

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202203023



对流扩散方程最优控制问题的 重心插值配点格式

黄蓉, 姚梦丽, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为了讨论对流扩散方程最优控制问题的重心插值配点格式, 首先, 借助 Lagrange 乘子法, 推导出由状态方程、伴随方程、最优性方程构成的最优性条件. 其次, 在空间 x, y 方向均运用重心插值配点格式离散方程组, 并给出该配点格式的相容性分析. 最后, 数值实验验证格式的有效性, 与经典有限差分格式比较, 重心插值配点格式用较少的节点数就能具有很高的精度.

关键词: 重心插值配点格式; 对流扩散方程; 最优控制问题; 误差分析; Lagrange 乘子法

中图分类号: O 241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)03-0407-10

Barycentric Interpolation Collocation Format for Optimal Control Problem of Convection-Diffusion Equation

HUANG Rong, YAO Mengli, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The barycentric interpolation collocation format for optimal control problem of convection-diffusion equation is considered. Firstly, the optimality conditions which are composed of the state equation, adjoint equation and optimality equation are derived by Lagrange multiplier method. Secondly, the barycentric interpolation collocation format is used to discretize equations in the directions of x and y in space, and the consistent error analysis of the collocation format is also given. Finally, numerical experiments verify the effectiveness of the collocation format. Compared with the classical finite difference format, the barycentric interpolation collocation format has higher accuracy with fewer node numbers.

Keywords: barycentric interpolation collocation format; convection-diffusion equation; optimal control problem; error analysis; Lagrange multiplier method

对流扩散方程描述的最优控制问题被广泛应用于许多领域, 如水污染处理^[1]、空气污染^[2]等. 对流扩散方程模拟一个化学或生物过程, 涉及的物种相互之间会发生扩散、对流, 因此, 寻找稳定、高效的数值求解方法具有十分重要的实际意义. 目前, 许多学者已经提出许多数值求解格式, 如间断伽辽金方法^[3]、杂交间断伽辽金方法^[4]、有限元方法^[5-8]、双线性伪谱方法^[9]、勒让德-伽辽金谱方法^[10-11]、自适应间断伽辽金方法^[12]、谱伽辽金近似方法等^[13-15]. 本文主要研究由对流扩散方程控制的最优控制问题.

1 预备知识

设区域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n=1, 2$) 是带有利普希茨边界 $\partial\Omega$ 的空间有界域. 考虑以下无约束最优控制问题, 即

收稿日期: 2022-03-02

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: zfwmath@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(ZQN-702)

$$\left. \begin{aligned} \min J(v,u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v - \tilde{v})^2 d\Omega + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \\ \text{s. t} \quad & -\epsilon \Delta v + \alpha \cdot \nabla v = f + u, \quad v \in \Omega, \\ & v = 0, \quad v \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: Δ 为 Laplace 算子; ∇ 为梯度算子; v, \tilde{v}, u 分别为状态变量、期望变量、控制变量; ϵ 为扩散系数, $\epsilon > 0$; γ 为给定的正则化参数, $\gamma > 0$.

重心插值配点格式广泛应用于数值求解各类微分方程,如平面弹性问题^[16]、Volterra 积分方程^[17]、Allen-Cahn 方程^[18-19]、Burgers 方程^[20]. 重心插值配点格式是一种新型的无网格方法,能以机器精度任意逼近光滑函数,具有操作简单、计算有效、精度高等优势. 然而,对重心插值配点格式求解微分方程的研究相对较少. Yi 等^[21]采用重点插值配点格式求解时间分数阶电报方程,并给出理论分析. 文献[22-23]采用重心有理插值配点格式分别求解热传导方程、电报方程,并给出格式的误差分析. Darehmiraki 等^[24]基于重心插值配点格式,求解椭圆对流扩散方程的最优控制问题,并证明了配点格式的收敛性.

2 重心插值配点格式

2.1 重心 Lagrange 插值配点格式

假设存在 $n+1$ 个互异节点 x_j , 函数 $f(x)$ 在节点 x_j 处的函数值为 $f_j (j=0, 1, \cdots, n)$. 令插值多项式 $p(x)$ 在节点处成立, $p(x_j) = f_j$, 根据多项式的唯一性, $p(x)$ 可改写为 Lagrange 插值形式, 即

$$p(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) f_j, \quad L_j(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}, \quad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{2}$$

式(2)中: $L_j(x)$ 是 Lagrange 插值的基函数,满足基函数的性质,有

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases} \tag{3}$$

定义 $l(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 重心权 $\omega_j = 1 / \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)$, 故 Lagrange 插值的基函数可改写为

$$L_j(x) = \frac{l(x) \omega_j}{x - x_j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

将式(4)代入式(2), 可得

$$p(x) = l(x) \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j. \tag{5}$$

当 $p(x) = 1$ 时, 有

$$1 = l(x) \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}. \tag{6}$$

结合式(5), (6), 则重心 Lagrange 插值公式为

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}} = \sum_{j=0}^n \beta_j(x) f_j. \tag{7}$$

2.2 重心有理插值配点格式

根据一维重心插值配点格式的推导过程, 对于定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$, 给定 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使 $f(x_j) = f_j (j=0, 1, \cdots, n)$ 成立. 选定整数 $d (0 \leq d \leq n)$, 设 $r(x)$ 为

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-d} \varphi_k(x) z_k(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \varphi_k(x)}. \tag{8}$$

式(8) 中: $\varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x-x_k)\cdots(x-x_{k+d})}; z_k(x) = \sum_{j=k}^{k+d} \prod_{j=k, j \neq i}^{k+d} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} f_j.$

将 $z_k(x)$ 改写为 Lagrange 插值公式, 即

$$\sum_{k=0}^{n-d} \varphi_k(x) z_k(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j} f_j. \tag{9}$$

式(9) 中: $\omega_j = \sum_{k \in J_j} (-1)^k \prod_{i=k, i \neq j}^{k+d} \frac{1}{x_j-x_i}$, 指标集 $J_j = \{k \in J \mid j-d \leq k \leq j\}, J = \{0, 1, \cdots, n-d\}.$

由插值常数恒为 1, 即 $1 = \sum_{i=k}^{k+d} \prod_{j=k, j \neq i}^{k+d} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ 成立, 故

$$\sum_{k=0}^{n-d} \varphi_k(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j}. \tag{10}$$

结合式(8)~(10), 重心有理插值公式为

$$r(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j}} = \sum_{j=0}^n \beta_j(x) f_j. \tag{11}$$

式(11) 中: 基函数 $\beta_j(x) = \frac{\omega_j}{x-x_j} / \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x-x_j}.$

2.3 重心插值配点格式的微分矩阵

设 $p(x)$ 为函数 $f(x)$ 的重心 Lagrange 插值公式, 则 $p(x)$ 关于 x 求导, 可得

$$p^{(\mu)}(x_i) = \sum_{j=0}^n \beta_j^{(\mu)}(x_i) f_j = \sum_{j=0}^n D_{i,j}^{(\mu)} f_j, \quad \mu = 1, 2, \cdots, N. \tag{12}$$

式(12) 中: 微分矩阵元素 $D_{i,j}^{(\mu)}$ 的具体表达式参见文献[25].

3 对流扩散方程最优控制问题的离散格式

3.1 最优性条件

针对对流扩散方程最优控制问题, 采用 Lagrange 乘子求导数法, 推出最优控制问题的最优性条件. 对于最优控制问题(1), 定义 p 为区域 Ω 上的 Lagrange 乘子, 即

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v-\tilde{v})^2 d\Omega + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega + \int_{\Omega} (-\epsilon \Delta v + \alpha \cdot \nabla v - f - u) p d\Omega + \int_{\partial\Omega} v p ds. \tag{13}$$

对式(13) 进行泛函变分, 对 p 求 Frechet 导数, 推导得出状态方程, 即

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon \Delta v + \alpha \cdot \nabla v &= f + u, & v \in \Omega, \\ v &= 0, & v \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

对 v 求 Frechet 导数, 导出伴随方程为

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon \Delta p - \alpha \cdot \nabla p &= v - \tilde{v}, & p \in \Omega, \\ p &= 0, & p \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

类似地, 对 u 求 Frechet 导数, 则最优性方程为

$$\gamma u - p = 0. \tag{16}$$

将对流扩散最优控制问题转化为代数方程组, 即

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon \Delta v + \alpha \cdot \nabla v &= f + u, & v \in \Omega, \\ v &= 0, & v \in \partial\Omega. \\ -\epsilon \Delta p - \alpha \cdot \nabla p &= v - \tilde{v}, & p \in \Omega, \\ p &= 0, & p \in \partial\Omega, \\ \gamma u - p &= 0, & u \in \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

3.2 对流扩散方程最优控制问题的离散格式

采用重心插值配点格式离散方程组, 求解对流扩散方程最优控制问题的最优化条件, 选取区域 $\Omega =$

$[0,1] \times [0,1], \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2)^T$, 则化简后的最优控制系统为

$$\left. \begin{aligned} & -\epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{\gamma} p=f, \quad v \in \Omega, \\ & v=0, \quad v \in \partial \Omega, \\ & -\epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x}-\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y}-v=-\tilde{v}, \quad p \in \Omega, \\ & p=0, \quad p \in \partial \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

令空间 x, y 方向的节点分别是 M, N , 设 $v(x, y), p(x, y)$ 的重心插值为

$$v(x, y)=\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i(x) \varphi_j(y) v_{i, j}, \quad p(x, y)=\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i(x) \varphi_j(y) p_{i, j} . \tag{19}$$

式(19)中: $\psi_i(x), \varphi_j(y)$ 分别是空间 x, y 方向上的基函数; $v_{i, j}=v\left(x_i, y_j\right) ; p_{i, j}=p\left(x_i, y_j\right)$.

考虑 $v(x, y)$ 对空间方向变量 x, y 求 $k+t$ 阶偏导数, 即

$$\frac{\partial^{k+t} v}{\partial x^k \partial y^t}=\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(k)}(x) \varphi_j^{(t)}(y) v_{i, j}, \quad k, t=0,1, \cdots, N . \tag{20}$$

偏导数在节点 $\left(x_p, y_r\right)$ 处的函数近似值为

$$v^{(k, t)}\left(x_p, y_r\right)=\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(k)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(t)}\left(y_r\right) v_{i, j}, \quad p=0,1, \cdots, M, \quad r=0,1, \cdots, N . \tag{21}$$

类似地, $p(x, y)$ 对空间方向变量 x, y 求 $k+t$ 阶偏导数, 则偏导数在节点 $\left(x_p, y_r\right)$ 处的近似值为

$$p^{(k, t)}\left(x_p, y_r\right)=\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(k)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(t)}\left(y_r\right) p_{i, j}, \quad p=0,1, \cdots, M, \quad r=0,1, \cdots, N . \tag{22}$$

将式(21), (22)代入式(18)中, 则对流扩散最优控制系统的重心插值配点格式离散格式为

$$\left. \begin{aligned} & -\epsilon \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(2)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(0)}\left(y_r\right) v_{i, j}-\epsilon \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(0)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(2)}\left(y_r\right) v_{i, j}+\alpha_1 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(1)}\left(x_p\right) \cdot \\ & \quad \varphi_j^{(0)}\left(y_r\right) v_{i, j}+\alpha_2 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(0)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(1)}\left(y_r\right) v_{i, j}-\frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i\left(x_p\right) \varphi_j\left(y_r\right) p_{i, j}=f_{i, j}, \\ & -\epsilon \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(2)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(0)}\left(y_r\right) p_{i, j}-\epsilon \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(0)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(2)}\left(y_r\right) p_{i, j}-\alpha_1 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(1)}\left(x_p\right) \cdot \\ & \quad \varphi_j^{(0)}\left(y_r\right) v_{i, j}-\alpha_2 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i^{(0)}\left(x_p\right) \varphi_j^{(1)}\left(y_r\right) p_{i, j}-\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \psi_i\left(x_p\right) \varphi_j\left(y_r\right) v_{i, j}=-\tilde{v}_{i, j} . \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

式(23)的微分矩阵形式为

$$\left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{C I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{G} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} v \\ p \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} f \\ -\tilde{v} \end{array}\right] . \tag{24}$$

式(24)中: $\boldsymbol{H}=-\operatorname{diag}\{\epsilon\} \cdot\left(\boldsymbol{D}^{(2)}+\boldsymbol{C}^{(2)}\right)+\operatorname{diag}\left\{\alpha_1\right\} \cdot \boldsymbol{D}^{(1)}+\operatorname{diag}\left\{\alpha_2\right\} \boldsymbol{C}^{(1)} ; \boldsymbol{G}=-\operatorname{diag}\{\epsilon\} \cdot\left(\boldsymbol{D}^{(2)}+\boldsymbol{C}^{(2)}\right)-\operatorname{diag}\left\{\alpha_1\right\} \cdot \boldsymbol{D}^{(1)}-\operatorname{diag}\left\{\alpha_2\right\} \boldsymbol{C}^{(1)} ; \boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\left\{-\frac{1}{\gamma}\right\}$.

3.3 相容性分析

设函数 $u(x, y)$ 运用重心 Lagrange 插值法逼近的数值解为 $p_{K, S}(x, y)$, 误差函数 $e(x, y)$ 为

$$e(x, y)=u(x, y)-p_{K, S}(x, y) . \tag{25}$$

重心 Lagrange 插值公式的逼近性质, 如引理 1 所示.

引理 1^[21] 若 $u(x, y) \in C^{(n+1)}(\Omega), \Omega$ 是非空、具有 Lipschitz 连续边界的开区域, 则

$$|e(x, y)| \leqslant\left\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\right\|_{\infty}\left\{c_1\left(\frac{\mathrm{e} L_x}{2 K}\right)^K+c_2\left(\frac{\mathrm{e} L_y}{2 S}\right)^S\right\} . \tag{26}$$

式(26)中: $K+1, S+1$ 为空间 x, y 方向的节点数; $L_x=\frac{b-a}{2} ; L_y=\frac{d-c}{2} ; c_1, c_2$ 是常数; e 为自然对数.

类似地, 有

$$\left. \begin{aligned} |e_x(x, y)| &\leq \|u^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ \tilde{c}_1 \left(\frac{eL_x}{2(K-1)} \right)^{K-1} + c_2 \left(\frac{eL_y}{2S} \right)^S \right\}, \\ |e_y(x, y)| &\leq \|u^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2K} \right)^K + \tilde{c}_2 \left(\frac{eL_y}{2(S-1)} \right)^{S-1} \right\}, \\ |e_{x,x}(x, y)| &\leq \|u^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(K-2)} \right)^{K-2} + c_2 \left(\frac{eL_y}{2S} \right)^S \right\}, \\ |e_{y,y}(x, y)| &\leq \|u^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2K} \right)^K + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(S-2)} \right)^{S-2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

根据引理 1, 可得定理 1.

定理 1 设对流扩散方程最优控制问题中的状态变量函数、伴随变量函数分别是 $v(x, y), p(x, y)$, 且 $v(x, y), p(x, y) \in C^{(n+1)}(\Omega), \Omega = [a, b] \times [c, d]$, 数值解分别是 $v(x_k, y_s), p(x_k, y_s)$, 则

$$\left. \begin{aligned} |v(x, y) - v(x_k, y_s)| &\leq C \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(k-2)} \right)^{k-2} + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-2)} \right)^{s-2} \right\}, \\ |p(x, y) - p(x_k, y_s)| &\leq C \|p^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(k-2)} \right)^{k-2} + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-2)} \right)^{s-2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

证明: 定义线性微分算子 D_1, D_2 为

$$D_1 v(x, y) + D_2 p(x, y) = f(x, y) - \tilde{v}(x, y). \quad (29)$$

式(29)对应的离散格式为

$$D_1 v(x_k, y_s) + D_2 p(x_k, y_s) = f(x_k, y_s) - \tilde{v}(x_k, y_s). \quad (30)$$

为简化分析过程, 仅先分析与状态量函数 $v(x, y)$ 相关的项, 将式(29), (30)相减, 可得

$$\begin{aligned} D_1 v(x, y) - D_1 v(x_k, y_s) &= -\epsilon [v(x, y) - v_{x,x}(x_k, y_s)] - \epsilon [v(x, y) - v_{y,y}(x_k, y_s)] + \\ &\quad \alpha_1 [v(x, y) - v_x(x_k, y_s)] + \alpha_2 [v(x, y) - v_y(x_k, y_s)] - \\ &\quad [v(x, y) - v(x_k, y_s)] = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5. \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)中: $R_1 = -\epsilon [v(x, y) - v_{x,x}(x_k, y_s)]$; $R_2 = -\epsilon [v(x, y) - v_{y,y}(x_k, y_s)]$; $R_3 = \alpha_1 [v(x, y) - v_x(x_k, y_s)]$; $R_4 = \alpha_2 [v(x, y) - v_y(x_k, y_s)]$; $R_5 = -[v(x, y) - v(x_k, y_s)]$.

根据引理 1, 有

$$\left. \begin{aligned} |R_1| &= -\epsilon \cdot |v_{x,x}(x, y) - v_{x,x}(x_k, y) + v_{x,x}(x_k, y) - v_{x,x}(x_k, y_s)| \leq \\ &\quad \epsilon \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(k-2)} \right)^{k-2} + c_2 \left(\frac{eL_y}{2s} \right)^s \right\}, \\ |R_3| &= \alpha_1 |v_x(x, y) - v_x(x_k, y) + v_x(x_k, y) - v_x(x_k, y_s)| \leq \\ &\quad \alpha_1 \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ \tilde{c}_1 \left(\frac{eL_x}{2(k-1)} \right)^{k-1} + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2s} \right)^s \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

类似地, 可得

$$\left. \begin{aligned} R_2 &\leq \epsilon \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2k} \right)^k + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-2)} \right)^{s-2} \right\}, \\ R_4 &\leq \alpha_2 \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2k} \right)^k + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-1)} \right)^{s-1} \right\}, \\ R_5 &\leq \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2k} \right)^k + c_2 \left(\frac{eL_y}{2s} \right)^s \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

令 $C = \max \left\{ \epsilon, \alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\gamma} \right\}$, 结合式(32), (33), 有

$$|v(x, y) - v(x_k, y_s)| \leq C \|v^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(k-2)} \right)^{k-2} + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-2)} \right)^{s-2} \right\}. \quad (34)$$

同理, 可推得

$$|p(x, y) - p(x_k, y_s)| \leq C \|p^{(n+1)}\|_{\infty} \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(k-2)} \right)^{k-2} + c_2^* \left(\frac{eL_y}{2(s-2)} \right)^{s-2} \right\}. \quad (35)$$

文献[22]的定理的推导过程类似定理 1, 采用重心有理配点格式求解二维最优控制问题的相容性误差, 即定理 2.

定理 2 设 $v(x,y), p(x,y)$ 分别是对流扩散控制问题中的状态量函数、伴随量函数, $v(x,y), p(x,y) \in C^{(n+1)}(\Omega), \Omega=[a,b] \times [c,d], v(x_k,y_s), p(x_k,y_s)$ 分别是 $v(x,y), p(x,y)$ 运用重心有理配点格式求解的数值解, 则

$$\left. \begin{aligned} |v(x,y)-v(x_k,y_s)| &\leqslant C(h_1^{q_1-1}+h_2^{q_2-1}), \\ |p(x,y)-p(x_k,y_s)| &\leqslant C(h_1^{q_1-1}+h_2^{q_2-1}). \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

式(36)中: $C=c \cdot \max\{\epsilon, \alpha_1, \alpha_2, (1/\gamma)\}$, c 为常数; h_1, h_2 分别是空间 x, y 方向的步长.

4 数值算例

4.1 算例 1

为便于分析, 定义最大相对误差为

$$e(u)=\frac{\|u_e-u_c\|_\infty}{\|u_c\|_\infty}.\tag{37}$$

式(37)中: $\|\cdot\|$ 表示无穷范数; u_e, u_c 是方程的真解和数值解.

一维、二维的最优控制问题分别采用切比雪夫重心插值配点格式、有限差分法两种离散方法, 比较算例的数值结果, 验证配点格式的有效性及其高精度. 对于一维最优控制问题, 选取的真解为

$$v(x)=x(x-1)e^x, \quad p(x)=2x^2(x-1)e^x.\tag{38}$$

选取区域 $\Omega=[0,1], \epsilon=10^{-6}, \alpha=10^{-3}, \gamma=10^{-4}$, 令节点数为 $M=12$, 重心 Lagrange 插值配点格式、重心有理插值配点格式的数值解图, 分别如图 1, 2 所示.

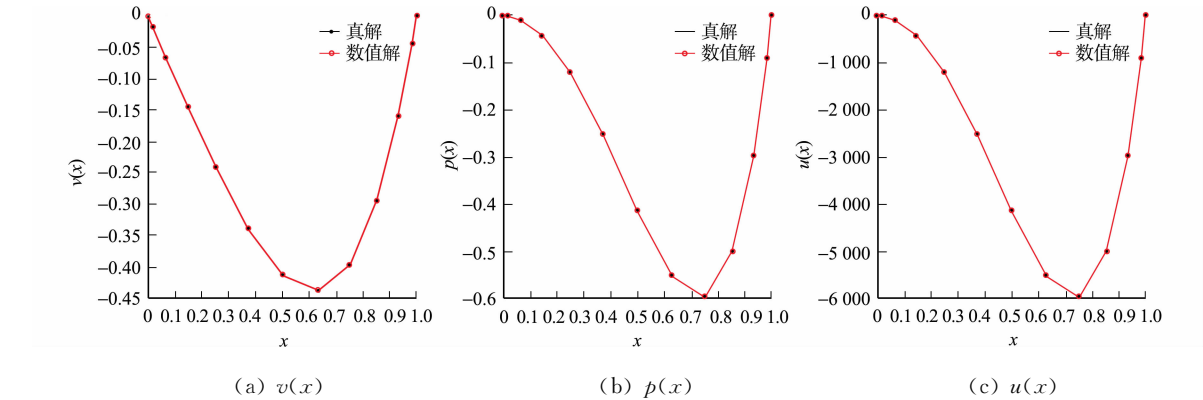


图 1 重心 Lagrange 插值配点格式的数值解图 ($M=12$)

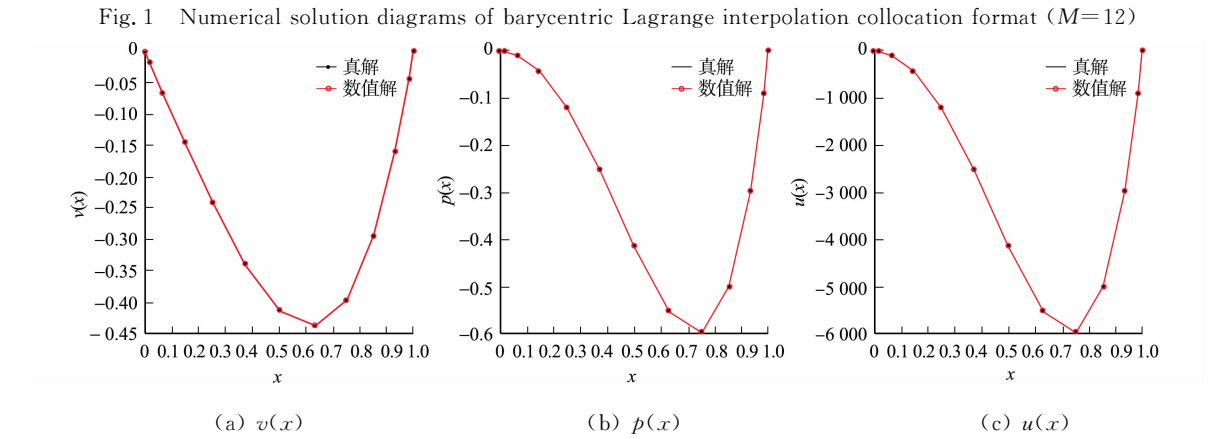


图 2 重心有理插值配点格式的数值解图 ($M=12$)

Fig. 2 Numerical solution diagram of barycentric rational collocation format ($M=12$)

由图 1, 2 可知: 对于状态量、伴随量、控制量, 采用两种重心插值配点格式求解的数值解图均逼近解析解图, 表明该数值算法是稳定的.

分别选取 ϵ, α, γ 的不同剖分, 重心 Lagrange 插值配点格式、重心有理配点格式、差分法的最大相对误差 (e), 如表 1, 2, 3 所示. 状态量的收敛阶 (R) 对比, 如图 3 所示.

表 1 重心 Lagrange 插值配点格式的最大相对误差(M)
Tab. 1 Maximum relative error barycentric of
Lagrange interpolation collocation format (M)

M	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
4	$1.651\ 3\times10^{-4}$	$1.860\ 9\times10^{-9}$	$1.860\ 9\times10^{-9}$
6	$1.174\ 4\times10^{-6}$	$7.039\ 4\times10^{-12}$	$7.039\ 4\times10^{-12}$
8	$2.989\ 6\times10^{-9}$	$1.505\ 3\times10^{-14}$	$1.505\ 3\times10^{-14}$
10	$1.048\ 8\times10^{-12}$	$3.863\ 8\times10^{-16}$	$3.165\ 2\times10^{-16}$
12	$2.557\ 1\times10^{-15}$	$3.729\ 5\times10^{-16}$	$3.055\ 0\times10^{-16}$

表 3 差分法求解的最大相对误差(M)
Tab. 3 Maximum relative error solved
by difference format (M)

M	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
4	$1.520\ 6\times10^{-3}$	$2.741\ 0\times10^{-8}$	$2.741\ 0\times10^{-8}$
8	$4.962\ 7\times10^{-4}$	$8.653\ 6\times10^{-9}$	$8.653\ 6\times10^{-9}$
16	$1.454\ 1\times10^{-4}$	$2.460\ 7\times10^{-9}$	$2.460\ 7\times10^{-9}$
32	$3.931\ 4\times10^{-5}$	$6.706\ 3\times10^{-10}$	$6.706\ 3\times10^{-10}$
64	$1.021\ 9\times10^{-5}$	$1.818\ 7\times10^{-10}$	$1.818\ 7\times10^{-10}$

由表 1~3 可知:采用重心插值配点格式求解变量比差分法求解时的误差更小,剖分少量节点,可达到格式高精度.当选取的节点数相同时,采用重心 Lagrange 插值比重心有理插值求解方程的误差更小.由图 3 可知:差分法格式的收敛阶是二阶,配点格式满足指数收敛性质.

4.2 算例 2

$$v(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y),\quad p(x,y)=\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

(39)

针对二维最优控制问题,选取真解为三角函数,则式(24)中 f,\tilde{v} 表达式为

$$\left. \begin{aligned} f &= (2\varepsilon\pi^2 - \pi^2/\gamma)\sin(\pi x)\sin(\pi y) - \alpha_1\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) - \alpha_2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi y), \\ \tilde{v} &= (-2\varepsilon\pi^4 + 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y) + \alpha_1\pi^3\cos(\pi x)\sin(\pi y) + \alpha_2\pi^3\sin(\pi x)\cos(\pi y). \end{aligned} \right\}$$

(40)

选取区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1],\alpha=(1,1)^T,\gamma=0.5,\varepsilon=0.1$,令节点数为 $M=16,N=16$,则重心 Lagrange 插值配点格式、重心整理插值配点格式的精确解、数值解与误差,分别如图 4,5 所示.由图 4,5 可知:采用两种重心插值配点格式求解状态量、伴随量的精确解图像与数值解图像逼近,且最大相对误差精度高,可达到 10^{-13} 量级,表明两种重心插值配点格式均稳定.

分别选取不同的剖分节点数,重心 Lagrange 插值配点格式、重心有理配点格式、差分法的最大相对误差,如表 4,5,6 所示.由表 4,5 可知:最大相对误差可达到 10^{-11} 量级,表明两种重心插值配点格式均具有高精度,且前者的求解效果略优于后者.随着剖分变细,3 种变量的最大相对误差在逐渐减少.由表 6 可知:选取 $M=64,N=64$,状态量、伴随量、控制量的最大相对误差分别达到 $10^{-3},10^{-4},10^{-4}$ 量级;与

表 2 重心有理配点格式的最大相对误差(M)
Tab. 2 Maximum relative error of
barycentric rational collocation format (M)

M	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
4	$1.651\ 3\times10^{-4}$	$1.860\ 9\times10^{-9}$	$1.860\ 9\times10^{-9}$
6	$2.150\ 9\times10^{-5}$	$2.087\ 2\times10^{-10}$	$2.087\ 2\times10^{-10}$
8	$1.260\ 3\times10^{-7}$	$8.27\ 34\times10^{-13}$	$8.274\ 6\times10^{-13}$
10	$9.167\ 2\times10^{-10}$	$4.443\ 3\times10^{-15}$	$4.431\ 3\times10^{-15}$
12	$7.081\ 0\times10^{-11}$	$5.593\ 9\times10^{-16}$	$6.110\ 1\times10^{-16}$

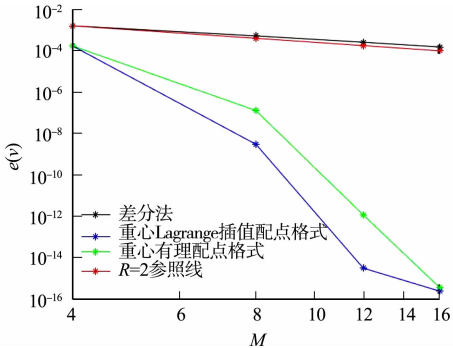
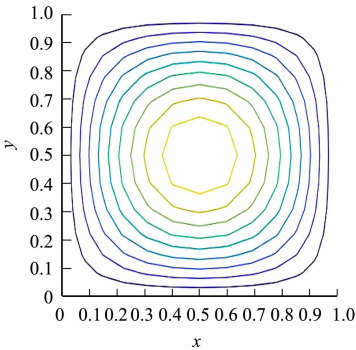
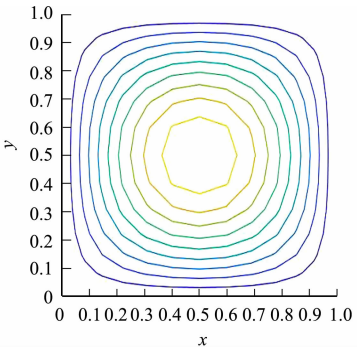


图 3 状态量的收敛阶对比(m)

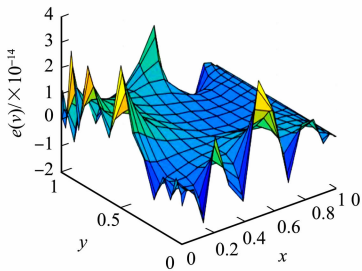
Fig. 3 Comparison of state function convergence rate (m)



(a) 状态量的精确解



(b) 状态量的数值解



(c) 状态量的误差

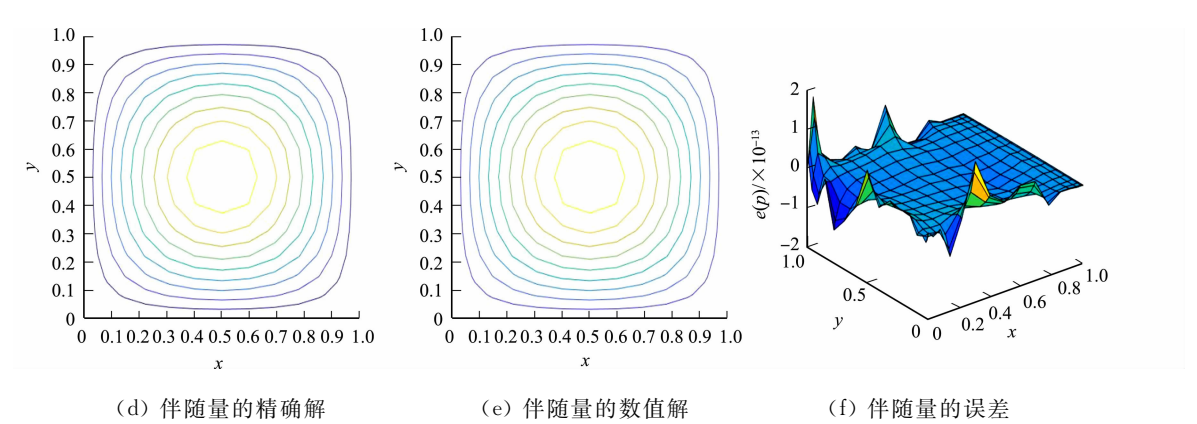


图 4 重心 Lagrange 插值配点格式精确解、数值解与误差($M=16,N=16$)

Fig. 4 Exact solution, numerical solution and error of barycentric Lagrange collocation format ($M=16,N=16$)

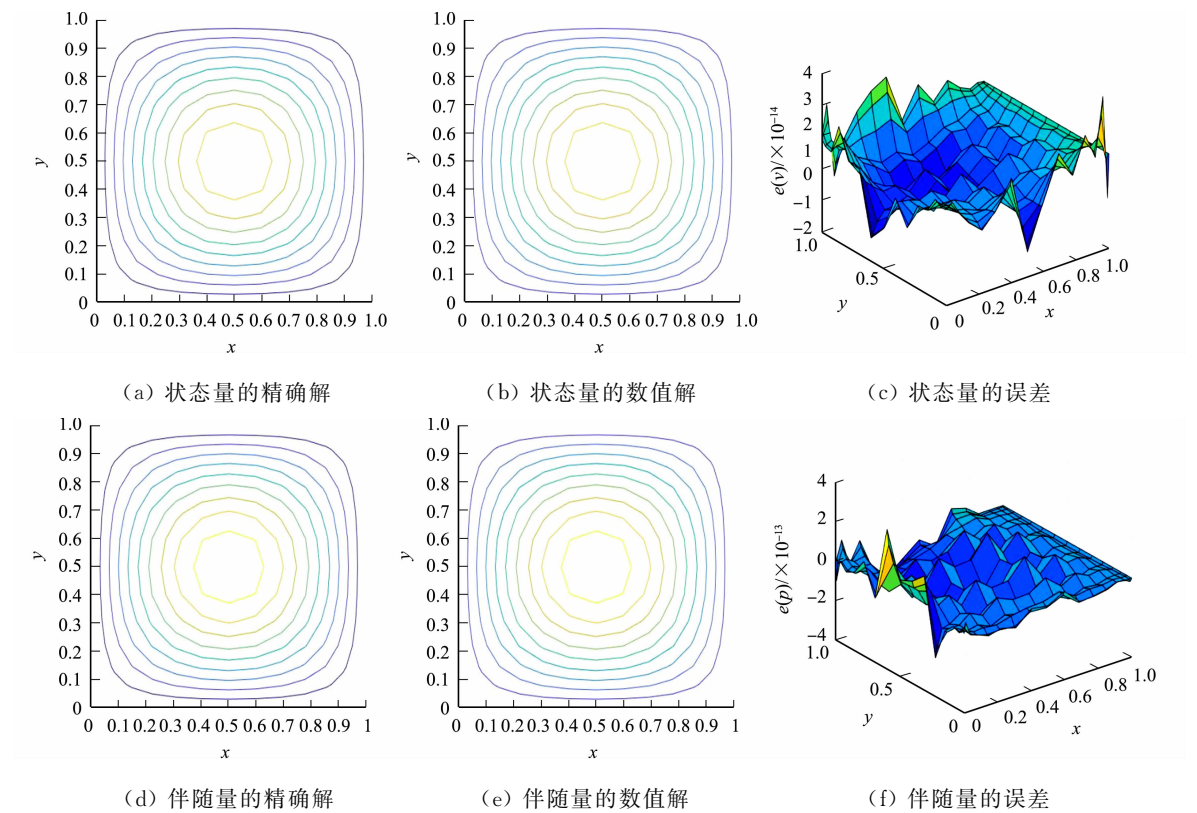


图 5 重心有理插值配点格式精确解、数值解与误差($M=16,N=16$)

Fig. 5 Exact solution, numerical solution and error of barycentric rational collocation format ($M=16,N=16$)

经典的差分法比较,重心插值配点格式选取更少的节点,即可达到更高的精度.

状态量收敛阶对比,如图 6 所示.由图 6 可知:采用差分法求解方程的收敛阶为 2 阶;重心 Lagrange 插值配点格式、重心有理配点格式的收敛阶都呈现指数递减的效果,前者的收敛效果优于后者.

表 4 重心 Lagrange 插值配点格式最大相对误差(M,N)

Tab. 4 Maximum relative error of barycentric Lagrange interpolation collocation format (M,N)

(M,N)	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
(4,4)	$5.915\,2\times10^{-3}$	$3.051\,0\times10^{-3}$	$3.051\,0\times10^{-3}$
(6,6)	$1.206\,0\times10^{-4}$	$2.522\,4\times10^{-5}$	$2.522\,4\times10^{-5}$
(8,8)	$5.322\,4\times10^{-7}$	$1.648\,5\times10^{-7}$	$1.648\,5\times10^{-7}$
(10,10)	$1.821\,9\times10^{-9}$	$5.726\,8\times10^{-10}$	$5.726\,8\times10^{-10}$
(12,12)	$3.977\,9\times10^{-12}$	$1.596\,3\times10^{-12}$	$1.596\,3\times10^{-12}$

表 5 重心有理配点格式的最大相对误差(M,N)

Tab. 5 Maximum relative error of barycentric rational collocation format (M,N)

(M,N)	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
(4,4)	$5.915\,2\times10^{-3}$	$3.051\,0\times10^{-3}$	$3.051\,0\times10^{-3}$
(6,6)	$4.212\,7\times10^{-4}$	$1.562\,3\times10^{-4}$	$1.562\,3\times10^{-4}$
(8,8)	$5.071\,6\times10^{-6}$	$1.919\,4\times10^{-6}$	$1.919\,4\times10^{-6}$
(10,10)	$2.222\,7\times10^{-8}$	$9.177\,6\times10^{-9}$	$9.177\,6\times10^{-9}$
(12,12)	$2.121\,3\times10^{-11}$	$8.839\,6\times10^{-11}$	$8.839\,6\times10^{-11}$

表 6 差分法求解的最大相对误差(M,N)

Tab. 6 Maximum relative error of difference method (M,N)

(M,N)	$e(v)$	$e(p)$	$e(u)$
(4,4)	$8.814\ 4\times10^{-1}$	$1.062\ 3\times10^{-1}$	$1.062\ 3\times10^{-1}$
(8,8)	$1.553\ 8\times10^{-1}$	$2.453\ 8\times10^{-2}$	$2.453\ 8\times10^{-2}$
(16,16)	$3.803\ 3\times10^{-2}$	$6.022\ 9\times10^{-3}$	$6.022\ 9\times10^{-3}$
(32,32)	$9.387\ 7\times10^{-3}$	$1.507\ 0\times10^{-3}$	$1.507\ 0\times10^{-3}$
(64,64)	$2.339\ 5\times10^{-3}$	$3.763\ 1\times10^{-4}$	$3.763\ 1\times10^{-4}$

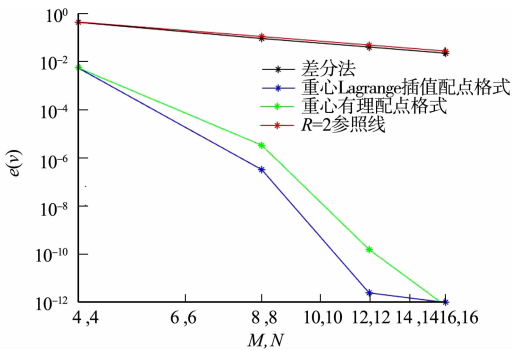


图 6 状态量收敛阶对比(m,n)

Fig. 6 Comparison of state function convergence rate (m,n)

5 结束语

基于 Lagrange 乘子法,将对流扩散最优控制问题转化为由状态方程、伴随方程、最优性方程三者联立形成的代数方程组,再分别采用重心 Lagrange 插值配点格式、重心有理插值配点格式离散求解方程组中的状态量 v 、伴随量 p ,并对提出的配点格式进行相容性误差分析.数值实验结果表明,两种重心插值配点格式均具有高精度的特性,选取切比雪夫节点时具有指数收敛的效果.此外,与经典的有限差分格式相比,该配点格式在剖分较少的节点数时,可达到很高的精度.

参考文献:

[1] AUGERAUD-VERON E,CHOQUET C,COMTE E. Optimal control for a groundwater pollution ruled by a convection-diffusion-reaction problem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2017,173(3):941-966. DOI:10.1007/s10957-016-1017-8.

[2] ZHU Jiang,ZENG Qingcun. A mathematical formulation for optimal control of airpollution[J]. Science in China, 2003,46:994-1002. DOI:10.1007/BF02959394.

[3] YUCEL H,SDOLL M,BENNER P. A discontinuous Galerkin method for optimal control problems governed by a system of convection-diffusion PDEs with nonlinear reaction terms[J]. Computers and Mathematics with Applications,2015,70(10):2414-2431. DOI:10.1016/j.camwa.2015.09.006.

[4] HU Weiwei,SHEN Jiguang,SINGLER J R,*et al*. A superconvergent HDG method for distributed control of convection diffusion PDEs[J]. Journal of Scientific Computing,2018,76(3):1436-1457. DOI:10.1007/s10915-018-0668-z.

[5] FRUTOS J,GARCIA-ARCHILLA B,NOVO J. Local error estimates for the SUPG method applied to evolutionary convection reaction diffusion equations[J]. Journal of Scientific Computing,2016,66(2):528-554. DOI:10.1007/s10915-015-0035-2.

[6] WENG Zhifeng,JERRY Y Z,LU Xiliang. A stabilized finite element method for the convection dominated diffusion optimal control problem[J]. Applicable Analysis,2016,95(12):2807-2823. DOI:10.1080/00036811.2015.1114606.

[7] ROLAND B,VEXLER B. Optimal control of the convection diffusion equation using stabilized finite element methods[J]. Numerische Mathematik,2007,106(3):349-367. DOI:10.1007/s00211-007-0067-0.

[8] FU Hongfei,RUI Hongxing. A mass-conservative characteristic FE scheme for optimal control problems governed by convection-diffusion equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2012,241/242/243/244:82-92. DOI:10.1016/j.cma.2012.05.019.

[10] SAMADI F,HEYDARI A,EFFATI S. A numerical method based on a bilinear pseudo-spectral method to solve the convection diffusion optimal control problems[J]. International Journal of Computer Mathematics,2021,98(1):28-46. DOI:10.1080/00207160.2020.1723563.

[10] CHEN Yanping,XIA Nianshi,YI Nianyu. A Legendre Galerkin spectral method for optimal control problems[J]. Journal of Systems Science and Complexity,2011,24:663-671. DOI:10.1007/s11424-011-8016-5.

[11] DAREHMIRAKI M,REZAADEH A. A new solution for optimal control of fractional convection-reaction-diffusion equation using rational barycentric interpolation[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society,2020,46(5):

1307-1340. DOI:10.1007/s41980-019-00327-y.

[12] YUCEL H,BENER P. Adaptive discontinuous Galerkin methods for state constrained optimal control problems governed by convection diffusion equations[J]. Computational Optimization and Application,2015,62(1):291-321. DOI:10.1007/s10589-014-9691-7.

[13] WANG Fangyuan,ZHANG Zhongqiang,ZHOU Zhaojie. A spectral Galerkin approximation of optimal control problem governed by fractional advection diffusion reaction equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2021,386:113233. DOI:10.1016/j.cam.2020.113233.

[14] CASANOVA P G,GOUT C,ZAVALETA J. Radial basis function methods for optimal control of the convection diffusion equation: A numerical study[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements,2019,108:201-209. DOI:10.1016/j.enganabound.2019.08.008.

[15] 张国平. 对流扩散最优控制问题的简化算法[D]. 贵州:贵州大学,2019.

[16] 王兆清,徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. 计算物理,2018,35(1):77-86. DOI:10.19596/j.cnki.1001-246x.7585.

[17] BERRUT J P,LLOYD L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. Siam Review,2004,46(3):501-517. DOI:10.1137/S0036144502417715.

[18] 邓杨芳,姚泽丰,汪精英,等. 二维 Allen-Cahn 方程的有限差分法/配点法求解[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2020,41(5):690-694. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202001001.

[19] DENG Yangfang,WENG Zhifeng. Barycentric interpolation collocation method based on Crank Nicolson scheme for the Allen-Cahn equation[J]. AIMS Mathematics,2021,6(4):3857-3873. DOI:10.3934/math.2021229.

[20] HU Yudie,PENG Ao,CHEN Liquan,*et al.* Analysis of the barycentric interpolation collocation scheme for the Burgers equation[J]. Science Asia,2021,47:758-765. DOI:10.2306/scienceasia1513-1874.2021.081.

[21] YI Shichao,YAO Linquan. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher order time fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2019,35(5):1694-1716. DOI:10.1002/num.22371.

[22] LI Jin,CHENG Yongling. Linear barycentric rational collocation method for solving heat conduction equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2021,37(1):533-545. DOI:10.1002/num.22539.

[23] LI Jin,SU Xiaoming,QU Jinzheng. Linear barycentric rational collocation method for solving telegraph equation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2021,44:11720-11737. DOI:10.1002/mma.7548.

[24] DAREHMIRAKI M,REZAZADEH A,AHMADIAN A,*et al.* An interpolation method for the optimal control problem governed by the elliptic convection-diffusion equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2022,38:137-159. DOI:10.1002/num.22625.

[25] KLEIN G,BERRUT J P. Linear rational finite differences from derivatives of barycentric rational interpolants[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2012,50(2):643-656. DOI:10.1137/110827156.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)