DOI:10.11830/ISSN. 1000-5013. 202111018

广义 Camassa-Holm 方程的不对称孤立波和不对称扭波的存在性

温振庶，黄紫红

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 利用动力系统定性理论和分支方法研究广义 Camassa-Holm 方程的行波.通过关键的分支值得到相应平面系统的相图,从而给出孤立波和扭波存在的充分条件;并且发现得到的孤立波和扭结波是不对称的,这与传统的对称孤立波和对称扭波是不一样的.

关键词： 广义 Camassa-Holm 方程；不对称孤立波；不对称扭波；存在性

中图分类号： O 175.29　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2023)02-0277-04

Existence of Asymmetric Solitary Waves and Asymmetric Kink Waves of Generalized Camassa-Holm Equation

WEN Zhenshu, HUANG Zihong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Traveling waves of the generalized Camassa-Holm equation are studied by exploiting qualitative theory and bifurcation method of dynamical systems, the phase portraits of corresponding planar system are obtained by the key bifurcation values, and sufficient conditions guaranteeing the existence of solitary waves and kink waves are derived. It is found that the derived solitary waves and kink waves are asymmetric, which are different from the traditional symmetric solitary waves and kink waves.

Keywords: generalized Camassa-Holm equation; asymmetric solitary waves; asymmetric kink waves; existence

近几十年来,学者们提出了许多重要的非线性演化方程来模拟不同的非线性现象,例如流体动力学中的浅水波运动,等离子体中的离子声波等,其中,Camassa-Holm(CH)方程及其变体得到了广泛的关注.著名的经典 CH 方程[1]

$$u_t + 2ku_x - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{1}$$

模拟了浅水波在平底的单向传播. $u(x,t)$ 代表 t 时刻在空间方向 x 上的流体速度, k 是与临界浅水波速有关的常数.方程(1)具有双哈密顿结构和无穷多个守恒定律,并且是完全可积的[1-3].许多学者对 CH 方程(1)的解及动力学性质进行了研究.CH 方程的 1 个显著特征是具有尖孤子,即当 $k=0$ 时,有尖孤立波 $u(x,t)=ce^{-|x-ct|}$.事实上,当 $k\neq 0$ 时,CH 方程也有尖孤立波 $u(x,t)=\dfrac{3k}{2}e^{-\left|x-\frac{k}{2}t\right|}-k$[4].除了非光滑孤立波外,方程(1)也有光滑孤立波[4].所有这些解都具有某种对称性,即它们是关于直线对称或点

收稿日期： 2021-11-16

通信作者： 温振庶(1984-),男,教授,博士,主要从事微分方程与动力系统的研究. E-mail:wenzhenshu@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12071162)；福建省自然科学基金资助项目(2021J01302)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(ZQN-802)

对称的.然而,还没有发现CH型方程有不对称解.文中将证明广义CH方程[5-6]

$$u_t-u_{txx}=\partial_x(2+\partial_x)[(2-\partial_x)u]^2 \tag{2}$$

具有非对称孤立波和非对称扭波,其定义如下.

定义1 对称孤立波 $u=\varphi(\xi)$ 是关于直线 $\xi=c_0$ 对称的孤立波,其中,c_0 是常数;否则,它是不对称孤立波.

定义2 对称扭波 $u=\varphi(\xi)$ 是关于点 (ξ_0,u_0) 对称的扭结波,其中,ξ_0 和 u_0 是常数;否则,它是不对称扭波.

方程(2)首先由Novikov提出[5].通过得到其拟局部高次对称性的无穷维族,Novikov证明了方程(2)是可积的[5],并且它属于以下类

$$u_t-u_{txx}=F(u,u_x,u_{xx},u_{xxx}). \tag{3}$$

这引起了人们的极大兴趣,特别是式(3)的可能的可积成员.Tu等[6]通过建立局部适定性并给出爆破准则,研究了方程(2)的Cauchy问题.Mi等[7]进一步研究了方程(2)的非一致依赖性和适定性.本文从动力系统的角度[8-18]研究方程(2)的行波,通过关键的分支值得到孤立波和扭波存在的充分条件;首次观测到CH型方程(2)的非对称孤立波和非对称扭波,拓展了以前的工作.

1 定性分析和相图

方程(2)可以写成

$$u_t-u_{txx}=\partial_x(8u^2-2u_x^2-4uu_{xx}+2u_xu_{xx}). \tag{4}$$

对于给定的波速 $c>0$,将 $u(x,t)=\varphi(\xi)$,$\xi=x-ct$ 代入式(4)并积分一次,得到

$$(4\varphi+c-2\varphi')\varphi''=8\varphi^2+c\varphi+g-2(\varphi')^2. \tag{5}$$

令 $y=\varphi'$,得到一个平面系统

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=y,\\&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}=\frac{8\varphi^2+c\varphi+g-2y^2}{4\varphi+c-2y}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其首次积分为

$$H(\varphi,y)=2\varphi y^2+\frac{c}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3-\left(\frac{8}{3}\varphi^3+\frac{c}{2}\varphi^2+g\varphi\right). \tag{7}$$

利用尺度变换 $\mathrm{d}\xi=(4\varphi+c-2y)\mathrm{d}\tau$,系统(6)变为哈密顿系统,即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=(4\varphi+c-2y)y,\\&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=8\varphi^2+c\varphi+g-2y^2.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

显然,当 $g<\frac{c^2}{32}$ 时,系统(8)在 φ 轴上有2个平衡点 $A_1(\varphi_1,0)$ 和 $A_2(\varphi_2,0)$,且有

$$\begin{cases}\varphi_1=-\dfrac{1}{16}(\sqrt{c^2-32g}+c),\\[2ex]\varphi_2=\dfrac{1}{16}(\sqrt{c^2-32g}-c).\end{cases}$$

此外,系统(8)有1个平衡点 $B\left(\frac{2g-c^2}{6c},\frac{c^2+4g}{6c}\right)$ 在直线 $y=2\varphi+\frac{c}{2}$ 上.

设 $\lambda(\varphi,y)$ 为系统(8)在平衡点 (φ,y) 处的线性化系统的特征值.通过直接计算,有

$$\lambda^2(\varphi,0)=(4\varphi+c)f'(\varphi), \tag{9}$$

和

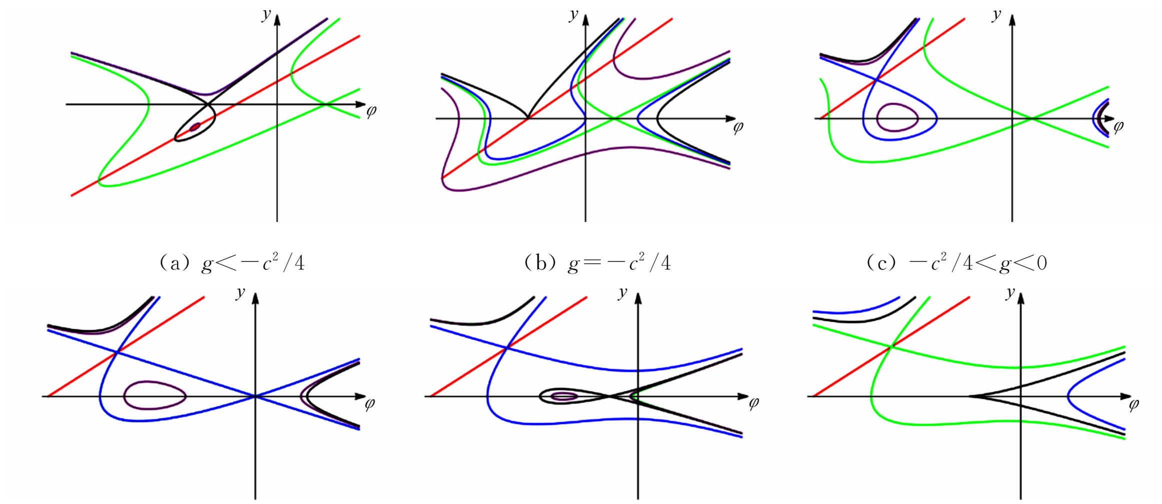
$$\lambda^2\left(\frac{2g-c^2}{6c},\frac{c^2+4g}{6c}\right)=c^2+4g. \tag{10}$$

由式(9)和式(10),根据动力系统理论,将系统(8)的奇点个数及其在相应的参数条件下的动力学行为总结在引理1中.

引理 1　1) 当 $g<-c^2/4$ 时，系统(8)有 3 个奇点 A_1，A_2 和 B. 而且 A_1 和 A_2 是鞍点，B 是中心.
2) 当 $g=-c^2/4$ 时，系统(8)有 2 个奇点 A_1(与 A_2 重合)和 B. 而且 A_1 是退化的，A_2 是鞍点.
3) 当 $-c^2/4<g<c^2/32$ 时，系统(8)有 3 个奇点 A_1，A_2 和 B. 而且 A_2 和 B 是鞍点，A_1 是中心.
4) 当 $g=c^2/32$ 时，系统(8)有 2 个奇点 A_1(与 A_2 重合)和 B. 而且 A_1 是退化的，B 是鞍点.

此外，对引理 1 中的子情形 3)，当 $H(\varphi_2,0)=H\left(\dfrac{2g-c^2}{6c},\dfrac{c^2+4g}{6c}\right)$，可得到 1 个关键分支值 $g=0$，使系统(8)有 2 条连接 2 个鞍点 A_2 和 B 的异宿轨.

基于上述分析，得到了系统(6)在对应的参数条件下的相图，如图 1 所示.



(a) $g<-c^2/4$　　(b) $g=-c^2/4$　　(c) $-c^2/4<g<0$

(d) $g=0$　　(e) $0<g<c^2/32$　　(f) $g=c^2/32$

图 1　系统(6)在对应的参数条件下的相图

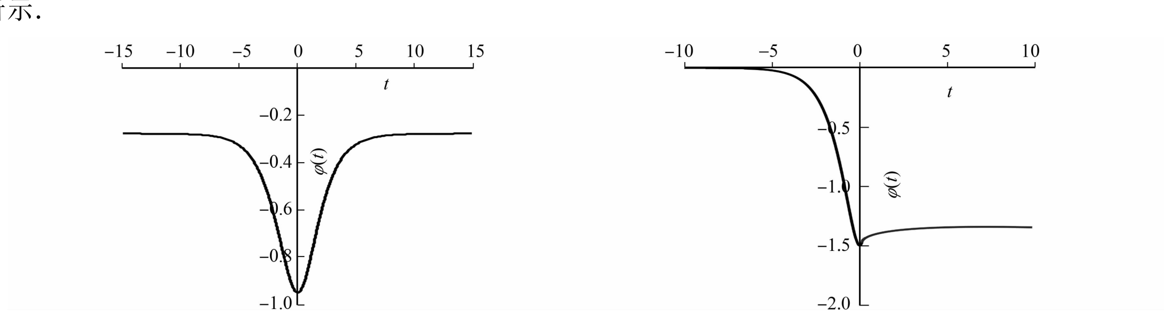
Fig. 1　Phase portraits of system (6) under corresponding parameter conditions

2　主要结果

动力系统的同宿轨对应于孤立波，动力系统的异宿轨对应于扭波. 因此，对应于图 1 相图的不对称同宿轨和不对称异宿轨，有定理 1.

定理 1　1) 当 $g<-c^2/4$ 时，广义 CH 方程(2)有 1 个不对称孤立波.
2) 当 $-c^2/4<g<0$ 时，广义 CH 方程(2)有 1 个不对称孤立波.
3) 当 $0<g<c^2/32$ 时，广义 CH 方程(2)有 1 个不对称孤立波.
4) 当 $g=0$ 时，广义 CH 方程(2)具有 1 对不对称扭波和反扭波.

注 1　由于哈密顿函数(7)的复杂性，无法得到不对称孤立波和不对称扭波的精确表达式. 然而，当 $0<g<c^2/32$ 时，非对称孤立波的波形图，如图 2(a)所示；当 $g=0$ 时，非对称扭波的波形图，如图 2(b)所示.



(a) 非对称孤立波　　(b) 非对称扭波

图 2　非对称孤立波和非对称扭波的波形图

Fig. 2　Profiles of asymmetric solitary wave and asymmetric kink wave

3 结束语

通过分析广义CH方程(2)对应的平面系统(6),给出孤立波和扭波存在的充分条件,并首次发现CH型方程(2)的非对称孤立波和非对称扭波.非对称非线性波的发现将极大地丰富以往的研究成果.

参考文献:

[1] CAMASSA R,HOLM D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical Review Letters, 1993,71(11):1661-1664. DOI:10.1103/PhysRevLett.71.1661.

[2] FUCHSSTEINER B,FOKAS A. Symplectic structures, their bäcklund transformations and hereditary symmetries [J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,1981,4(1):47-66. DOI:10.1016/0167-2789(81)90004-X.

[3] CONSTANTIN A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation[J]. Proceedings of the Royal Society of London A,2001,457(2008):953-970. DOI:10.1098/rspa.2000.0701.

[4] LIU Zhengrong,QIAN Tifei. Peakons of the Camassa-Holm equation[J]. Applied Mathematical Modelling,2002,26(3):473-480. DOI:10.1016/S0307-904X(01)00086-5.

[5] NOVIKOV V. Generalizations of the Camassa-Holm equation[J]. Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical,2009,42(34):342002. DOI:10.1088/1751-8113/42/34/342002.

[6] TU Xi,YIN Zhaoyang. Blow-up phenomena and local well-posedness for a generalized Camassa-Holm equation in the critical Besov space[J]. Nonlinear Analysis,2015,128:1-19. DOI:10.1016/j.na.2015.07.017.

[7] MI Yongsheng,LIU Yue,GUO Boling,*et al*. The Cauchy problem for a generalized Camassa-Holm equation[J]. Journal of Differential Equations,2019,266(10):6739-6770. DOI:10.1016/j.jde.2018.11.019.

[8] 温振庶.(N+1)维广义的Boussinesq方程的精确显式非线性波解[J].华侨大学学报(自然科学版),2016,37(3):380-385. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2016.03.0380.

[9] CHEN Aiyong,WEN Shuangquan,TANG Shengqiang,*et al*. Effects of quadratic singular curves in integrable equations[J]. Studies in Applied Mathematics,2015,134(1):24-61. DOI:10.1111/sapm.12060.

[10] CHEN Yiren,SONG Ming,LIU Zhengrong. Soliton and Riemann theta function quasi-periodic wave solutions for a (2+1)-dimensional generalized shallow water wave equation[J]. Nonlinear Dynamics,2015,82(1/2):333-347. DOI:10.1007/s11071-015-2161-7.

[11] SONG Ming. Nonlinear wave solutions and their relations for the modified Benjamin-Bona-Mahony equation[J]. Nonlinear Dynamics,2015,80(1/2):431-446. DOI:10.1007/s11071-014-1880-5.

[12] PAN Chaohong,YI Yating. Some extensions on the soliton solutions for the Novikov equation with cubic nonlinearity[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics,2015,22(2):308-320. DOI:10.1080/14029251.2015.1033243.

[13] WEN Zhenshu. Bifurcations and exact traveling wave solutions of a new two-component system[J]. Nonlinear Dynamics,2017,87(3):1917-1922. DOI:10.1007/s11071-016-3162-x.

[14] WEN Zhenshu. Bifurcations and exact traveling wave solutions of the celebrated Green-Naghdi equations[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2017,27(7):1750114. DOI:10.1142/S0218127417501140.

[15] LETA T D,LI Jibin. Dynamical behavior and exact solutions of thirteenth order derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Applied Analysis and Computation,2018,8(1):250-271. DOI:10.11948/2018.250.

[16] HAN Maoan,ZHANG Lijun,WANG Yue,*et al*. The effects of the singular lines on the traveling wave solutions of modified dispersive water wave equations[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2019,47:236-250. DOI:10.1016/j.nonrwa.2018.10.012.

[17] WEN Zhenshu. Several new types of bounded wave solutions for the generalized two-component Camassa-Holm equation[J]. Nonlinear Dynamics,2014,77(3):849-857. DOI:10.1007/s11071-014-1346-9.

[18] WEN Zhenshu. Bifurcations and nonlinear wave solutions for the generalized two-component integrable Dullin-Gottwald-Holm system[J]. Nonlinear Dynamics,2015,82(1/2):767-781. DOI:10.1007/s11071-015-2195-x.

(责任编辑:黄晓楠　英文审校:黄心中)