

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202211022



时间分数阶 Black-Scholes 方程的重心 Lagrange 插值配点法

吴哲, 黄蓉, 田朝薇

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 针对欧式期权定价的时间分数阶 Black-Scholes 模型, 设计一种重心 Lagrange 插值配点法格式. 首先, 采用 Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数, 将分数阶方程转化为整数阶方程; 然后, 在时-空方向上均采用重心 Lagrange 插值配点法进行离散, 构造重心 Lagrange 插值配点法格式. 结果表明: 时间分数阶 Black-Scholes 方程的重心 Lagrange 插值配点法具有高精度和有效性.

关键词: Caputo 型分数阶导数; Black-Scholes 方程; Laplace 变换; 重心 Lagrange 插值配点法

中图分类号: O 241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)02-0269-08

Barycentric Lagrange Interpolation Collocation Method for Time-Fractional Black-Scholes Equation

WU Zhe, HUANG Rong, TIAN Zhaowei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The barycentric Lagrange interpolation collocation method scheme is designed for European option pricing time-fractional order Black-Scholes model. Firstly, Laplace transform is used to approximate Caputo-type fractional order derivative, and the fractional equation is transformed into an integer order equation. Then, barycentric Lagrange interpolation collocation method is used to discretize in both time and space directions, and barycentric Lagrange interpolation collocation method scheme is constructed. The results show that the barycentric Lagrange interpolation collocation method for time-fractional order Black-Scholes equation has high accuracy and effectiveness.

Keywords: Caputo-type fractional order derivative; Black-Scholes equation; Laplace transformation; barycentric Lagrange interpolation collocation method

1973 年, Black 等^[1]提出了著名的期权定价公式(Black-Scholes 方程), 然而, 经典 Black-Scholes 模型过于简单和理想化, 早在 1960 年, Mandelbrot^[2]就观察到相对股价变动的长尾分布, 并推导出使用稳定的 Lévy 运动代替标准几何布朗运动. 由于分数阶导数的记忆性和继承性, 且非常接近 Lévy 过程, 故分数阶微分方程更能合理描述现实中资产价格波动的情况. 近年来, Mesgarani 等^[3]在时-空方向上分别采用 $2-\alpha$ 阶线性插值法和基于第 2 类切比雪夫配点法逼近空间导数项; An 等^[4]对 Caputo 型分数阶 Black-Scholes 模型构造了一种时空谱法的高阶数值格式; She 等^[5]在时-空方向上分别采用基于变量变

收稿日期: 2022-11-28

通信作者: 田朝薇(1977-), 女, 副教授, 主要从事偏微分数值计算的研究. E-mail: tzhw@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金面上资助项目(2022J01308); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(ZQN702)

化的 $L1$ 法和切比雪夫-伽辽金法进行离散; Tian 等^[6] 提出求解时间分数阶欧式期权 Black-Scholes 模型的 3 种紧致有限差分格式; 张俊良等^[7] 提出基于 3 阶消息队列 (MQ) 拟插值求解时间分数阶 B-S 模型的无网格数值方法.

Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数, 能有效减少因分数阶导数引起的存储量, 从而简化计算. 文献[8-9]验证了 Laplace 变换法的有效性. 重心插值配点法是一种新型高效率、高精度的无网格数值计算方法, 因其计算量小且易于编程, 已广泛应用于求解 Fredholm 积分方程^[10]、Allen-Cahn 方程^[11-12]、弹性力学问题^[13] 中. 基于此, 本文通过 Laplace 变换将分数阶 Black-Scholes 方程转换为整数阶方程, 在时-空方向均采用重心 Lagrange 插值配点法进行离散.

1 分数阶 Black-Scholes 方程的数值格式

1.1 时间分数阶 Black-Scholes 方程

时间分数阶 Black-Scholes 方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU &= 0, \quad 0 < S < \infty, \quad 0 \leq \tau \leq T, \\ U(S, T) &= \max(K - S, 0), \quad 0 \leq S < \infty, \\ U(0, \tau) &= K, \quad U(S_\infty, \tau) = 0, \quad S_\infty \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: U 为欧式看跌期权价格, $U > 0$; S 为股票价格, $S > 0$; τ 为时间; r 为无风险利率, $r > 0$; σ 为股票价格 S 的波动率, $\sigma > 0$; K 为执行价格, $K > 0$; T 为到期日, $T > 0$; α 为时间分数阶导数的阶数.

$\frac{\partial^\alpha U(S, \tau)}{\partial \tau^\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) 为修正的右侧 Riemann-Liouville 分数阶导数, 即

$$\frac{\partial^\alpha U(S, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_\tau^T \frac{U(S, \xi) - U(S, T)}{(\xi - \tau)^\alpha} d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial U(S, \tau)}{\partial \tau}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中: $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 式(2)简化成经典的 Black-Scholes 方程.

引入变换 $S = e^x$, 以消去式(1)中偏导的变系数 S ; 再引入变换 $\tau = T - t$, 则 $u(x, t) = U(e^x, T - t)$. 由文献[14]可将修正的右侧 Riemann-Liouville 分数阶导数转换成 Caputo 型分数阶导数, 即

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \zeta)}{\partial \zeta} (t - \zeta)^{-\alpha} d\zeta, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3}$$

为不失一般性, 且便于用算例验证算法精度, 式(1)转化为

$$\left. \begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \max(K - e^x, 0), \quad -\infty < x < \infty, \\ u(-\infty, t) &= K, \quad u(\infty, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

为求出式(4)的数值解, 需将原无界区域截断为有限区域, 即

$$\left. \begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \max(K - e^x, 0), \quad a < x < b, \\ u(a, t) &= K, \quad u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

1.2 整数阶方程

针对式(5), 使用 Laplace 变换逼近方程的分数阶导数, 即

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha u(x, t)\} = s^\alpha \hat{u}(x, s) - s^{\alpha-1} u(x, 0) = s^\alpha [\hat{u}(x, s) - s^{-1} u(x, 0)]. \tag{6}$$

式(6)中: $\hat{u}(x, s)$ 是 $u(x, t)$ 的 Laplace 变换.

由于 $\alpha \in (0, 1)$, 故可以将 s^α 线性化, 即

$$s^\alpha \approx \alpha s^1 + (1-\alpha)s^0 = \alpha s + (1-\alpha). \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 可得

$$\begin{aligned} L\{ {}_0^C D_t^\alpha u(x, t) \} &\approx [\alpha s + (1-\alpha)][\hat{u}(x, s) - s^{-1}u(x, 0)] = \\ &\alpha s[\hat{u}(x, s) - s^{-1}u(x, 0)] + (1-\alpha)[\hat{u}(x, s) - s^{-1}u(x, 0)]. \end{aligned} \quad (8)$$

由 Laplace 逆变换可知

$$L^{-1}\{s[\hat{u}(x, s) - s^{-1}u(x, 0)]\} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$L^{-1}\{\hat{u}(x, s)\} = u(x, t), \quad (10)$$

$$L^{-1}\{s^{-1}u(x, 0)\} = u(x, 0). \quad (11)$$

对式(8)两端进行 Laplace 逆变换, 并将式(9)~(11)代入式(8)中, 有

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) \approx \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (1-\alpha)[u(x, t) - u(x, 0)]. \quad (12)$$

故时间分数阶 Black-Scholes 方程转换为整数阶方程, 即

$$\alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + (r+1-\alpha)u(x, t) - (1-\alpha)u(x, 0) = f(x, t). \quad (13)$$

1.3 对流项的消去

将式(13)的两边同时乘以 $\frac{2}{\sigma^2}$, 有

$$\frac{2\alpha}{\sigma^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{2(r+1-\alpha)}{\sigma^2} u(x, t) - \frac{2(1-\alpha)}{\sigma^2} u(x, 0) = \frac{2}{\sigma^2} f(x, t). \quad (14)$$

为采用重心 Lagrange 插值配点法, 去掉式(14)中对 x 的一阶导数项. 令 $\beta = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$, 同时, 引入文献

[15]中的指数变换, 再令 $u(x, t) = e^{\frac{1}{2}\beta x} v(x, t)$, 则式(14)化为

$$\frac{2\alpha}{\sigma^2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{1}{2\sigma^2} (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 + 1 - \alpha \right] v(x, t) = \frac{2}{\sigma^2} f(x, t) e^{-\frac{1}{2}\beta x} + \frac{2(1-\alpha)}{\sigma^2} v(x, 0). \quad (15)$$

再将方程(15)的两边同时乘以 $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$, 有

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2\sigma^2} (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 + 1 - \alpha \right] v(x, t) = \frac{1}{\alpha} f(x, t) e^{-\frac{1}{2}\beta x} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} v(x, 0). \quad (16)$$

为简化模型, 令 $\lambda = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$, $\theta = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2\sigma^2} (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 + 1 - \alpha \right]$, $g(x, t) = \frac{1}{\alpha} f(x, t) e^{-\frac{1}{2}\beta x} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} v(x, 0)$, 则式

(5)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(x, t) &= g(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ v(x, 0) &= \max((K - e^x) \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta x}, 0), \quad a < x < b, \\ v(a, t) &= K \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta a}, \quad v(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

1.4 重心 Lagrange 插值

设有 $n+1$ 个不同节点 $x_i (i=0, 1, \dots, n)$ 和对应一组值 y_i , $p(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 满足 $p(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$. 由于多项式 $p(x)$ 具有唯一性, 可将 $p(x)$ 改写成 Lagrange 插值公式, 即

$$p(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_j, \quad L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} (j = 0, 1, \dots, n). \quad (18)$$

式(18)中: $L_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数, 且满足

$$\sum_{j=0}^n L_j(x) = 1, \quad L_j(x_i) = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1, & j = i, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & j \neq i, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (19)$$

令 $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, 重心权 $\omega_j = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)} (j = 0, 1, \dots, n)$, 则 $L_j(x) =$

$l(x) \frac{\omega_j}{x-x_j}(j=0,1,\cdots,n)$,可得

$$p(x)=l(x)\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}y_j. \tag{20}$$

令 $p(x)=1$,代入式(20),可得恒等式 $1=l(x)\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}$,则重心 Lagrange 插值公式为

$$p(x)=\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}y_j/\sum_{k=0}^n\frac{\omega_k}{x-x_k}. \tag{21}$$

为使重心 Lagrange 插值具有优良的数值稳定性,选取第 2 类 Chebyshev 节点 $x_i=\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right),i=0,1,\cdots,n$.

1.5 基于重心 Lagrange 插值配点法的 Black-Scholes 方程的求解

对式(17)的第一个方程做重心 Lagrange 插值配点法,将 $[a,b]$ 和 $[0,T]$ 分别离散为 m,n 个 Chebyshev 节点, $a=x_1<x_2<\cdots<x_m=b,0=t_1<t_2<\cdots<t_n=T$,则在区域 $\Omega=[a,b]\times[0,T]$ 上形成了 $m\times n$ 个张量型节点 $((x_i,t_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$.

$v(x,t)$ 在节点 x_1,x_2,\cdots,x_m 的公式为 $v(x_i,t):=v_i(t)$,考虑热传导方程,固定 t ,则 $v(x,t)$ 在节点 x_1,x_2,\cdots,x_m 的重心插值公式为

$$v(x,t)=\sum_{j=1}^mL_j(x)v_j(t). \tag{22}$$

式(22)中: x 方向上的插值基函数 $L_j(x)=\frac{\omega_j}{x-x_j}/\sum_{j=1}^m\frac{\omega_j}{x-x_j}$,重心权 ω_j 的选择依赖于不同的重心插值配点法.

同理,固定 x ,则 $v(x,t)$ 在节点 t_1,t_2,\cdots,t_n 的重心插值公式为

$$v(x,t)=\sum_{j=1}^nL_j(t)v_j(x). \tag{23}$$

式(23)中: $L_j(t)$ 为 t 方向上的插值基函数.

由式(22),(23)可知: $v(x,t)$ 在节点 $\{(x_i,t_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\}$ 上的重心插值公式为

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i(x)L_j(t)v_{i,j}. \tag{24}$$

考虑 $v(x,t)$ 对变量 x,t 求 $l+k$ 阶偏导数,即

$$\frac{\partial^{l+k}v}{\partial x^l\partial t^k}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i^{(l)}(x)L_j^{(k)}(t)v_{i,j},\quad l,k=0,1,2,\cdots,n. \tag{25}$$

上述偏导数在节点 (x_r,t_p) 处的函数近似值为

$$v^{(l,k)}(x_r,t_p)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i^{(l)}(x_r)L_j^{(k)}(t_p)v_{i,j},\quad r=1,2,\cdots,m,\quad p=1,2,\cdots,n. \tag{26}$$

$g(x_i,t)=g_i(t),i=1,2,\cdots,m$,令 $\mathbf{v}_i=[v_{i,1},v_{i,2},\cdots,v_{i,n}]^T,i=1,2,\cdots,m,\mathbf{g}_i=[g_{i,1},g_{i,2},\cdots,g_{i,n}]^T=[g_i(t_1),g_i(t_2),\cdots,g_i(t_n)]^T$,则式(17)的重心 Lagrange 插值配点法数学公式为

$$\begin{aligned} &[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i(0)(x_r)L_j(1)(t_p)-\lambda\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i(2)(x_r)L_j(0)(t_p)+\\ &\theta\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^nL_i(x_r)L_j(t_p)]v_{i,j}=g_i(t). \end{aligned} \tag{27}$$

偏导数和微分矩阵对应关系为

$$\frac{\partial^{l+k}v}{\partial x^l\partial t^k}\Rightarrow\mathbf{M}^{(l)}\otimes\mathbf{D}^{(k)},\quad l,k=0,1,2,\cdots,n. \tag{28}$$

式(28)中: $\mathbf{M}^{(0)}=\mathbf{I}_m;\mathbf{D}^{(0)}=\mathbf{I}_n;\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积; $\mathbf{M}^{(l)},\mathbf{D}^{(k)}$ 分别为关于节点 x_1,x_2,\cdots,x_m 和节点 t_1,t_2,\cdots,t_n 的重心型插值 p 阶微分矩阵; $\mathbf{I}_m,\mathbf{I}_n$ 分别为 m,n 阶单位矩阵.

令 $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1^T,\mathbf{v}_2^T,\cdots,\mathbf{v}_m^T]^T,\mathbf{G}=[\mathbf{g}_1^T,\mathbf{g}_2^T,\cdots,\mathbf{g}_m^T]^T$,将式(27)表示为微分矩阵的形式,即

$$[I_m \otimes D^{(1)} - \lambda I_{m,n} (M^{(2)} \otimes I_n) + \theta I_{m,n}] V = G. \tag{29}$$

式(29)中: $\lambda = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$; $\theta = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 1 - \alpha \right]$.

1.6 插值误差估计

插值误差估计有利于验证算法的整体误差结果,由文献[16]的定理 3.1,可得定理 1.

定理 1 如果 $\varphi(x, t) \in C^{n+1}(\Omega)$, $\Omega = [a, b] \times (0, T] \in \mathbf{R}^2$ 为一个带 Lipschitz 连续边界的非空开集, $\varphi^h(x, t)$ 为 $\varphi(x, t)$ 的重心 Lagrange 插值函数,则有如下插值误差估计数学公式成立,即

$$\max_{(x,t) \in \Omega} |\varphi(x, t) - \varphi^h(x, t)| \leq \| \varphi^{(n+1)}(x, t) \|_{\infty} \left\{ c_x \left(\frac{e(b-a)}{2M} \right)^M + c_t \left(\frac{eT}{2N} \right)^N \right\}, \tag{30}$$

$$\max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi^h(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq c_x^* \| \varphi^{(n+1)}(x, t) \|_{\infty} \left(\frac{e(b-a)}{2(M-2)} \right)^{M-2}, \tag{31}$$

$$\max_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^h(x, t)}{\partial t} \right| \leq c_t^* \| \varphi^{(n+1)}(x, t) \|_{\infty} \left(\frac{eT}{2(N-1)} \right)^{N-1}. \tag{32}$$

式(30)~(32)中: c_x, c_x^*, c_t^* 均表示大于 0 的任意常数.

因此,插值误差估计数学公式为指数收敛,且代数方程的收敛阶由微分算子的阶数决定.

2 数值算例

为便于分析,定义最大相对误差 $\epsilon_{\max}(m, n) = \frac{\| u_e(x, t) - u_c(x, t) \|_{L^\infty}}{\| u_e(x, t) \|_{L^\infty}}$. 其中, $u_e(x, t)$ 和 $u_c(x, t)$ 分别为方程的精确解和数值解, $\| \cdot \|_{L^\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |u(x, t)|$ 为向量的无穷范数.

2.1 算例 1

为验证式(29)的高精度和有效性,考察如下时间分数阶微分方程的初边值问题,即

$$\left. \begin{aligned} {}^c_0 D_t^\alpha u(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

式(33)中: $r = 0.5$; $\sigma = \sqrt{2}$; $u(x, t) = (t^3 + 1) \sin(\pi x)$; $f(x, t) = \frac{\sin(\pi x)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{3}{3-\alpha} - \frac{6}{2-\alpha} + \frac{3}{1-\alpha} \right) t^{3-\alpha} + \frac{\sigma^2}{2} \pi^2 (t^3 + 1) \sin(\pi x) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \pi (t^3 + 1) \cos(\pi x) + r(t^3 + 1) \sin(\pi x)$.

通过对 Black-Scholes 方程进行指数变换,式(33)可以转化为式(17)的形式,然后,运用重心 Lagrange 插值配点法求解,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \theta v &= g(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ v(x, 0) &= \sin(\pi x) \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta x}, \quad 0 < x < 1, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

式(34)中: $\lambda = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$; $\theta = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 1 - \alpha \right]$; $g(x, t) = \frac{1}{\alpha} f(x, t) \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta x} + \frac{1-\alpha}{\alpha} v(x, 0)$; $\beta = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$.

取 $m = 32, n = 32, \alpha = 0.8$,用重心 Lagrange 插值配点法计算式(34),由 $u(x_i, t_j) = e^{\frac{1}{2}\beta x} v(x_i, t_j)$,可以将数值解 $v(x_i, t_j)$ 转化为数值解 $u(x_i, t_j)$,并对数值解 $u(x_i, t_j)$ 与精确解进行误差分析. 其中,变量 x, t 的 Chebyshev 节点数分别为 $m + 1, n + 1$. 重心 Lagrange 插值配点法分布图像,如图 1 所示. 图 1 中: $\epsilon(x, t)$ 为误差函数.

由图 1 可知:重心 Lagrange 插值配点法求出的方程数值解图像逼近真实解图像,在求解式(34)时该方法是有有效的,且可以达到较高精度.

当 $r = 0.5, \sigma = \sqrt{2}$ 时,分别取不同的剖分节点数 m, n 和不同的 α ,重心 Lagrange 插值配点法求解式(34)的最大相对误差,如表 1 所示. 二阶中心差分格式求解式(34)的最大相对误差,如表 2 所示.

由表 1,2 可知以下 4 点结论.

1) 对于重心 Lagrange 插值配点法,网格剖分越细,数值精度越高;2) 对于重心 Lagrange 插值配点法,随着 α 取值的增大,最大相对误差经历了一个先增大后减小的过程;3) 从最大误差角度来看,在空间和时间方向剖分数都很少的情况下,两种计算格式下的数值解都可以逼近精确解,效果都很好;4) 与二阶中心差分格式相比,当 α 取不同的值时,重心 Lagrange 插值配点法只需要较少的剖分节点数便可以达到更稳定、更高的精度,且更加高效.

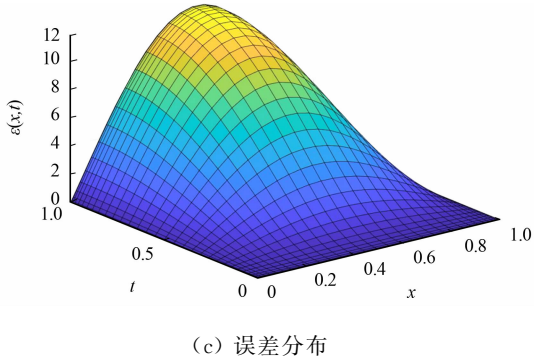
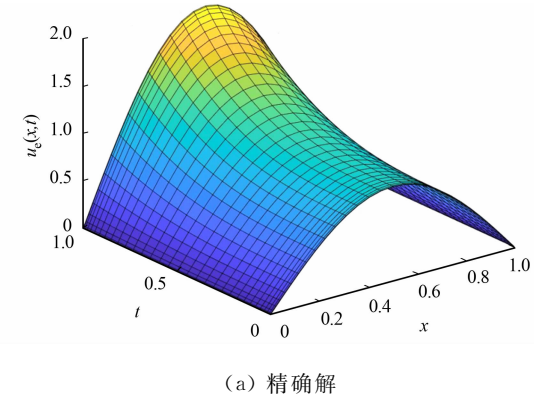
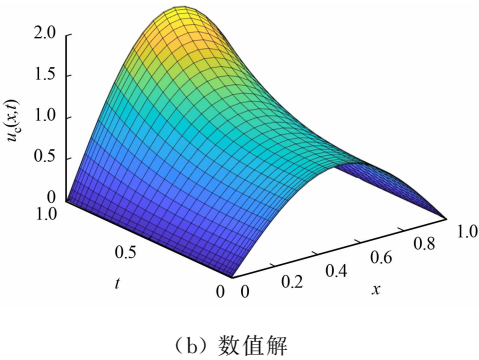


图 1 重心 Lagrange 插值配点法分布图像

Fig. 1 Distribution diagrams of barycentric Lagrange collocation method

表 1 重心 Lagrange 插值配点法求解式(34)的最大相对误差

Tab. 1 Maximum relative error of solving formula (34) by barycentric Lagrange collocation method

$\epsilon_{\max}(m,n)$	α		
	0.2	0.5	0.9
$\epsilon_{\max}(3,3)$	$6.703\ 6\times10^{-2}$	$6.937\ 6\times10^{-2}$	6.3524×10^{-2}
$\epsilon_{\max}(4,4)$	$2.559\ 5\times10^{-3}$	$5.779\ 6\times10^{-3}$	$2.142\ 8\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(6,6)$	$5.425\ 6\times10^{-3}$	$8.889\ 3\times10^{-3}$	$3.366\ 1\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(8,8)$	$5.410\ 7\times10^{-3}$	$8.874\ 5\times10^{-3}$	$3.355\ 3\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(10,10)$	$5.410\ 8\times10^{-3}$	$8.874\ 5\times10^{-3}$	$3.356\ 3\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(12,12)$	$5.410\ 8\times10^{-3}$	$8.874\ 5\times10^{-3}$	$3.355\ 7\times10^{-3}$

表 2 二阶中心差分格式求解式(34)的最大相对误差

Tab. 2 Maximum relative error of solving formula (34) by second-order center-difference scheme

$\epsilon_{\max}(m,n)$	α		
	0.2	0.5	0.9
$\epsilon_{\max}(20,32)$	$1.180\ 0\times10^{-2}$	$1.905\ 7\times10^{-2}$	$7.447\ 1\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(40,32)$	$1.040\ 7\times10^{-2}$	$1.768\ 6\times10^{-2}$	$6.187\ 4\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(60,32)$	$1.015\ 0\times10^{-2}$	$1.743\ 2\times10^{-2}$	$5.962\ 0\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(80,32)$	$1.006\ 0\times10^{-2}$	$1.734\ 3\times10^{-2}$	$5.883\ 1\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(100,32)$	$1.001\ 7\times10^{-2}$	$1.730\ 2\times10^{-2}$	$5.846\ 2\times10^{-3}$
$\epsilon_{\max}(120,32)$	$9.994\ 8\times10^{-3}$	$1.727\ 9\times10^{-2}$	$5.826\ 7\times10^{-3}$

2.2 算例 2

时间分数阶 Black-Scholes 的初边值问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha U}{\partial \tau^\alpha} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU &= 0, & S_a < S < S_b, & \quad 0 < \tau \leq T, \\ U(S,T) &= \max(K - S, 0), \\ U(S_a, \tau) &= K, & U(S_b, \tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

式(35)中: U 为欧式看跌期权的价格, $U>0$; S 为股票的价格, $S>0$; τ 为时间; r 为无风险利率, $r>0$; σ 为股票价格 S 的波动率, $\sigma>0$; K 为执行价格, $K>0$; T 为到期时间, $T>0$.

式(35)的数值解, 如图 2 所示. 由图 2 可知: 采用重心 Lagrange 插值配点法的数值解光滑且稳定.

当 $K=20$ 时, 不同 α 下的欧式看跌期权价格变化, 如图 3 所示. 由图 3 可知: 当 K 和 S 相差很大, 即 $S\ll K$ 或 $S\gg K$ 时, 时间分数阶导数的阶数 α 对欧式看跌期权价格几乎没有影响; 当 K 和 S 相差不大, 即 $S\approx K$ 时, 期权价格受影响较为显著.

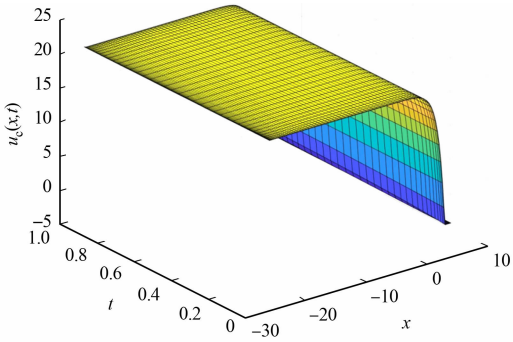


图 2 式(35)的数值解

Fig. 2 Numerical solution of formular (35)

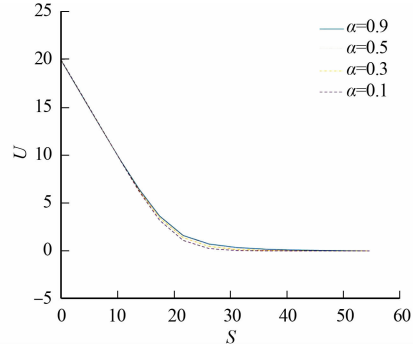
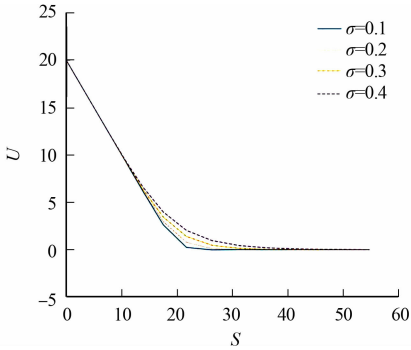


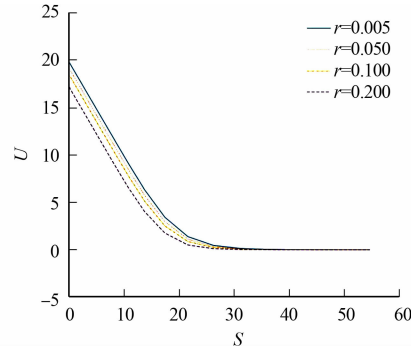
图 3 不同 α 下的欧式看跌期权价格变化

Fig. 3 Price changes of European put option under different α conditions

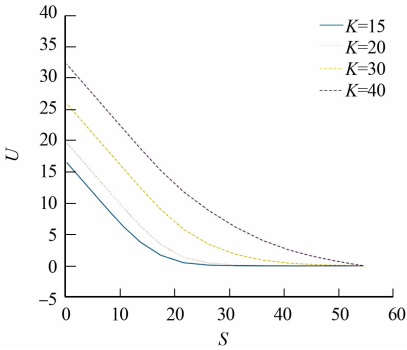
不同 σ, r, K, T 下的欧式期权价格变化, 如图 4 所示.



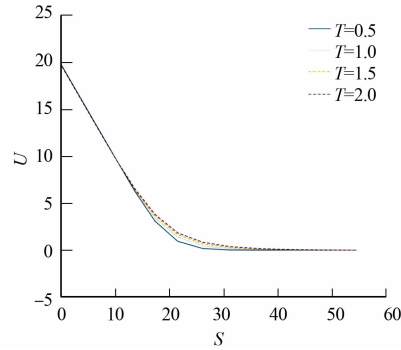
(a) $K=20, r=0.005, T=1$



(b) $K=20, T=1, \sigma=0.3$



(c) $r=0.005, T=1, \sigma=0.3$



(d) $K=20, r=0.005, \sigma=0.3$

图 4 不同 σ, r, K, T 下的欧式期权价格变化

Fig. 4 Price changes of European put option under different σ, r, K, T

由图 4(a)可知: 当 σ 在 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 中变化时, S 在 20 的附近, U 将随着股票价格的波动率 σ 的升高而升高, 这与金融界高风险, 高回报的观点相符合. 由图 4(b)可知: r 越高, U 越下跌. 由图 4(c)可知: K 越大, U 越增加. 由图 4(d)可知: T 的变化不会明显引起 U 的变化. 以上结果均与实际情形相符, 从而验证了式(29)在求解分数阶 Black-Scholes 方程初边值问题的有效性.

3 结 束 语

对时间分数阶 Black-Scholes 方程的欧式看跌期权定价问题进行了研究,采用 Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数,将分数阶 Black-Scholes 方程转化为整数阶问题. 在时-空方向均利用重心 Lagrange 插值配点法离散,并给出配点法格式. 与二阶中心差分格式相比,重心 Lagrange 插值配点格式仅需取少量的剖分节点数,便可达到高精度. 该方法可以扩展到具有多个自由度的 Black-Scholes 模型问题的求解中,并可以推广到求解其他时间分数阶微分方程.

参考文献:

[1] BLACK F,SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy,1973,81 (3):637-654. DOI:10. 1086/260062.

[2] MANDELBROT B. The variation of certain speculative prices[J]. Journal of Business,1963,36(4):394-419. DOI: 10. 1142/9789814566926_0003.

[3] MESGARANI H,BEIRANVAND A,AGHDAM Y E. The impact of the Chebyshev collocation method on solutions of the time-fractional Black-Scholes[J]. Mathematical Sciences,2021,15(2):137-143. DOI:10. 1007/s40096-020- 00357-2.

[4] AN Xingyu,LIU Fawang,ZHENG Minling,*et al.* A space-time spectral method for time-fractional Black-Scholes equation[J]. Applied Numerical Mathematics,2021,165:152-166. DOI:10. 1016/j. apnum. 2021. 02. 009.

[5] SHE Mianfu,LI Lili,TANG Renxuan,*et al.* A novel numerical scheme for a time fractional Black-Scholes equation [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2021,66(1/2):853-870. DOI:10. 1007/s12190-020-01467-9.

[6] TIAN Zhaowei,ZHAI Shuying,WENG Zhifeng. A compact quadratic spline collocation method for the time-fractional Black-Scholes model[J]. Journal of Applied Mathematics and Computation,2021,66 (1/2):327-350. DOI:10. 1007/s12190-020-01439-z.

[7] 张俊良,黄俊贤. 求解时间分数阶 B-S 模型的高阶 MQ 拟插值方法[J]. 数学物理学报,2022,42(5):1496-1505. DOI:1003-3998(2022)05-1496-10.

[8] REN Jincheng,SUN Zhizhong,DAI Weizhong. New approximations for solving the Caputo-type fractional partial differential equations[J]. Applied Mathematical Modeling,2016,40(4):2625-2636. DOI:10. 1016/j. apm. 2015. 10. 011.

[9] 汪精英,邓杨芳,翟术英. 利用 Laplace 变换求解分数阶 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2020,41 (4):549-554. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201910013.

[10] 虎小燕,韩惠丽. 重心插值配点法求解分数阶 Fredholm 积分方程[J]. 郑州大学学报(理学版),2017,49(1):17-23. DOI:10. 13705/j. issn. 1671-6841. 2016203.

[11] 翁智峰,姚泽丰,赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2019,40(1): 133-140. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201806043.

[12] 黄蓉,翁智峰. 时间分数阶 Allen-Cahn 方程的重心插值配点法[J]. 华侨大学学报(自然科学版). 2022,43(4):553- 560. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202104060.

[13] 王兆清,徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. 计算物理,2018,35(1):77-86. DOI:10. 19596/j. cnki. 1001246x. 7585.

[14] ZHANG H M,LIU F W,TURNER I,*et al.* Numerical solution of the time fractional Black-Scholes model governing European options[J]. Computers and Mathematics with Applications,2016,71(9):1772-1783. DOI:10. 1016/j. camwa. 2016. 02. 007.

[15] LIAO Wenyuan. A compact high-order finite difference method for unsteady convection-diffusion equation[J]. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics,2012,13(3):135-145. DOI: 10. 1080/15502287. 2012. 660227.

[16] YI Shichao,YAO Linquan. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher-order time-fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. Numerical Methods for Partial Equations,2019,35(5):1694-1716. DOI:10. 1002/num. 22371.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)