

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202204026



离散非线性薛定谔方程的 1 : 1 共振

张文娴, 邓圣福

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为研究离散非线性薛定谔方程在不动点附近的 1 : 1 共振问题, 将离散非线性薛定谔方程化为差分系统, 差分系统线性算子的特征值为两重根 1; 然后, 利用 Picard 迭代及时间 1 映射, 将差分系统转换为常微分系统, 推导差分系统不动点的稳定性; 最后, 用数学软件模拟差分系统的局部相图. 研究表明: 不动点是局部渐近稳定的.

关键词: 离散非线性薛定谔方程; 差分系统; 1 : 1 共振; Picard 迭代; 退化平衡点; 多项式函数

中图分类号: O 175.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2023)04-0526-07

1 : 1 Resonance of Discrete Nonlinear Schrödinger Equation

ZHANG Wenxian, DENG Shengfu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In order to study 1 : 1 resonance problem of discrete nonlinear Schrödinger equation near the fixed point, firstly, this discrete nonlinear Schrödinger equation is transformed into a difference system, the eigenvalue of the difference system linear operator is double root 1, and then, by the use of Picard iteration and the time-one map, this difference system is converted into an ordinary differential system, the stability of the fixed point of the difference system is obtained. Lastly, the local phase portraits of the difference system are also simulated by mathematical software. The result shows that the fixed point is locally asymptotically stable.

Keywords: discrete nonlinear Schrödinger equation; difference system; 1 : 1 resonance; Picard iteration; degenerate equilibrium; polynomial function

离散非线性薛定谔方程在科学界受到很大的关注, Holstein^[1]在 1959 年首次获得与时间无关的形式. Davydov^[2]在研究蛋白质和其他生物材料能量转移时, 推导出依赖时间的形式. Pelinovsky 等^[3-4]考虑一类离散非线性薛定谔方程的规范形, 在反连续极限下证明了离散亮孤子和暗孤子的稳定性和不稳定性. Fitrakis 等^[5]讨论具有饱和和非线性的动态晶格中的暗孤子, 并比较其与立方非线性晶格中的暗孤子. Melvin 等^[6]考虑具有饱和和非线性的离散薛定谔方程中行波的存在性、稳定性及动力学. Tarasov^[7]得到一个可以看作是连续薛定谔方程精确离散化的方程. Khawaja 等^[8]导出具有 3 次聚焦离散非线性薛定谔方程的 PN(Peierls-Nabarro)势解析公式. 2019 年, Lin 等^[9]研究一类离散非线性薛定谔方程基态解的存在性.

本文考虑如下离散非线性薛定谔方程^[10], 即

$$i \frac{du_n}{dt} + \epsilon(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{\beta |u_n|^2}{1 + \mu_0 |u_n|^2} u_n = 0. \quad (1)$$

式(1)中: $u_n: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\epsilon > 0$, 是晶格步长的平方倒数; 参数 β 和 μ_0 为实数, $\mu_0 > 0$, $\beta < 0$ 指的是散焦

收稿日期: 2022-04-26

通信作者: 邓圣福(1974-), 男, 教授, 博士, 主要从事微分方程和动力系统研究. E-mail: sfdeng@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金面上资助项目(12171171)

情况, $\beta > 0$ 指的是聚焦情况^[11].

哈密顿量为

$$H(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\varepsilon |u_n - u_{n-1}|^2 - \frac{\beta}{\mu_0} |u_n|^2 + \frac{\beta}{\mu_0^2} \ln(1 + \mu_0 |u_n|^2)].$$

考虑方程(1)的实基态解, 令 $u_n(t) = w_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 参考文献[9], 则方程(1)变换为

$$\varepsilon(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) + \frac{\beta w_n^3}{1 + \mu_0 w_n^2} = 0. \tag{2}$$

作 $v_{n+1} = w_n$ 的变换, 则差分系统为

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= w_n, \\ w_{n+1} &= -v_n + 2w_n - \frac{\beta w_n^3}{\varepsilon(1 + \mu_0 w_n^2)}. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

对于系统(3), 可用平面映射 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 表示, 即

$$F(v, w) = \left(w, -v + 2w - \frac{\beta w^3}{\varepsilon(1 + \mu_0 w^2)} \right). \tag{4}$$

显然 $(0, 0)$ 为 F 的不动点, 其 Jacobian 矩阵为 $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. 易验证, $\lambda = 1$ 为其二重特征值,

并对应于 1 : 1 共振问题^[12].

1 预备知识

考虑不动点 $x = \mathbf{0}$ 的映射, 即

$$x \rightarrow f(x) = Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{5}$$

式(5)中: A 是 Jacobian 矩阵; $f^{(k)}(x)$ 是光滑的 k 次多项式向量值函数; $f^{(k)}(x) = O(\|x\|^k)$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k} b_{j_1 j_2 \cdots j_n}^{(k)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}.$$

考虑系统(5)相同维数的平衡点 $x = \mathbf{0}$, 微分系统为

$$\dot{x} = F(x) = Ax + F^{(2)}(x) + F^{(3)}(x) + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{6}$$

式(6)中: A 是矩阵; $F^{(k)}$ 与 $f^{(k)}$ 具有相同性质.

记系统(6)的流为 $\varphi^t(x)$, 有定义 1.

定义 1^[12] 系统(5)称为系统(6)的直到 k 阶近似, 如果系统(5)的泰勒展开式与系统(6)沿着轨道单位进行时间移位, 直到包括 k 阶项重合, 即

$$f(x) = \varphi^1(x) + O(\|x\|^{k+1}).$$

则系统(6)称为近似系统.

用 $\varphi^t(x)$ 在 $x = \mathbf{0}$ 关于 x 的泰勒展开式解决近似问题, 泰勒展开式可用 Picard 迭代得到, 即令

$$x^{(1)}(t) = e^{At}x,$$

$x^{(1)}(t)$ 是线性方程 $\dot{x} = Ax$ 具有初值 $x(0) = x$ 的解, 并定义

$$x^{(k+1)}(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} (F^{(2)}(x^{(k)}(\tau)) + \cdots + F^{(k+1)}(x^{(k)}(\tau))) d\tau. \tag{7}$$

则由式(7)可知, 对任何 $l \leq k, (k+1)$ 次迭代并不改变 $O(\|x\|^l)$ 项. 将 $t=1$ 代入 $x^{(k)}(t)$, 得到 $\varphi^1(x)$ 的直到包括 k 阶项的泰勒展开式, 即

$$\varphi^1(x) = e^A x + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) + \cdots + g^{(k)}(x) + O(\|x\|^{k+1}). \tag{8}$$

由式(5)和式(8)对应的项相同, 可得 $e^A = A, g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x), k = 2, 3, \cdots$.

引理 1 系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 p(x, y). \end{cases}$$

式中: $O(0,0)$ 是系统的孤立平衡点; $h(x),g(x),p(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 的小邻域内解析为 $h(0)=g(0)=0$;
 $a_k\neq 0,k\geq 2;b_n$ 可为 0,当 $b_n\neq 0$ 时, $n\geq 1$.

假设 $k=2m+1,b_n=0$,或者 $b_n\neq 0,n>m$,则当 $a_{2m+1}<0$ 时,平衡点 O 是中心或焦点;当 $a_{2m+1}>0$ 时,平衡点 O 是鞍点.

2 主要结论及其证明

式(4)中的映射 F 可以写为

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta w^3}{\epsilon(1+\mu_0 w^2)} \end{pmatrix}.$$

(9)

系统(9)的特征值 $\lambda=1$ 为二重根,相应的特征向量及其广义特征向量分别为 $(1,1)^T,(-1,0)^T$. 对 (v,w) 作可逆线性变换,即

$$(v,w)^T = \mathbf{P}(y_1,y_2)^T.$$

式中: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

将矩阵 \mathbf{J} 对角化,系统(9)变为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\beta y_1^3}{\epsilon(1+\mu_0 y_1^2)} \\ -\frac{\beta y_1^3}{\epsilon(1+\mu_0 y_1^2)} \end{pmatrix}.$$

(10)

将系统(10)作 3 阶泰勒展开,有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\beta y_1^3}{\epsilon} \\ -\frac{\beta y_1^3}{\epsilon} \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

(11)

定理 1 给出系统(11)对应的常微分系统.

定理 1 系统(11)可表示为

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}^1(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^4).$$

$\boldsymbol{\varphi}^1$ 是平面系统

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{y})$$

(12)

的解. 其中, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2\epsilon}y_1^3 + \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{30\epsilon}y_2^3 + O(\|\mathbf{y}\|^4) \\ -\frac{\beta}{\epsilon}y_1^3 + \frac{3\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{2\epsilon}y_1y_2^2 + O(\|\mathbf{y}\|^4) \end{pmatrix}.$

证明:系统(11)的线性部分 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 是沿着线性系统 $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 的轨道进行单位时间移位. 假设 $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ 的二次项为 $\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A_{2,0}y_1^2 + A_{1,1}y_1y_2 + A_{0,2}y_2^2 \\ B_{2,0}y_1^2 + B_{1,1}y_1y_2 + B_{0,2}y_2^2 \end{pmatrix}$, 其中, $A_{k,l}, B_{k,l}$ 是待定系数,

有 $\mathbf{y}^{(1)}(t) = e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 + t \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{y}^{(1)}(t)$ 是线性方程 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 具有初值 $\mathbf{y}(0) = \tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)^T$ 的解,同理可得

$$\mathbf{y}^{(2)}(t) = e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{y}} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{y}^{(1)}(\tau)) d\tau = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 + t \tilde{y}_2 + a_{2,0} \tilde{y}_1^2 + a_{1,1} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 + a_{0,2} \tilde{y}_2^2 \\ \tilde{y}_2 + b_{2,0} \tilde{y}_1^2 + b_{1,1} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 + b_{0,2} \tilde{y}_2^2 \end{pmatrix}.$$

式中: $a_{2,0} = A_{2,0}t + \frac{B_{2,0}}{2}t^2; a_{1,1} = A_{2,0}t^2 + A_{1,1}t + \frac{B_{2,0}}{3}t^3 + \frac{B_{1,1}}{2}t^2; a_{0,2} = \frac{A_{2,0}}{3}t^3 + \frac{A_{1,1}}{2}t^2 + A_{0,2}t + \frac{B_{2,0}}{12}t^4 +$

$$\frac{B_{1,1}}{6}t^3 + \frac{B_{0,2}}{2}t^2; b_{2,0} = B_{2,0}t; b_{1,1} = B_{2,0}t^2 + B_{1,1}t; b_{0,2} = \frac{B_{2,0}}{3}t^3 + \frac{B_{1,1}}{2}t^2 + B_{0,2}t.$$

将 $t=1$ 代入 $\mathbf{y}^{(2)}(t)$, 得到 $\boldsymbol{\varphi}^1(\tilde{\mathbf{y}})$ 的直到包括 2 阶项的泰勒展开式, 即

$$\boldsymbol{\varphi}^1(\tilde{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + m_{2,0}\tilde{y}_1^2 + m_{1,1}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + m_{0,2}\tilde{y}_2^2 \\ \tilde{y}_2 + n_{2,0}\tilde{y}_1^2 + n_{1,1}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + n_{0,2}\tilde{y}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$$\text{式(13)中: } m_{2,0} = A_{2,0} + \frac{B_{2,0}}{2}; m_{1,1} = A_{2,0} + A_{1,1} + \frac{B_{2,0}}{3} + \frac{B_{1,1}}{2}; m_{0,2} = \frac{A_{2,0}}{3} + \frac{A_{1,1}}{2} + A_{0,2} + \frac{B_{2,0}}{12} + \frac{B_{1,1}}{6} + \frac{B_{0,2}}{2}; n_{2,0} = B_{2,0}; n_{1,1} = B_{2,0} + B_{1,1}; n_{0,2} = \frac{B_{2,0}}{3} + \frac{B_{1,1}}{2} + B_{0,2}.$$

由系统(11)与系统(13)对应的系数相等, 可得 $A_{2,0}=0, A_{1,1}=0, A_{0,2}=0, B_{2,0}=0, B_{1,1}=0, B_{0,2}=0$.

因此, $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ 不含二次项, 假设 $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ 的 3 次项为 $\mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A_{3,0}y_1^3 + A_{2,1}y_1^2y_2 + A_{1,2}y_1y_2^2 + A_{0,3}y_2^3 \\ B_{3,0}y_1^3 + B_{2,1}y_1^2y_2 + B_{1,2}y_1y_2^2 + B_{0,3}y_2^3 \end{pmatrix}$, 其中,

$A_{k,l}, B_{k,l}$ 是待定系数, 有

$$\mathbf{y}^{(3)}(t) = e^{\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{y}} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{y}^{(2)}(\tau))d\tau = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 + t\tilde{y}_2 + a_{3,0}\tilde{y}_1^3 + a_{2,1}\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2 + a_{1,2}\tilde{y}_1\tilde{y}_2^2 + a_{0,3}\tilde{y}_2^3 \\ y_2 + b_{3,0}\tilde{y}_1^3 + b_{2,1}\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2 + b_{1,2}\tilde{y}_1\tilde{y}_2^2 + b_{0,3}\tilde{y}_2^3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{式中: } a_{3,0} = A_{3,0}t + \frac{B_{3,0}}{2}t^2; a_{0,3} = \frac{A_{3,0}}{4}t^4 + \frac{A_{2,1}}{3}t^3 + \frac{A_{1,2}}{2}t^2 + A_{0,3}t + \frac{B_{3,0}}{20}t^5 + \frac{B_{2,1}}{12}t^4 + \frac{B_{1,2}}{6}t^3 + \frac{B_{0,3}}{2}t^2; a_{2,1} = \frac{3}{2}A_{3,0}t^2 + A_{2,1}t + \frac{B_{3,0}}{2}t^3 + \frac{B_{2,1}}{2}t^2; a_{1,2} = A_{3,0}t^3 + A_{2,1}t^2 + A_{1,2}t + \frac{B_{3,0}}{4}t^4 + \frac{B_{2,1}}{3}t^3 + \frac{B_{1,2}}{2}t^2; b_{3,0} = B_{3,0}t; b_{2,1} = \frac{3}{2}B_{3,0}t^2 + B_{2,1}t; b_{1,2} = B_{3,0}t^3 + B_{2,1}t^2 + B_{1,2}t; b_{0,3} = \frac{B_{3,0}}{4}t^4 + \frac{B_{2,1}}{3}t^3 + \frac{B_{1,2}}{2}t^2 + B_{0,3}t.$$

将 $t=1$ 代入 $\mathbf{y}^{(3)}(t)$, 得到 $\boldsymbol{\varphi}^1(\tilde{\mathbf{y}})$ 的直到包括 3 阶项的泰勒展开式, 即

$$\boldsymbol{\varphi}^1(\tilde{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + m_{3,0}\tilde{y}_1^3 + m_{2,1}\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2 + m_{1,2}\tilde{y}_1\tilde{y}_2^2 + m_{0,3}\tilde{y}_2^3 \\ y_2 + n_{3,0}\tilde{y}_1^3 + n_{2,1}\tilde{y}_1^2\tilde{y}_2 + n_{1,2}\tilde{y}_1\tilde{y}_2^2 + n_{0,3}\tilde{y}_2^3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$$\text{式(14)中: } m_{3,0} = A_{3,0} + \frac{B_{3,0}}{2}; m_{2,1} = \frac{3}{2}A_{3,0} + A_{2,1} + \frac{B_{3,0}}{2} + \frac{B_{2,1}}{2}; m_{1,2} = A_{3,0} + A_{2,1} + A_{1,2} + \frac{B_{3,0}}{4} + \frac{B_{2,1}}{3} + \frac{B_{1,2}}{2}; m_{0,3} = \frac{A_{3,0}}{4} + \frac{A_{2,1}}{3} + \frac{A_{1,2}}{2} + A_{0,3} + \frac{B_{3,0}}{20} + \frac{B_{2,1}}{12} + \frac{B_{1,2}}{6} + \frac{B_{0,3}}{2}; n_{3,0} = B_{3,0}; n_{2,1} = \frac{3B_{3,0}}{2} + B_{2,1}; n_{1,2} = B_{3,0} + B_{2,1} + B_{1,2}; n_{0,3} = \frac{B_{3,0}}{4} + \frac{B_{2,1}}{3} + \frac{B_{1,2}}{2} + B_{0,3}.$$

由系统(11)与系统(14)对应系数相等, 有 $A_{3,0} = -\frac{\beta}{2\epsilon}, A_{2,1} = \frac{\beta}{2\epsilon}, A_{1,2} = 0, A_{0,3} = -\frac{\beta}{30\epsilon}, B_{3,0} = -\frac{\beta}{\epsilon},$

$$B_{2,1} = \frac{3\beta}{2\epsilon}, B_{1,2} = -\frac{\beta}{2\epsilon}, B_{0,3} = 0. \text{ 因此, 有 } \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2\epsilon}y_1^3 + \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{30\epsilon}y_2^3 \\ -\frac{\beta}{\epsilon}y_1^3 + \frac{3\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{2\epsilon}y_1y_2^2 \end{pmatrix}. \text{ 系统(11)的常微分系统为}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^3 + \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{30\epsilon}y_2^3 + O(\|\mathbf{y}\|^4), \\ \dot{y}_2 = -\frac{\beta}{\epsilon}y_1^3 + \frac{3\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{2\epsilon}y_1y_2^2 + O(\|\mathbf{y}\|^4). \end{cases}$$

定理 1 证毕.

为了研究系统(12)在平衡点(0,0)附近的稳定性, 先求出该系统的正规形, 变换 T 为

$$T: u_1 = y_1, u_2 = y_2 - \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^3 + \frac{\beta}{2\epsilon}y_1^2y_2 - \frac{\beta}{30\epsilon}y_2^3 + O(\|\mathbf{y}\|^4).$$

则变换 T 将系统(12)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= -\frac{\beta}{\epsilon}u_1^3 + \frac{\beta}{2\epsilon}u_1u_2^2 + O(\|\mathbf{u}\|^4). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

系统(15)可写成引理 1 中的形式,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= -\frac{\beta}{\epsilon} u_1^3 [1+h(u_1)] + b_n u_1^n u_2 [1+g(u_1)] + u_2^2 p(u_1, u_2), \quad n \geq 3. \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由引理 1 有定理 2.

定理 2 当 $\epsilon > 0, \beta < 0$ 时,系统(16)的平衡点 $(0,0)$ 为鞍点;当 $\epsilon > 0, \beta > 0$ 时,系统(16)的平衡点 $(0,0)$ 为中心.

由差分系统(3)与其常微分系统(12)和系统(16)之间的关系,可知定理 3.

定理 3 当 $\epsilon > 0, \beta < 0$ 时,差分系统(3)的不动点 $(0,0)$ 为不稳定的鞍点;当 $\epsilon > 0, \beta > 0$ 时,差分系统(3)的不动点 $(0,0)$ 为稳定的中心,其附近是由不变曲线围成.

3 多项式控制

由定理 3 可知,系统(3)的不动点为不稳定的鞍点或者是由不变曲线围成的中心,在小扰动下,不变曲线可能变为不稳定. 离散系统的多项式函数控制使系统的不动点是局部渐近稳定的^[13-14]. 为了简化,只选择系统(3)的第 2 个方程作为一个控制元^[15]. 系统(3)的控制函数为

$$h_n = A_{1,1} v_n + A_{1,2} w_n.$$

式中: $A_{1,1}, A_{1,2}$ 是控制系数,是由考虑不动点稳定性确定.

加入多项式函数,依旧保留了系统(3)的不动点 $(0,0)$ 的控制系统,即

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= w_n, \\ w_{n+1} &= -v_n + 2w_n - \frac{\beta w_n^3}{\epsilon(1+\mu_0 w_n^2)} + A_{1,1} v_n + A_{1,2} w_n. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

系统(17)在不动点 $(0,0)$ 的 Jacobian 矩阵为 $J_{\text{con}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+A_{1,1} & 2+A_{1,2} \end{pmatrix}$, 对应的特征多项式为 $F_{\text{con}}(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J_{\text{con}})\lambda + \det(J_{\text{con}})$, 其中, $\text{tr}(J_{\text{con}}) = 2+A_{1,2}, \det(J_{\text{con}}) = 1-A_{1,1}$.

定理 4 如果控制系数 $A_{1,1}, A_{1,2}$ 满足

$$\begin{cases} 0 < A_{1,1} < 2, \\ -4 + A_{1,1} < A_{1,2} < -A_{1,1}, \end{cases}$$

则系统(17)的不动点 $(0,0)$ 是局部渐近稳定的.

证明: 为了使不动点 $(0,0)$ 是局部渐近稳定的,只需要证明所有特征值的模小于 1. 这等价于

$$\begin{aligned} |\text{tr}(J_{\text{con}})| - 1 &< \det(J_{\text{con}}) < 1^{[16]}. \text{ 即由 } \begin{cases} -1 - \det(J_{\text{con}}) < \text{tr}(J_{\text{con}}) < 1 + \det(J_{\text{con}}), \\ \det(J_{\text{con}}) < 1. \end{cases} \text{ 求得} \\ &\begin{cases} 0 < A_{1,1} < 2, \\ -4 + A_{1,1} < A_{1,2} < -A_{1,1}. \end{cases} \end{aligned}$$

定理 4 证毕.

4 数值模拟

无控制的情形下,取 $\epsilon = 1, \beta = -0.15, \mu_0 = 4$,可知常微分系统(16)的平衡点为不稳定的鞍点,差分系统(3)的不动点为不稳定的鞍点. 当 $\epsilon = 1, \beta = -0.15$ 时,系统(16)在 $(0,0)$ 附近的相图,如图 1 所示.

当 $\epsilon > 0, \beta < 0$ 时,由系统(3)可知,对任意初值 (v_0, w_0) ,迭代后 (v_n, w_n) 最终只位于第 1 象限或第 3 象限. 当 $\epsilon = 1, \beta = -0.15, \mu_0 = 4$ 时系统(3)在 $(0,0)$ 附近的相图,如图 2 所示. 图 2 中: set 为相图.

取 $\epsilon = 0.5, \beta = 0.5, \mu_0 = 4$,可知常微分系统(16)的平衡点为稳定的中心,系统(3)的不动点为稳定的中心,其附近由不变曲线构成. 当 $\epsilon = 0.5, \beta = 0.5$ 时,系统(16)在 $(0,0)$ 附近的相图,如图 3 所示. 当 $\epsilon = 0.5, \beta = 0.5, \mu_0 = 4$ 时,系统(3)在 $(0,0)$ 附近的相图,如图 4 所示.

在有控制的情形下,取 $\epsilon = 1, \beta = -0.15, \mu_0 = 4, A_{1,1} = 0.15, A_{1,2} = -1.55$ 和 $\epsilon = 0.5, \beta = 0.5, \mu_0 =$

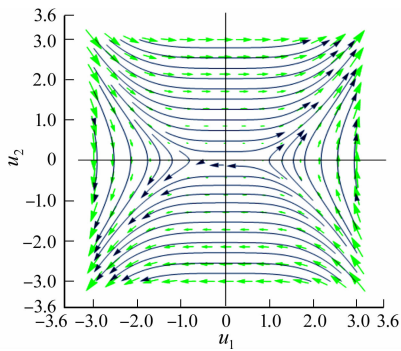


图 1 当 $\epsilon=1, \beta=-0.15$ 时
系统(16)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 1 Phase portrait of system (16)
near $(0,0)$ when $\epsilon=1, \beta=-0.15$

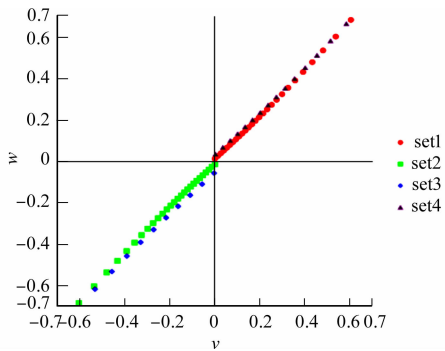


图 2 当 $\epsilon=1, \beta=-0.15, \mu_0=4$ 时
系统(3)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 2 Phase portrait of system (3)
near $(0,0)$ when $\epsilon=1, \beta=-0.15, \mu_0=4$

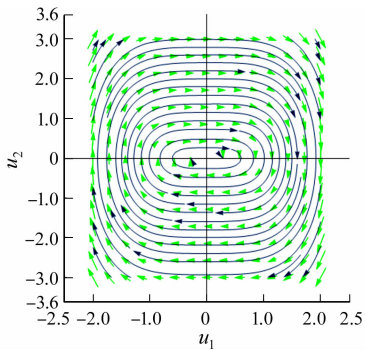


图 3 当 $\epsilon=0.5, \beta=0.5$ 时
系统(16)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 3 Phase portrait of system (16)
near $(0,0)$ when $\epsilon=0.5, \beta=0.5$

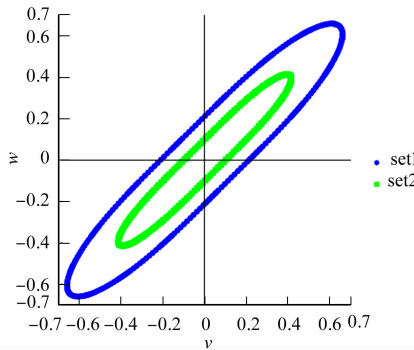


图 4 当 $\epsilon=0.5, \beta=0.5, \mu_0=4$ 时
系统(3)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 4 Phase portrait of system (3)
near $(0,0)$ when $\epsilon=0.5, \beta=0.5, \mu_0=4$

$4, A_{1,1}=0.15, A_{1,2}=-1.55$. 控制系统(17)的不动点是渐近稳定的. 当 $\epsilon=1, \beta=-0.15$ 时, 控制系统(17)在 $(0,0)$ 附近的相图, 如图 5 所示.

当 $\epsilon=0.5, \beta=0.5$ 时控制系统(17)在 $(0,0)$ 附近的相图, 如图 6 所示.

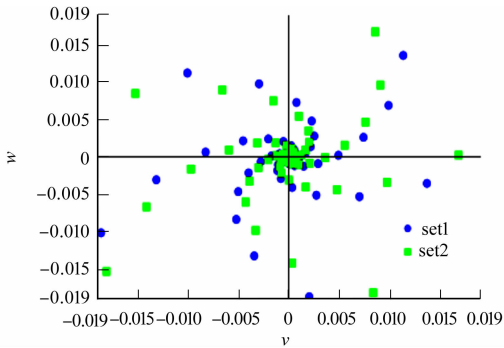


图 5 当 $\epsilon=1, \beta=-0.15$ 时控制
系统(17)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 5 Phase portrait of controlled system
(17) near $(0,0)$ when $\epsilon=1, \beta=-0.15$

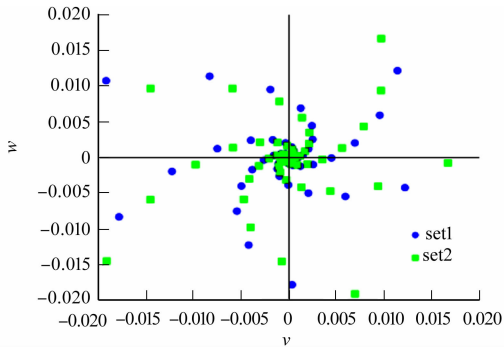


图 6 当 $\epsilon=0.5, \beta=0.5$ 时控制
系统(17)在 $(0,0)$ 附近的相图
Fig. 6 Phase portrait of controlled system
(17) near $(0,0)$ when $\epsilon=0.5, \beta=0.5$

5 结束语

研究离散非线性薛定谔方程在退化不动点处的稳定性. 首先, 利用 Picard 迭代及时间 1 映射将差分系统转化为常微分系统, 差分系统不动点的定性性质等价于常微分系统高阶退化平衡点 $(0,0)$ 的定性

性质,然后,利用正规形及 Briot-Bouquet 变换得到平衡点的性质.从而得到当 $\epsilon > 0, \beta < 0$ 时,差分系统(3)的不动点(0,0)为不稳定的鞍点;当 $\epsilon > 0, \beta > 0$ 时,差分系统(3)的不动点(0,0)为稳定的中心,其附近由不变曲线构成.最后,使用多项式函数控制离散系统,使其不动点(0,0)局部渐近稳定.

参考文献:

- [1] HOLSTEIN T. Studies of polaron motion: Part I. the molecular-crystal model[J]. *Annals of Physics*, 1959, 8(3): 325-342. DOI:10. 1016/0003-4916(59)90002-8.
- [2] DAVYDOVA S. Solitons in quasi-one-dimensional molecular structures[J]. *Soviet Physics Uspekhi*, 1982, 25(12): 898-918. DOI:10. 1070/PU1982v025n12ABEH005012.
- [3] PELINOVSKY D E, KEVREKIDIS P G, FRANTZESKAKIS D T. Stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices[J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 2005, 212(1): 1-19. DOI:10. 1016/j. physd. 2005. 07. 021.
- [4] PELINOVSKY D E, KEVREKIDIS P G. Stability of discrete dark solitons in nonlinear Schrödinger lattices[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(18): 185-206. DOI: 10. 1088/1751-8113/41/18/185206.
- [5] FITRAKIS E P, KEVREKIDIS P G, SUSANTO H, *et al.* Dark solitons in discrete lattices: Saturable versus cubic nonlinearities[J]. *Physical Review E*, 2007, 75(6): 66608. DOI:10. 1103/PhysRevE. 75. 066608.
- [6] MELVIN T R O, CHAMPNEYS A R, KEVREKIDIS P G, *et al.* Travelling solitary waves in the discrete Schrödinger equation with saturable nonlinearity: Existence, stability and dynamics[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, 237(4): 551-567. DOI:10. 1016/j. physd. 2007. 09. 026.
- [7] TARASOV V E. Exact discretization of Schrödinger equation[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(1/2): 68-75. DOI: 10. 1016/j. physleta. 2015. 10. 039.
- [8] KHAWAJA U A, AL-MARZOUQ S M, BAHLOULI H. Peierls-Nabarro potential profile of discrete nonlinear Schrödinger equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 46: 74-80. DOI:10. 1016/j. cnsns. 2016. 10. 019.
- [9] LIN Genghong, ZHOU Zhan, YU Jianshe. Ground state solutions of discrete asymptotically linear Schrödinger equations with bounded and non-periodic potentials[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2019, 32: 1-29. DOI:10. 1007/s10884-019-09743-4.
- [10] ZHU Qing, ZHOU Zhan, WANG Lin. Existence and stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices with hard potentials[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, 403(C): 132326. DOI:10. 1016/j. physd. 2019. 132326.
- [11] MORGANTE A M, JOHANSSON M, KOPIDAKIS G, *et al.* Standing wave instabilities in a chain of nonlinear coupled oscillators[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2002, 162(1): 53-94. DOI:10. 1016/S0167-2789(01)00378-5.
- [12] KUZNETSOV Y A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*[M]. New York: Springer, 1998.
- [13] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [14] YU Pei, CHEN Guanrong. Hopf bifurcation control using nonlinear feedback with polynomial functions[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(5): 1683-1704. DOI:10. 1142/S0218127404010291.
- [15] YU Pei. Controlling and anti-controlling Hopf bifurcations in discrete maps using polynomial functions[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26(4): 1231-1248. DOI:10. 1016/j. chaos. 2005. 03. 009.
- [16] ALI I, SAEED U, DIN Q. Bifurcation analysis and chaos control in a discrete-time plant quality and larch budmoth interaction model with Ricker equation[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, 42(18): 7395-7410. DOI:10. 1002/mma. 5837.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)