

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202110011



# 多重调和映射的同向两点 Schwarz 引理及应用

李俊, 陈铭新, 王建飞

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 建立单位圆盘  $D$  到单位球  $B^n$  上调和映射的同向两点 Schwarz 引理, 给出高维单位球之间的多重调和映射的同向两点 Schwarz 引理, 并将单位圆盘调和映射的 Pavlovic 的结果推广到高维多重调和映射. 作为应用, 得到单位球上多重调和函数的边界 Schwarz 引理.

**关键词:** 调和映射; 多重调和映射; Schwarz 引理; 边界 Schwarz 引理

**中图分类号:** O 174.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)02-0264-05

## Same Direction Two-Point Schwarz Lemma for Pluriharmonic Mappings and Application

LI Jun, CHEN Mingxin, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Establish the same direction two-point Schwarz lemma for harmonic mappings from unit disk  $D$  to the unit ball  $B^n$ , the same direction two-point Schwarz lemma for pluriharmonic mappings between high-dimensional unit balls is given, and Pavlovic's result of harmonic mappings on the unit disk is extended to high-dimensional pluriharmonic mappings. As an application, the boundary Schwarz lemma of pluriharmonic functions on the unit ball is obtained.

**Keywords:** harmonic mappings; pluriharmonic mappings; Schwarz lemma; boundary Schwarz lemma

用  $\mathbf{C}$  表示复平面,  $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$  表示  $\mathbf{C}$  中的单位开圆盘,  $B^n = \{z \in \mathbf{C}^n; \|z\| < 1\}$  表示  $\mathbf{C}^n$  中的欧式单位球,  $S_n = \partial B^n$  表示单位球球面. 其中,  $\|\cdot\|$  表示  $\mathbf{C}^n$  中的欧氏范数, 有  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$ . 当  $n = 1$  时,  $\|z\| = |z|$ .

Schwarz 引理作为复分析中最重要的结果之一, 其本质上说明了单位圆盘上到自身的解析映射关于双曲度量是不增的. 关于调和映射, 也有一些类似于 Schwarz 引理的结果<sup>[1-12]</sup>.

1959 年, Heinz<sup>[1]</sup> 研究单位圆盘上的调和映射, 得到引理 1.

**引理 1<sup>[1]</sup>** 设  $f: D \rightarrow D$  为调和映射,  $f(0) = 0$ , 有

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|, \quad \forall z \in D.$$

收稿日期: 2021-10-11

通信作者: 陈铭新(1967-), 男, 副教授, 博士, 主要从事单复变和多复变函数论的研究. E-mail: chernmx@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12071161); 福建省自然科学基金资助项目(2020J01073)

2004 年, Pavlovic<sup>[2]</sup> 去掉  $f(0)=0$  这一条件, 将引理 1 改进为更一般的形式(引理 2).

**引理 2**<sup>[2]</sup> 设  $f:D\rightarrow D$  为调和映射, 有

$$|f(z)-\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}f(0)|\leqslant \frac{4}{\pi}\arctan |z|, \quad \forall z\in D.$$

由此探究引理 2 对多复变中的多重调和函数是否有类似的结论.

2016 年, Liu 等<sup>[3]</sup> 将引理 2 推广至高维的单位球上, 得到了类似的结果. 为行文方便, 先给出多重调和映射的定义.

**定义 1** 设  $f:B^n\rightarrow\mathbf{C}^n$  为连续复值映射, 若对任意固定的  $z\in B^n$  和  $\beta\in S_n$ , 都有  $f(z+\lambda\beta)$  为关于单变量  $\lambda$  的调和映射,  $\lambda\in\mathbf{C}$ . 其中,  $|\lambda|\leqslant 1-\|z\|$ , 则称  $f$  为  $B^n$  上的多重调和映射.

关于多重调和映射 Schwarz 引理, Liu 等<sup>[3]</sup> 证明了定理 1.

**定理 1**<sup>[3]</sup> 设  $f:B^n\rightarrow B^N$  为多重调和映射, 其中,  $n, N\geqslant 1$ , 有

$$\left\|f(z)-\frac{1-\|z\|^2}{1+\|z\|^2}f(0)\right\|\leqslant \frac{4}{\pi}\arctan \|z\|, \quad \forall z\in B^n.$$

由此探究将  $f(0)$  换为  $f(a)$ , 引理 2 和定理 1 是否有类似的 Schwarz 引理.

本文对该问题进行探究<sup>[13-14]</sup>, 考虑  $a$  与  $z$  同向的情况, 并证明  $a$  与  $z$  同向时, 仍有类似的 Schwarz 引理; 对于  $a$  与  $z$  不同向的情况, 类似的结论一般不成立.

## 1 相关引理

为了给出文中主要结果, 需引入引理 3.

**引理 3** 设  $f:D\rightarrow B^n$  为调和映射,  $f$  在  $\overline{D}$  上连续, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}f(e^{i\theta})d\theta, \quad \forall z\in D.$$

证明: 由条件可知  $f$  可写为

$$f(z)=(f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z)).$$

由调和函数的 Poisson 积分, 可得

$$f_j(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}f_j(e^{i\theta})d\theta, \quad j=1, 2, \cdots, n,$$

从而有  $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}f(e^{i\theta})d\theta.$

## 2 多重调和映射的 Schwarz 引理

**定理 2** 设  $f:D\rightarrow B^N$  为调和映射, 有

$$\left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2}f(r_2e^{i\vartheta})-\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}f(r_1e^{i\vartheta})\right|\leqslant \frac{4}{\pi}\left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2}\arctan r_2-\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}\arctan r_1\right|.$$

上式中:  $r_1, r_2\in[0, 1)$ .

证明: 由对称性, 设  $0\leqslant r_1\leqslant r_2<1$ , 分两种情形予以证明.

情形 1: 当  $\theta=0$  时, 由引理 3, 有

$$f(r_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r_2^2}{1+r_2^2-2r_2\cos\varphi}f^*(e^{i\varphi})d\varphi, \quad f(r_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r_1^2}{1+r_1^2-2r_1\cos\varphi}f^*(e^{i\varphi})d\varphi.$$

上式中:  $f^*(e^{i\varphi})=\lim_{r\rightarrow 1}f(re^{i\varphi})$ , 且  $\|f^*(e^{i\varphi})\|\leqslant 1$ , 这是因为  $\|f(re^{i\varphi})\|<1$ .

从而有

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2}f(r_2)-\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}f(r_1)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+r_2^2}{1+r_2^2-2r_2\cos\varphi}-\frac{1+r_1^2}{1+r_1^2-2r_1\cos\varphi}\right)f^*(e^{i\varphi})d\varphi\right\|= \\ &= \frac{1}{\pi}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[r_2(1+r_1^2)-r_1(1+r_2^2)]\cos\varphi}{(1+r_2^2-2r_2\cos\varphi)(1+r_1^2-2r_1\cos\varphi)}f^*(e^{i\varphi})d\varphi\right\|\leqslant \\ &= \frac{(r_2-r_1)(1-r_1r_2)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\cos\varphi|d\varphi}{(1+r_1^2-2r_1\cos\varphi)(1+r_2^2-2r_2\cos\varphi)}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1+r_1^2-2r_1\cos \varphi)(1+r_2^2-2r_2\cos \varphi)} = \\ &2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1+r_1^2-2r_1\cos \varphi)(1+r_2^2-2r_2\cos \varphi)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1+r_1^2-2r_1\cos \varphi)(1+r_2^2-2r_2\cos \varphi)}\right) = \\ &2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos \varphi}{(1+r_1^2-2r_1\cos \varphi)(1+r_2^2-2r_2\cos \varphi)} + \frac{\cos \varphi}{(1+r_1^2+2r_1\cos \varphi)(1+r_2^2+2r_2\cos \varphi)}\right] d\varphi = \\ &4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2\cos^2\varphi]\cos \varphi}{[(1+r_1^2)^2-4r_1^2\cos^2\varphi][(1+r_2^2)^2-4r_2^2\cos^2\varphi]} d\varphi = 4I, \\ &I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2\cos^2\varphi]\cos \varphi}{[(1+r_1^2)^2-4r_1^2\cos^2\varphi][(1+r_2^2)^2-4r_2^2\cos^2\varphi]} d\varphi = \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2-4r_1r_2\sin^2\varphi}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2\sin^2\varphi][(1-r_2^2)^2+4r_2^2\sin^2\varphi]} d\sin \varphi = \\ &\int_0^1 \frac{(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2-4r_1r_2x^2}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2x^2][(1-r_2^2)^2+4r_2^2x^2]} dx = I_1 - I_2, \\ &I_1 = \int_0^1 \frac{(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2x^2][(1-r_2^2)^2+4r_2^2x^2]} dx, \\ &I_2 = \int_0^1 \frac{4r_1r_2x^2}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2x^2][(1-r_2^2)^2+4r_2^2x^2]} dx. \end{aligned}$$

经简单计算,可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2x^2][(1-r_2^2)^2+4r_2^2x^2]} dx = \\ &\frac{(r_1+r_2)^2+(1+r_1r_2)^2}{16r_1^2r_2^2} \int_0^1 \frac{dx}{[(1-r_1^2)/2r_1]^2+x^2} \frac{1}{[(1-r_2^2)/2r_2]^2+x^2} = \\ &\frac{(r_1+r_2)^2+(1+r_1r_2)^2}{4(r_2^2-r_1^2)(1-r_1^2r_2^2)} \left(\frac{2r_2}{1-r_2^2} \arctan \frac{2r_2}{1-r_2^2} - \frac{2r_1}{1-r_1^2} \arctan \frac{2r_1}{1-r_1^2}\right) = \\ &\frac{(r_1+r_2)^2+(1+r_1r_2)^2}{(r_2^2-r_1^2)(1-r_1^2r_2^2)} \left(\frac{r_2}{1-r_2^2} \arctan r_2 - \frac{r_1}{1-r_1^2} \arctan r_1\right), \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{4r_1r_2x^2dx}{[(1-r_1^2)^2+4r_1^2x^2][(1-r_2^2)^2+4r_2^2x^2]} = \\ &\frac{1}{4r_1r_2} \int_0^1 \frac{x^2dx}{[(1-r_1^2)/2r_1]^2+x^2} \frac{1}{[(1-r_2^2)/2r_2]^2+x^2} = \\ &\frac{r_1r_2}{(r_1^2-r_2^2)(1-r_1^2r_2^2)} \left(\frac{1-r_2^2}{r_2} \arctan r_2 - \frac{1-r_1^2}{r_1} \arctan r_1\right). \end{aligned}$$

因此,有

$$\left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2}f(r_2)-\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}f(r_1)\right| \leq \frac{(r_2-r_1)(1-r_1r_2)}{\pi} 4|I_1-I_2| \leq \frac{4}{\pi} \left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2} \arctan r_2 - \frac{1+r_1^2}{1-r_1^2} \arctan r_1\right|.$$

情形 2:当  $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  时,固定  $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . 令  $g(\xi)=f(\xi e^{i\theta}), \xi \in D$ , 则  $g:D \rightarrow B^N$  为调和映射,对  $g(\xi)$  应用情形 1,即可得出结论.

**注 1** 当  $r_1=0, N=1$  时,定理 2 就是引理 2 的结果;对于不同向的两点,定理 2 的结论一般不成立,例如,取反方向两点  $f(-r)$  与  $f(r)$ ,结论显然不成立.

**注 2** 当  $f(z)=\frac{4}{\pi} \arctan z, \theta=0$  时,定理 2 的不等式可以取到等号,这表明定理 2 的不等式是不可改进的.

作为定理 2 的直接应用,建立单位球上的多重调和映射的 Schwarz 引理(定理 3).

**定理 3** 设  $f:B^n \rightarrow B^N$  为多重调和映射,其中,  $n, N \geq 1$ , 有

$$\left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2}f(r_2\beta)-\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}f(r_1\beta)\right| \leq \frac{4}{\pi} \left|\frac{1+r_2^2}{1-r_2^2} \arctan r_2 - \frac{1+r_1^2}{1-r_1^2} \arctan r_1\right|.$$

上式中:  $r_1, r_2 \in [0, 1); \beta \in S_n$ .

证明: 对于任意固定的  $\beta \in S_n$ , 令  $h(\lambda) = f(\lambda\beta), \lambda \in D$ , 则  $h: D \rightarrow B^N$  为调和映射, 应用定理 2 即可得出结论.

注 3 当  $r_1 = 0$  时, 定理 3 就是定理 1 的结果.

### 3 定理 3 的应用

为叙述方便, 以下记  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n); z_j = x_j + y_j, j = 1, 2, \dots, n; e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

2018 年, Wang 等<sup>[15]</sup>给出了 Poisson 方程解的边界 Schwarz 引理(定理 4).

定理 4<sup>[15]</sup> 设  $f$  从  $\overline{D}$  映射到自身,  $f \in C^2(D) \cap C(\partial D)$ , 若  $f$  在  $z = 1$  处可微, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1, \Delta f = g, g \in C(\overline{D}), \|g\|_\infty = \sup_{z \in \overline{D}} \{|g(z)|\} < \frac{8}{3\pi}$ , 有

$$\operatorname{Re} [f_x(1)] \geq \frac{2}{\pi} - \frac{3}{4} \|g\|_\infty.$$

应用定理 3, 给出多重调和函数的边界 Schwarz 引理(定理 5).

定理 5 设  $f: B^n \rightarrow D$  为多重调和函数,  $f$  在  $z = e_1$  附近有定义且连续, 若  $f(e_1) = 1, f$  在  $e_1$  处可微, 则有以下 2 个结论成立. 1)  $\operatorname{Re} f_x(e_1) \geq 0$ ; 2) 若  $|f(0)| \leq \frac{2}{\pi}$ , 则  $\operatorname{Re} f_x(e_1) \geq \frac{2}{\pi} - |f(0)|$ .

证明: 1) 在  $z = e_1$  附近, 由 Taylor 展开可得

$$f(z) = f(e_1) + f_{x_1}(e_1)(x_1 - 1) + f_{y_1}(e_1)y_1 + \dots + f_{x_n}(e_1)x_n + f_{y_n}(e_1)y_n + o(|z - 1|).$$

由条件  $f(e_1) = 1, |f(z)| < 1$ , 有

$$|1 + f_{x_1}(e_1)(x_1 - 1) + f_{y_1}(e_1)y_1 + \dots + f_{x_n}(e_1)x_n + f_{y_n}(e_1)y_n + o(|z - 1|)| < 1.$$

取  $z = (x_1, 0, \dots, 0), -1 < x_1 < 1$ , 可得  $|1 + f_{x_1}(e_1)(x_1 - 1) + o(|z - 1|)| < 1$ , 有  $1 + 2\operatorname{Re} f_{x_1}(e_1)(x_1 - 1) + o(|x_1 - 1|) < 1$ . 既有  $2\operatorname{Re} f_{x_1}(e_1) \geq \frac{o(|1 - x_1|)}{1 - x_1}$ , 令  $x_1 \rightarrow 1^-$ , 可得  $\operatorname{Re} f_{x_1}(e_1) \geq 0$ .

2) 应用定理 3, 取  $N = 1, r_1 = 0$ , 可得

$$\left| \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} f(z) - f(0) \right| \leq \frac{4}{\pi} \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} \arctan |z|, \quad \forall z \in B^n.$$

从而有

$$\frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} |f(z)| \leq |f(0)| + \frac{4}{\pi} \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} \arctan |z|,$$

即

$$|f(z)| \leq \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} |f(0)| + \frac{4}{\pi} \arctan |z|.$$

当  $|f(0)| \leq \frac{2}{\pi}, 0 \leq t < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} |f(0)| + \frac{4}{\pi} \arctan |t| \right)' &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + t^2} - \frac{4t}{(1 + t^2)^2} |f(0)| > \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + t^2} - \frac{2(1 + t^2)}{(1 + t^2)^2} |f(0)| = \\ &= \frac{2}{1 + t^2} \left( \frac{2}{\pi} - |f(0)| \right) \geq 0. \end{aligned}$$

这表明当  $|f(0)| \leq \frac{2}{\pi}$  时, 有

$$|f(z)| \leq \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} |f(0)| + \frac{4}{\pi} \arctan |z| < 1, \quad \forall z \in B^n.$$

因此, 有

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f_x(e_1)| &= \lim_{x_1 \rightarrow 1^-} \left| \frac{\operatorname{Re} f(x_1, 0, \cdots, 0) - \operatorname{Re} f(e_1)}{x_1 - 1} \right| = \\ &\lim_{x_1 \rightarrow 1^-} \frac{1 - \operatorname{Re} f(x_1, 0, \cdots, 0)}{1 - x_1} \geq \lim_{x_1 \rightarrow 1^-} \frac{1 - |f(x_1, 0, \cdots, 0)|}{1 - x_1} \geq \\ &\lim_{x_1 \rightarrow 1^-} \frac{1 - \frac{4}{\pi} \arctan x_1 - \frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2} |f(0)|}{1 - x_1} = \frac{2}{\pi} - |f(0)|. \end{aligned}$$

由  $\operatorname{Re} f_x(e_1) \geq 0$ , 可得不等式  $\operatorname{Re} f_x(e_1) \geq \frac{2}{\pi} - |f(0)|$ .

**注 4** 当  $n=1, f(0)=0$  时, 定理 5 回到了定理 4 中  $g \equiv 0$  的情形.

参考文献:

[1] HEINZ E. On one-to-one harmonic mappings[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1959, 9(1): 101-105. DOI: 10. 2140/pjm. 1959. 9. 101.

[2] PAVLOVIC M. Introduction to function spaces on the disk[M]. Belgrade: Matematicki Institut SANU, 2004. DOI: 10. 13140/RG. 2. 1. 3215. 5687.

[3] LIU Yang, DAI Shaoyu, PAN Yifei. Boundary Schwarz lemma for pluriharmonic mappings between unit balls[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 433(1): 487-495. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2015. 08. 008.

[4] DAI Shaoyu, CHEN Huaihui, PAN Yifei. The high order Schwarz-Pick lemma on complex Hilbert balls[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(10): 2649-2656. DOI: 10. 1007/s11425-010-3119-3.

[5] CHEN Huaihui. The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings[J]. Science China Mathematics, 2011, 54(6): 1101-1118. DOI: 10. 1007/s11425-011-4193-x.

[6] LIU Taishun, WANG Jianfei, TANG Xiaomin. Schwarz lemma at the boundary of the unit ball in  $\mathbb{C}^n$  and its applications[J]. Journal of Geometric Analysis, 2015, 25(3): 1890-1914. DOI: 10. 1007/s12220-014-9497-y.

[7] TANG Xiaomin, LIU Taishun, LU Jin. Schwarz lemma at the boundary of the unit polydisk in  $\mathbb{C}^n$  [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2015, 58(8): 1639-1652. DOI: 10. 1007/s11425-015-4975-7.

[8] LIU Yang, CHEN Zhihua. Schwarz-Pick estimates for holomorphic mappings from the polydisk to the unit ball[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376(1): 123-128. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2010. 10. 040.

[9] KRANTZ S. The Schwarz lemma at the boundary[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2011, 56(5): 455-468. DOI: 10. 1080/17476931003728438.

[10] XU Zhenghua. Schwarz lemma for pluriharmonic functions[J]. Indagationes Mathematicae, 2016, 27(4): 923-929. DOI: 10. 1016/j. indag. 2016. 06. 002.

[11] PARTYKA D, ZAJAC J. The Schwarz type inequality for harmonic mappings of the unit disc with boundary normalization[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2015, 9(1): 213-228. DOI: 10. 1007/s11785-014-0398-7.

[12] GARNETT J. Bounded analytic functions[J]. The American Mathematical Monthly, 1981, 89(7): 1-7. DOI: 10. 2307/2321411.

[13] GRAUERT H. Methods of the theory of functions of several complex variables[M]. Berlin: Springer, 1991. DOI: 10. 1007/978-3-642-76709-8\_8.

[14] AHLFORS L. Conformal invariants: Topics in geometric function theory[M]. New York: American Mathematical Society, 1973. DOI: 10. 1016/S0246-0203(01)01089-5.

[15] WANG Xiantao, ZHU Jianfeng. Boundary Schwarz lemma for solutions to Poisson's equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 463(2): 623-633. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2018. 03. 043.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)