSCHAN F. Stochastic order for redundancy allocation in series and parallel

systems[J]. Advances in Applied Probability,1992,24(1):161-171. DOI:10.2307/1427734.

[3] BARLOW R,PROSCHAN F. Statistical theory of reliability and life testing, probability models[M]. [S. l.]:Silver Spring,1981.

[4] SINGH H,MISRA N. On redundancy allocation in systems[J]. Journal of Applied Probability,1994,31(4):1004-1014. DOI:10.2307/3215324.

[5] MISRA N,MISRA K,DHARIYAL I D. Standby redundancy allocations in series and parallel systems[J]. Journal of Applied Probability,2011,48(1):43-55. DOI:10.1239/jap/1300198135.

[6] SHAKED M,SHANTHIKUMAR J G. Optimal allocation of resources to nodes of series and parallel systems[J]. Advances in Applied Probability,1992,24(4):894-914. DOI:10.2307/1427718.

[7] SINGH H,SINGH R S. Optimal allocation of resources to nodes of series systems with respect to failure-rate ordering[J]. Naval Research Logistics,1997,44(1):147-152.

[8] LI Xiaohu,DING Weiyong. On allocation of active redundancies to systems: A brief review[J]. Lecture Notes in Statistics,2013,208:235-254. DOI:10.1007/978-1-4614-6892-9_12.

[9] ZHAO Peng,CHAN P S,NG H K T. Optimal allocation of redundancies in series systems[J]. European Journal of Operational Research,2012,220(3):673-683. DOI:10.1016/j.ejor.2012.02.024.

[10] HU Taizhong,WANG Yashi. Optimal allocation of active redundancies in k-out-of-n systems[J]. Journal of Statistical Planning and Inference,2009,139(10):3733-3737. DOI:10.1016/j.jspi.2009.04.003.

[11] ROMERA R,VALDES J E,ZEQUEIRA R I. Active redundancy allocation in systems[J]. IEEE Transactions on Reliability,2004,53(3):313-318. DOI:10.1109/tr.2004.833309.

[12] BELZUNCE F,MARTINES-PUERTAS H,RUIZ J M. On optimal allocation of redundant components for series and parallel systems of two dependent components[J]. Journal of Statistical Planning and Inference,2011,141(9):3094-3104. DOI:10.1016/j.jspi.2011.03.031.

[13] BELZUNCE F,MARTINES-PUERTAS H,RUIZ J M. On allocation of redundant components for systems with dependent components[J]. European Journal of Operational Research,2013,230(3):573-580. DOI:10.1016/j.ejor.2013.05.004.

[14] YOU Yinping,LI Xiaohu. Ordering k-out-of-n systems with interdependent components and one active redundancy [J]. Communications in Statistics Theory and Methods,2018,47(19):4772-4784. DOI:10.1080/03610926.2018.1445862.

[15] CAI Jun,WEI Wei. Some new notions of dependence with applications in optimal allocation problems[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2014,55(1):200-209. DOI:10.1016/j.insmatheco.2014.01.009.

[16] CAI Jun,WEI Wei. Notions of multivariate dependence and their applications in optimal portfolio selections with dependent risks[J]. Journal of Multivariate Analysis,2015,138:156-169. DOI:10.1016/j.jmva.2014.12.011.

[17] LI Xiaohu,YOU Yinping. Permutation monotone functions of random vectors with applications in financial and actuarial risk management[J]. Advances in Applied Probability,2015,47(1):270-291. DOI:10.1239/aap/1427814591.

[18] SHANTHIKUMAR J G,YAO D. Bivariate characterization of some stochastic orderrelations[J]. Advances in Applied Probability,1991,23(3):642-659. DOI:10.2307/1427627.

[19] YOU Yinping,LI Xiaohu. Functional characterizations of bivariate weak SAI with an application[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2015,64:225-231. DOI:10.1016/j.insmatheco.2015.05.013.

(**责任编辑**:钱筠　**英文审校**:黄心中)