

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202108027



技能映射通过析取模型诱导的 多分知识结构

孙晓燕¹, 李进金^{1,2}

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;

2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要: 基于程序性知识的评估, 提出由项目自身的状态结构诱导多分知识结构的方法, 以建立适用于问题解答的多分评估体系. 首先, 根据各项目的解答或操作步骤设定响应值集, 通过项目状态转移函数定义项目状态空间; 然后, 用操作程序表示技能, 由过程函数导出析取的技能映射; 最后, 讨论技能映射通过析取模型诱导的多分知识结构. 结果表明: 技能映射通过析取模型诱导的多分知识结构是多分知识空间.

关键词: 多分知识结构; 项目状态转移函数; 操作程序; 技能映射

中图分类号: TP 182

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2023)01-0119-14

Polytomous Knowledge Structure Delineated by Skill Map Through Disjunctive Model

SUN Xiaoyan¹, LI Jinjin^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: Based on the assessment of procedural knowledge, one method of delineating polytomous knowledge structure from the state structure of the item itself is proposed to establish a polytomous assessment system suitable for problem solving. Firstly, the response value set is set according to the solution or operation steps of each item, and the item state space is defined by the item state transition function. Next, skills are represented by operation procedures, and the disjunctive skill maps are derived by process functions. Finally, the polytomous knowledge structures delineated by skill maps through disjunctive model are discussed. The results show that any polytomous knowledge structure delineated by a skill map through disjunctive model is a polytomous knowledge space.

Keywords: polytomous knowledge structure; item state transition function; operation procedure; skill map

知识空间理论(KST)源于 Birkhoff^[1-2]提出的关于拟序的定理. 文献[3-5]结合教育心理学将 KST 发展完善, 并建立了一套反映教育教学规律的数学理论, 为知识和学习的评价提供了有效的科学方法^[5-7]. KST 的一个核心的假设是个体对项目的回答可以被二分为正确(用 1 表示)或错误(用 0 表示), 这使得 KST 在对知识和学习进行评价时具有局限性. 二分的评价体系仅适用于判断、选择等客观题, 而对于解答题、应用题等主观题则无法适用. 针对这一局限性, Schrepp^[8]首先将 KST 推广到有 2 个以上

收稿日期: 2021-08-29

通信作者: 孙晓燕(1978-), 女, 讲师, 主要从事拓扑学与不确定性理论的研究. E-mail: sxy96001@aliyun.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11871259, 11971287); 福建省自然科学基金资助项目(2019J01748, 2020J02043)

答案的问题,用线性有序集评估解决方案的质量,并提出一个严格封闭的知识结构. Bartl 等^[9]讨论了具有分级知识状态的知识空间. Stefanutti 等^[10]提出了 KST 的多分推广,假设项目集上的水平集为完备格,并将严格封闭条件分解为多分知识结构的 4 个独立性质构成的充要条件集合. Heller^[11]在 Stefanutti 等^[10]的基础上,将拟序知识空间推广到多分情形,提出了多分知识结构的 2 个条件,并考虑了项目特定的响应尺度.

技能代表潜在的认知能力,是利用知识和经验执行某些活动的的能力. Falmagne 等^[4]首先建立了问题和技能之间的联系. Doignon^[12]将技能映射引入 KST 中. Duntsch 等^[13]提出的技能函数通过为每个项目分配一个相关的技能子集,将可观察的解决方案与一些潜在的认知结构联系起来. Korossy^[14]在技能集上建立相应的技能空间. Heller 等^[15]探索基于能力的个性化学习的知识结构,并研究了分布式技能函数和知识结构的网格化^[16]. 近年来,人们越来越重视技能和知识的评估及其程序化应用^[17-22]. 在 Stefanutti^[18]提出的框架中,问题的解决过程被描述为从操作集合中获取操作序列,技能用操作序列表示,操作序列应用于某初始状态,产生一个最终状态,由此定义问题的状态空间,从而诱导出知识空间.

基于 Stefanutti 等^[10]与 Heller^[11]提出的知识空间的多分推广,及 Stefanutti^[18]提出的程序性知识的评价,本文提出根据各项目的操作步骤设定响应值集的框架,通过状态转移函数定义项目状态空间,并导出析取的技能映射,证明技能映射通过析取模型诱导的多分知识结构是多分知识空间.

1 预备知识

1.1 技能映射诱导的知识结构

在 KST 中,知识域 Q 由一组关于特定主题的项目的集合表示,项目的答案可以被二分为正确(用 1 表示)或错误(用 0 表示). 知识状态 K 是 Q 的子集,表示个人有能力在理想条件下(即假设粗心的错误和幸运的猜对不会发生)正确回答的项目的集合. 知识结构是二元组 (Q, \mathcal{K}) ,其中, \mathcal{K} 是一个由 Q 的子集构成的知识状态集族,且至少包含 \emptyset 和 Q . 知识结构 (Q, \mathcal{K}) 是并封闭的,当且仅当对任意的 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}, \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{K}$. 满足并封闭的知识结构 (Q, \mathcal{K}) 称为知识空间. 有关 KST 的详细描述,见文献[5-7].

技能是与项目的解决相关的算法步骤或操作程序. 在 KST 中,通过技能映射将知识域 Q 中的每个项目与有助于解决这个项目的技能联系起来,并从这个关联中推断出知识状态. 由技能映射诱导知识状态的模型有析取、合取与能力模型. 在以下的多分推广中,仅考虑析取模型.

设非空的项目集 Q ,非空的技能集 S ,技能映射是三元组 (Q, S, τ) ,其中, τ 是从 Q 到 S 的非空幂集的映射, $\tau: Q \rightarrow 2^S \setminus \{\emptyset\}$. 给定 $T \subseteq S$,由 T 通过析取模型诱导的知识状态为

$$K_T = \{q \in Q \mid \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}.$$

取遍 $T \subseteq S$,所有诱导的知识状态的集合是由 τ 通过析取模型诱导的知识结构. 由 τ 通过析取模型诱导的知识结构是知识空间. 有关技能映射及其诱导的知识结构的详细背景,见文献[6-7].

1.2 多分知识状态

在 KST 的多分推广中,知识域 Q 中的项目的解决质量由水平集 L 中的级别 $l \in L$ 表示. 在 Schrepp^[8]提出的 KST 多分推广中, L 是线性有序集. Stefanutti 等^[10]设定 L 是完备格.

设 X 是非空集, \leq 是 X 上的偏序关系(即满足自反性、传递性、反对称性的二元关系),则称 (X, \leq) 为偏序集. 设 (X, \leq) 为偏序集,对于任意的 $A \subseteq X$, A 的最小上界称为 A 的上确界,记为 $\sup A$ 或 $\bigvee A$; A 的最大下界称为 A 的下确界,记为 $\inf A$ 或 $\bigwedge A$. 若 $\forall A \subseteq X$,恒有 $\sup A$ 与 $\inf A$ 存在,则称 (X, \leq) 为完备格. 若 $\forall a, b \in X$,恒有 $\sup\{a, b\} = a \vee b$ 与 $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ 存在,则称 (X, \leq) 为格. 有限格是完备格. 有关格理论的详细背景知识,见文献[2, 23-24].

在 Heller^[11]提出的 KST 多分推广中,个体对知识域 Q 中各项目的掌握程度用有限的响应值集 V 表示,且设非空有限响应值集 V 是格,由于 V 是有限的,所以 V 是完备格.

多分知识状态是 Q 到 V 的映射 $K: Q \rightarrow V$,表示将 Q 中每个项目对应 V 中的一个响应值. 这样的映射集合记为 $V^Q = \prod_{q \in Q} V$. 多分知识状态有两种表示形式,分别由 Heller^[11]和 Stefanutti 等^[10]提出.

子集表示法^[11]:多分知识状态 K 是 $Q \times V$ 的一个特定子集,即对于任意 $K \in V^Q, K \subseteq Q \times V$. 记

$$p^v=(p,v)\in Q\times V,$$

对于任意 $K\in V^Q$, 规定 $p^v\in K\Leftrightarrow K(p)=v$, 则

$$K=\{p^v\mid p\in Q, K(p)=v\in V\}\subseteq Q\times V.$$

向量表示法^[10]: 在给定的有限知识域 Q 中, 设 $|Q|=n$, 当固定各项目的顺序时, 多分知识状态 K 可以简记为以 V 中的响应值为分量的 n 维向量. 设 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, 对于任意 $K\in V^Q$, 记

$$\mathbf{K}=v_1v_2\cdots v_n=(v_1, v_2, \cdots, v_n).$$

上式中: $v_i=K(q_i), q_i\in Q, i=1, 2, \cdots, n$.

例如, 设 $Q=\{a, b, c\}, V=\{0, 1, 2\}$, 多分知识状态 $K:Q\rightarrow V$ 定义为 $K(a)=1, K(b)=2, K(c)=0$, 则多分知识状态 K 的子集形式为 $K=\{a^1, b^2, c^0\}\subseteq Q\times V$. 固定各项目顺序为 $q_1=a, q_2=b, q_3=c$, 则多分知识状态 K 用向量形式表示为 $\mathbf{K}=120=(1, 2, 0)$.

为了避免记号的混乱, 在以下论述与推导中, 均采用多分知识状态的子集表示法, 向量表示法仅出现在图形中. 另外, 由于文中仅考虑有限知识与有限知识空间的多分推广, 因此, 在以下论述中均假设知识域 Q 是有限集, 且 Q 中各项目的响应值集是有限集.

2 技能映射诱导的多分知识结构

2.1 项目特定的响应值集

设非空有限项目集 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, 由于不同项目的响应值集可能不同, 需要考虑项目特定的响应值集. 采用 Heller^[11] 提出的 KST 多分推广中的假设, 即用有限响应值集 V_i 表示个体对项目 $q_i\in Q$ 的掌握程度, 设 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 是一族非空有限响应值集, 其中, $\forall q_i\in Q, (V_i, \leq_i)$ 是格. 由于有限格是完备格, 故 (V_i, \leq_i) 是完备格, $i=1, 2, \cdots, n$. $\inf V_i$ 称为 V_i 的底元, 记为 \perp_i ; $\sup V_i$ 称为 V_i 的顶元, 记为 \top_i .

例 1 设 $Q=\{q_1, q_2\}$. 项目 q_1 为解方程 $2+x^2=x^2+2x$; 项目 q_2 为解方程 $|x-3|=3$. 根据项目解答步骤或操作程序的类型设定响应值集, 2 个项目的响应值集的格结构不同.

q_1 的解答为

$$2+x^2=x^2+2x\left\{\begin{array}{l}\Rightarrow 2x=2(\text{响应值 } 1); \\ \Rightarrow x=1.\end{array}\right\}(\text{响应值 } 2)$$

q_1 的解答步骤是层层递推的. 设 V_1 为有限线性序集, 即 $V_1=\{0, 1, 2\}$.

q_2 的解答为

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x-3\geq 0 \text{ 时, } x-3=3\Rightarrow x=6(\text{响应值 } a); \\ \text{当 } x-3< 0 \text{ 时, } -x+3=3\Rightarrow x=0(\text{响应值 } b).\end{array}\right\}(\text{响应值 } c)$$

q_2 的解答步骤中有分类讨论. $V_2=\{0, a, b, c\}$, 其中, $0\leq_2 a, 0\leq_2 b, a\leq_2 c, b\leq_2 c, a$ 与 b 是不可比较的, 且 $a\vee_2 b=c$. 有限格 $V_2=\{0, a, b, c\}$ 的 Hasse 图, 如图 1 所示. 由图 1 可知: V_2 不是线性序集.

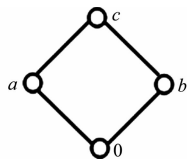


图 1 有限格 $V_2=\{0, a, b, c\}$ 的 Hasse 图

Fig. 1 Hasse diagram of finite lattice $V_2=\{0, a, b, c\}$

例 2 设 $Q=\{q_1, q_2\}$. 项目 q_1 : 甲用 10 元购买文具, 笔记本的单价为每本 6 元, 甲购买 1 本笔记本应找回多少元? 项目 q_2 : 甲用 20 元购买水果, 橙子、苹果的单价分别为每 500 g 7 元和每 500 g 5 元, 甲购买 500 g 橙子和 500 g 苹果应找回多少元? 对于层层递推的项目解答或操作, 根据步数设定响应值集, 响应尺度可能不同.

q_1 的解答为 $10-6=4$ (响应值 1).

由于 q_1 的解答只需一步, 即计算 2 个数的差, 设定 V_1 为二分的响应值集, 即 $V_1=\{0, 1\}$.

q_2 的解答为

$$\left.\begin{array}{l}7+5=12(\text{响应值 } 1); \\ 20-12=8.\end{array}\right\}(\text{响应值 } 2)$$

q_2 的解答过程分两步, 是层层递推的. 第 1 步是“求甲购买 500 g 苹果和 500 g 橙子共需多少元?”, 即求 2 个数的和; 第 2 步是求 2 个数的差. 故设定 V_2 为三分的响应值集, 即 $V_2=\{0, 1, 2\}$.

2.2 多分知识结构

设项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$. Q 上的非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, $\forall q_i\in Q, V_i$ 是项目 q_i 的响应值集, 且 (V_i, \leq_i) 是格, $i=1,2,\cdots,n$. 多分知识状态是映射 $K:Q\rightarrow\bigcup_{i=1}^n V_i$, 其中, $\forall q_i\in Q, K(q_i)\in V_i$ 表示将项目 q_i 对应于 V_i 中的一个响应值, $i=1,2,\cdots,n$. 这样的映射集合记为 $V_i^Q=\prod_{i=1}^n V_i$, $\prod_{i=1}^n V_i$ 是 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 的笛卡尔积. 对于任意的 $K_1, K_2\in V_i^Q$, 规定

$$K_1\subseteq K_2\Leftrightarrow\forall q_i\in Q, \quad K_1(q_i)\leq_i K_2(q_i), \quad i=1,2,\cdots,n.$$

则 (V_i^Q, \subseteq) 是偏序集, 称为偏序集族 $\{(V_i, \leq_i)\}_{i=1}^n$ 的直积^[23]. 由于 $\{(V_i, \leq_i)\}_{i=1}^n$ 是一族完备格, 所以其直积 (V_i^Q, \subseteq) 也是完备格^[23].

注 1 对于任意的 $K_1, K_2\in V_i^Q$, 规定 $K_1=K_2\Leftrightarrow\forall i=1,2,\cdots,n, K_1(q_i)=_i K_2(q_i); K_1\sqsubset K_2\Leftrightarrow K_1\subseteq K_2$, 且存在 $q_j\in Q$, 使得 $K_1(q_j)\neq_j K_2(q_j)$.

定义 1 设项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$. Q 上的响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, V_i 是项目 q_i 的非空有限响应值集, 且 (V_i, \leq_i) 是格, $i=1,2,\cdots,n$. 对于任意的项目 $q_i\in Q$, 任意 $q_i^v\in\{q_i\}\times V_i, q_i^v$ 称为项目 q_i 的 v 层次状态. 特别地, $q_i^{\perp_i}$ 称为项目 q_i 的初始状态, $q_i^{\top_i}$ 称为项目 q_i 的终止状态. 记 $\Omega_i=\{q_i\}\times V_i, \Omega_i$ 称为项目 q_i 的状态集.

例 2 中, $Q=\{q_1,q_2\}, V_1=\{0,1\}, V_2=\{0,1,2\}$. q_1 的初始状态为 q_1^0 , 终止状态为 q_1^1 , 项目 q_1 的状态集为 $\Omega_1=\{q_1\}\times V_1=\{q_1^0, q_1^1\}$; 项目 q_2 的初始状态为 q_2^0 , 终止状态为 q_2^2 , q_2 的状态集为 $\Omega_2=\{q_2\}\times V_2=\{q_2^0, q_2^1, q_2^2\}$.

注 2 项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 及其响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 上的多分知识状态 $K\in V_i^Q$ 的子集形式为

$$K=\{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \cdots, q_n^{v_n}\}\subseteq\bigcup_{i=1}^n \Omega_i.$$

上式中: $v_i\in V_i, i=1,\cdots,n$.

特别地, $\inf(V_i^Q)=\{q_1^{\perp_1}, q_2^{\perp_2}, \cdots, q_n^{\perp_n}\}$ 称为 V_i^Q 的底元, $\sup(V_i^Q)=\{q_1^{\top_1}, q_2^{\top_2}, \cdots, q_n^{\top_n}\}$ 称为 V_i^Q 的顶元. 为了简化记号, 记 $\Omega=\bigcup_{i=1}^n \Omega_i$.

例如, 在例 2 中, $\Omega=\bigcup_{i=1}^n \Omega_i=\{q_1^0, q_1^1, q_2^0, q_2^1, q_2^2\}$. 设多分知识状态 $K:Q\rightarrow\bigcup_{i=1}^n V_i$ 定义为 $K(q_1)=1, K(q_2)=2$, 则 K 的子集形式为 $K=\{q_1^1, q_2^2\}\subseteq\Omega$. V_i^Q 的底元为 $\{q_1^0, q_2^0\}$, 顶元为 $\{q_1^1, q_2^2\}$.

定义 2^[11] 设项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1,2,\cdots,n$. 多分知识结构是三元组 $(Q, \{V_i\}_{i=1}^n, \mathcal{K})$, 其中, \mathcal{K} 是多分知识状态的集合, 且 \mathcal{K} 满足 2 个条件:

- 1) \mathcal{K} 至少包含 V_i^Q 的底元 $\{q_1^{\perp_1}, q_2^{\perp_2}, \cdots, q_n^{\perp_n}\}$ 和 V_i^Q 的顶元 $\{q_1^{\top_1}, q_2^{\top_2}, \cdots, q_n^{\top_n}\}$;
- 2) $\bigcup_{K\in\mathcal{K}} K=\Omega$, 即对于任意的 $p^v\in\Omega, \mathcal{K}(p^v)=\{K\in\mathcal{K}: p^v\in K\}\neq\emptyset$.

例 3 续例 1, $Q=\{q_1,q_2\}, V_1=\{0,1,2\}, V_2=\{0,a,b,c\}$, 其中, $0\leq_2 a, 0\leq_2 b, a\leq_2 c, b\leq_2 c$. 则 V_i^Q 的底元为 $\{q_1^0, q_2^0\}$, 顶元为 $\{q_1^2, q_2^c\}$, $\Omega=\{q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_2^0, q_2^a, q_2^b, q_2^c\}$.

例 3 的结构 $(\mathcal{K}_1, \subseteq)$ 的 Hasse 图, 如图 2 所示,

$$\mathcal{K}_1=\{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^1, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^b\}, \{q_1^1, q_2^c\}\},$$

\mathcal{K}_1 是格. 由 $\{q_1^2, q_2^c\}\notin\mathcal{K}_1$ 可知, \mathcal{K}_1 不满足定义 2 的条件 1), 所以, \mathcal{K}_1 不是多分知识结构.

例 3 的结构 $(\mathcal{K}_2, \subseteq)$ 的 Hasse 图, 如图 3 所示,

$$\mathcal{K}_2=\{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^0, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^0\}, \{q_1^2, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^c\}, \{q_1^2, q_2^c\}\},$$

\mathcal{K}_2 不是格. $\{q_1^0, q_2^a\}$ 和 $\{q_1^1, q_2^0\}$ 在 \mathcal{K}_2 中的上界有 $\{q_1^2, q_2^a\}$ 与 $\{q_1^1, q_2^c\}$, 但是 $\{q_1^2, q_2^a\}$ 与 $\{q_1^1, q_2^c\}$ 不可比较, 故 $\{q_1^0, q_2^a\}$ 和 $\{q_1^1, q_2^0\}$ 在 \mathcal{K}_2 中无最小上界, 即 $\sup\{\{q_1^0, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^0\}\}$ 在 \mathcal{K}_2 中不存在, 所以, \mathcal{K}_2 不是格. 由于 $q_2^b\notin\bigcup_{K\in\mathcal{K}_2} K$, 所以, \mathcal{K}_2 不满足定义 2 的条件 2), 因此, \mathcal{K}_2 也不是多分知识结构.

例 3 的结构 $(\mathcal{K}_3, \subseteq)$ 的 Hasse 图, 如图 4 所示,

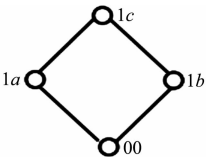


图 2 例 3 的结构 $(\mathcal{K}_1, \subseteq)$ 的 Hasse 图

Fig. 2 Hasse diagram of structure $(\mathcal{K}_1, \subseteq)$ of example 3

$$\mathcal{K}_3 = \{ \{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^2, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^b\}, \{q_1^2, q_2^c\} \},$$

\mathcal{K}_3 是格. 由 $\{q_1^0, q_2^0\} \in \mathcal{K}_3$ 且 $\{q_1^2, q_2^c\} \in \mathcal{K}_3$ 可知, \mathcal{K}_3 满足定义 2 的条件 1). 由 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}_3} K = \{q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_2^0, q_2^a, q_2^b, q_2^c\} = \Omega$ 可知, \mathcal{K}_3 满足定义 2 的条件 2), 所以, \mathcal{K}_3 是多分知识结构.

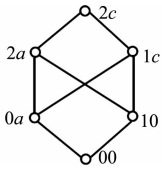


图 3 例 3 的结构 $(\mathcal{K}_2, \subseteq)$ 的 Hasse 图

Fig. 3 Hasse diagram of structure $(\mathcal{K}_2, \subseteq)$ of example 3

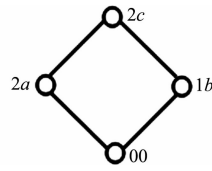


图 4 例 3 的结构 $(\mathcal{K}_3, \subseteq)$ 的 Hasse 图

Fig. 4 Hasse diagram of structure $(\mathcal{K}_3, \subseteq)$ of example 3

注 3^[10-11] 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i = 1, 2, \dots, n$. 对于任意的多分知识结构 $(Q, \{V_i\}_{i=1}^n, \mathcal{K})$, 任意给定 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, K_1 与 K_2 的逐项并是映射 $K_1 \sqcup K_2: Q \rightarrow \bigcup_{i=1}^n V_i$, 其中, $(K_1 \sqcup K_2)(q_i) = K_1(q_i) \vee_i K_2(q_i), i = 1, 2, \dots, n$; K_1 与 K_2 的逐项交是映射 $K_1 \sqcap K_2: Q \rightarrow \bigcup_{i=1}^n V_i$, 其中, $(K_1 \sqcap K_2)(q_i) = K_1(q_i) \wedge_i K_2(q_i), i = 1, 2, \dots, n$. 特别地, 对于 $\emptyset \subseteq K$, 规定 $(\sqcup \emptyset)(q_i) = \perp_i, i = 1, 2, \dots, n$; $(\sqcap \emptyset)(q_i) = \top_i, i = 1, 2, \dots, n$.

设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i = 1, 2, \dots, n$. 对于任意给定的多分知识结构 $(Q, \{V_i\}_{i=1}^n, \mathcal{K})$, \mathcal{K} 满足逐项并 \sqcup -封闭, 当且仅当对于任意的 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, 恒有 $K_1 \sqcup K_2 \in \mathcal{K}$. \mathcal{K} 满足逐项交 \sqcap -封闭, 当且仅当对于任意的 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, 恒有 $K_1 \sqcap K_2 \in \mathcal{K}$. 满足逐项并 \sqcup -封闭的多分知识结构称为多分知识空间^[10].

例如, 在例 3 中, 由于 \mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_2 都不是多分知识结构, 所以, \mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_2 都不是多分知识空间. 因为 \mathcal{K}_3 是多分知识结构, 且 \mathcal{K}_3 满足逐项并 \sqcup -封闭, 所以, \mathcal{K}_3 是多分知识空间.

2.3 项目的状态空间与项目的相关技能

设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. 这里提出的框架中, 响应值集是根据项目的解答或操作步骤设定的. 为了保证操作步骤的有限性, 假定各项目的解答或操作是非循环的. 对于任意的项目 $q_i \in Q, q_i$ 的操作集是由其解答或操作的每个步骤构成的集合, 记为 Δ_i . 在这里, 仅考虑每个项目的某个特定解法, 对于一题多解的情形将在能力模型中考虑.

命题 1 对于任意的项目 $q \in Q$, 设 q 的解答或操作非循环且步骤数有限, 则项目 q 的操作集 Δ 是有限集. 设 $\Delta = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$, 根据每步操作逐一设定响应值, 得到项目 q 的响应值集 V 是有限格.

1) 如果项目 q 的解答或操作是层层递推的, 且步骤数为 r , 记第 k 步操作为 $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, r$, 则 q 的操作集为 $\Delta = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. 设项目 q 的初始状态为 q^0 , 即 q 的响应值集 V 的底元为 0, 根据每步操作逐一设定响应值, 即每步操作产生新的项目状态, 对应的响应值加 1, 则项目 q 的响应值集 V 为有限线性序集, 且 $V = \{0, 1, \dots, r\}$.

2) 如果 q 的解答或操作中具有 n 个分支, 则 V 不是线性序集. 首先, 按各分支的层层递推的步骤数设定各分支上线性有序的响应值集, 再将任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个不可比较的响应值的上确界 (称为分支定向并^[11]) 设为新的响应值, 并且规定当 $n=2$ 时, 设 a_1 与 b_1 不可比较, a_2 与 b_2 不可比较, 且 $a_1 \vee b_1 = c, a_2 \vee b_2 = d$, 如果 $a_1 \leq a_2$ 且 $b_1 \leq b_2$, 则 $c \leq d$; 否则, c 与 d 不可比较. 当 $n>2$ 时, 设 $A \subseteq V, B \subseteq V$, 若 $A \subseteq B$, 则 $\vee A \leq \vee B$; 若 $\forall l \in A$, 恒有 $m \in B$, 使得 $l \leq m$, 则 $\vee A \leq \vee B$; 否则, $\vee A$ 与 $\vee B$ 不可比较. 这样得到的项目 q 的响应值集 V 为有限格.

例如, 例 1 中的项目 q_1 的解答步骤是层层递推的, 且步骤数为 2, 所以, 设定 V_1 为有限线性序集, 且 $V_1 = \{0, 1, 2\}$. 项目 q_2 的解答有 2 个分支, 2 个分支的步骤数均设定为 1, 所以, 2 个分支上的响应值分别为 $0 \leq_2 a, 0 \leq_2 b$. 由于 a 和 b 不可比较, 设响应值 $c = a \vee_2 b$, 得 $V_2 = \{0, a, b, c\}$. V_2 是有限格.

如果将例 1 中 q_2 的 2 个分支步骤数均设定为 2, 即

当 $x-3\geqslant 0$ 时, $x-3=3$ (响应值 a_1)
 $\Rightarrow x=6$;

当 $x-3<0$ 时, $-x+3=3$ (响应值 b_1)
 $\Rightarrow x=0$.

(响应值 a_2)
(响应值 b_2)

则 $0\leqslant_2 a_1\leqslant_2 a_2$ 且 $0\leqslant_2 b_1\leqslant_2 b_2$. 将 $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 中任意 2 个不可比较的响应值的上确界设为新的响应值(例如, 在实际应用中可以取 2 个不可比较的响应值的和为它们的上确界), 即

$a_1 \vee_2 b_1 = c, \quad a_2 \vee_2 b_1 = d, \quad a_1 \vee_2 b_2 = e, \quad a_2 \vee_2 b_2 = f.$

由于 $a_1\leqslant_2 a_2, b_1\leqslant_2 b_2$, 所以, $(a_1 \vee_2 b_1)\leqslant_2 (a_2 \vee_2 b_1)$, 即 $c\leqslant_2 d$. 同理得, $c\leqslant_2 e, d\leqslant_2 f, e\leqslant_2 f$. 由于 $a_2\geqslant_2 a_1, b_1\leqslant_2 b_2$, 所以 $a_2 \vee_2 b_1$ 与 $a_1 \vee_2 b_2$ 不可比较, 即 d 与 e 不可比较. 则 $V_2=\{0, a_1, a_2, b_1, b_2, c, d, e, f\}$ 是有限格, 如图 5 所示.

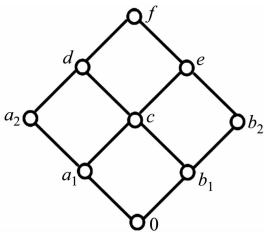


图 5 有限格 $V_2=\{0, a_1, a_2, b_1, b_2, c, d, e, f\}$ 的 Hasse 图
Fig. 5 Hasse diagram of finite lattice $V_2=\{0, a_1, a_2, b_1, b_2, c, d, e, f\}$

项目 q 的解答或操作中可能具有 $n(n>2)$ 个分支, 例如例 4 的项目 q 有 3 个分支.

例 4 设项目 q : 讨论一元二次方程 $x^2-\sqrt{k}x+1=0(k\geqslant 0)$ 的根. 项目 q 的解答中有 3 个分支, 各分支的步骤数均为 1, 即

$\Delta=(-\sqrt{k})^2-4=k-4$ (响应值 1)

$k>4$: 2 个不同实根 $\frac{\sqrt{k}\pm\sqrt{k-4}}{2}$ (响应值 2_a)

$k=4$: 2 个相同实根 $\frac{\sqrt{k}}{2}=1$ (响应值 2_b)

$0\leqslant k<4$: 2 个共轭复根 $\frac{\sqrt{k}\pm\sqrt{4-k}i}{2}$ (响应值 2_c)

(响应值 4)

将 $\{2_a, 2_b, 2_c\}$ 中任意 $k(2\leqslant k\leqslant 3)$ 个不可比较的响应值的上确界设为新的响应值, 即 $2_a \vee 2_b = 3_d, \quad 2_a \vee 2_c = 3_e, \quad 2_b \vee 2_c = 3_f, \quad \vee \{2_a, 2_b, 2_c\} = 4$. 由于 $\{2_a, 2_b\}\subseteq \{2_a, 2_b, 2_c\}$, 所以, $\vee \{2_a, 2_b\}\leqslant \vee \{2_a, 2_b, 2_c\}$, 即 $3_d\leqslant 4$. 同理得, $3_e\leqslant 4, 3_f\leqslant 4$. 由于 2_b 与 2_c 不可比较, 所以, $2_a \vee 2_b$ 与 $2_a \vee 2_c$ 不可比较, 即 3_d 与 3_e 不可比较. 同理得, 3_d 与 3_f 不可比较, 3_e 与 3_f 不可比较. 项目 q 的响应值集 $V=\{0, 1, 2_a, 2_b, 2_c, 3_d, 3_e, 3_f, 4\}$ 是有限格, 如图 6 所示.

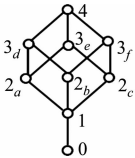


图 6 有限格 $V=\{0, 1, 2_a, 2_b, 2_c, 3_d, 3_e, 3_f, 4\}$ 的 Hasse 图
Fig. 6 Hasse diagram of finite lattice $V=\{0, 1, 2_a, 2_b, 2_c, 3_d, 3_e, 3_f, 4\}$

设项目集 $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. 对于任意的项目 $q_i\in Q$, 设 q_i 的操作集 Δ_i 是非空有限集. 对于任意的 $q_i^k\in\Omega_i$ 及任意的 $\lambda\in\Delta_i$, 将操作 λ 作用于项目状态 q_i^k , 如果 λ 使得 q_i^k 转移到新的正确状态, 即 q_i^k 转移到 q_i^l , 其中, $k< l$, 则对应的响应值由 k 变为 l ; 若 λ 使得 q_i^k 转移到错误状态(这表明 λ 作用于 q_i^k 是错误操作), 则响应值 k 保持不变; 对于由 $q_i^k\in\Omega_i$ 产生的错误状态, 之后施以任何操作都将产生错误状态, 且响应值 k 保持不变.

在这里, 只考虑由错误操作导致的错误状态. 例如, 将“计算两个数的和”错误操作为“计算两个数的差”. 不考虑由于操作不熟练或粗心计算导致的错误状态. 例如, 将“ $7+5$ ”错误计算为“11”.

由 $q_i^k\in\Omega_i$ 产生的错误状态不一定唯一. 例如, 设项目 q 的初始状态 $q^0=\{7, 5\}$, 操作集是 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 分别表示加、减、乘运算. 将“计算 7 与 5 的和”错误操作为“计算 7 与 5 的差”得到错误状态“2”, 或错误操作为“计算 7 与 5 的积”得到错误状态“35”. 于是, 记 Ω_i^{k-} 表示由 $q_i^k\in\Omega_i$ 产生的错误状态的集合. 记 $\Omega_i^- = \bigcup_{k\in V_i} \Omega_i^{k-}$ 表示项目 q_i 的错误状态集.

项目 q_i 的单个操作对项目状态转移的作用可以用定义 3 中的状态转移函数 φ_i 表示.

定义 3 设项目集 $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, 项目 q_i 的非空有限操作集为 Δ_i , q_i 的非空有限响应值集为 V_i , 其中, (V_i, \leqslant_i) 是格, $i=1, 2, \dots, n$. 记 $\overline{\Omega_i} = \Omega_i \cup \Omega_i^-$, 其中, Ω_i 是 q_i 的非空有限状态集, Ω_i^- 是 q_i 的错误状态集. 对于任意的 $q_i\in Q$, 项目状态转移函数 φ_i 是从 $\overline{\Omega_i}\times\Delta_i$ 到 $\overline{\Omega_i}$ 的映射, 函数 φ_i 定义如下.

1) 对于任意的 $q_i^k \in \Omega_i$ 及任意的 $\lambda \in \Lambda_i$, 如果将 λ 作用于 q_i^k 产生项目状态 $q_i^l \in \Omega_i$, 则 $\varphi_i(q_i^k, \lambda) = q_i^l$, 响应值由 k 变为 l ; 如果 λ 作用于 q_i^k 产生错误状态, 则 $\varphi_i(q_i^k, \lambda) = q_i^{k-} \in \Omega_i^{k-}$, 响应值 k 保持不变。

2) 对于由 $q_i^k \in \Omega_i$ 产生的错误状态 $q_i^{k-} \in \Omega_i^{k-}$, $\forall \lambda \in \Lambda_i$, 有 $\varphi_i(q_i^{k-}, \lambda) \in \Omega_i^{k-}$, 且响应值 k 保持不变。

例 5 续例 2, $Q = \{q_1, q_2\}$, 考察 q_1 和 q_2 的项目状态转移函数. $\Lambda_1 = \{\lambda_1\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, 其中, λ_1 表示计算 2 个数的差, λ_2 表示计算 2 个数的和。

由于 q_1, q_2 的解答都是层层递推的, 故 V_1 和 V_2 均设定为有限线性序集. 由命题 1 的 1) 可知, $V_1 = \{0, 1\}$, $V_2 = \{0, 1, 2\}$. 项目 q_1 的初始状态为 $q_1^0 = \{10, 6\}$. 例 2 的项目 q_1 的状态转移图, 如图 7 所示。

图 7 中:

$\varphi_1(q_1^0, \lambda_1) = q_1^1 = \{4\}$, 响应值由 0 变为 1;

$\varphi_1(q_1^0, \lambda_2) = q_1^{0-} = \{16\}$, 响应值 0 保持不变。

项目 q_2 的初始状态为 $q_2^0 = \{20, 7, 5\}$. q_2 的项目状态转移函数, 如图 8 所示. 图 8 中:

$\varphi_2(q_2^0, \lambda_2) = q_2^1 = \{20, 12\}$, 响应值由 0 变为 1;

$\varphi_2(q_2^1, \lambda_1) = q_2^2 = \{8\}$, 响应值由 1 变为 2;

$\varphi_2(q_2^0, \lambda_1) = q_2^{0-(1)} = \{20, 2\}$, 响应值 0 保持不变;

$\varphi_2(q_2^{0-(1)}, \lambda_1) = q_2^{0-(2)} = \{18\}$, 响应值 0 保持不变;

$\varphi_2(q_2^{0-(1)}, \lambda_2) = q_2^{0-(3)} = \{22\}$, 响应值 0 保持不变;

$\varphi_2(q_2^1, \lambda_2) = q_2^{1-} = \{32\}$, 响应值 1 保持不变。

定义 4^[18] 设非空有限操作集 Λ , 由 Λ 中的 s 个操作元组成的操作序列 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s \in \Lambda^s$ 称为 Λ 的 1 个长度为 s 的操作序列. 具有任意长度的所有操作序列 (包括空操作程序 ϵ , 即 $s=0$) 的集合记为 Λ^* , 即

$$\Lambda^* = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \Lambda^s = \{\epsilon\} \cup \Lambda \cup \Lambda^2 \cup \cdots.$$

上式中: 空操作序列 ϵ 是 Λ^* 的单位元, 即 $\forall \lambda \in \Lambda^*, \epsilon \lambda = \lambda \epsilon = \lambda$.

定义 5 设非空有限操作集 Λ , 操作序列集 Λ^* , 对于任意 $s \in \mathbb{Z}^+$, 任意给定长度为 s 的操作序列 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s \in \Lambda^s$, $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s$ 的子序列是操作序列 $\lambda_i \lambda_{i+1} \cdots \lambda_{i+t}$, 其中, $1 \leq i \leq s$ 且 $0 \leq t \leq s-i$.

定义 6 设非空有限操作集 Λ , 操作序列集 Λ^* , 对于任意 2 个非空操作序列 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Lambda^* \setminus \{\epsilon\}$, 规定 $\sigma_1 \leq \sigma_2$ 当且仅当 σ_1 是 σ_2 的子序列。

注 4^[18] 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, 对于任意的 $q_i \in Q$, 项目 q_i 的状态转移满足以下 2 个性质。

1) 自反性. $\forall q_i^k \in \overline{\Omega_i}$, 空操作 ϵ 作用于 q_i^k 产生原状态 q_i^k , 即 $\varphi_i(q_i^k, \epsilon) = q_i^k$.

2) 传递性. $\forall q_i^{k_0} \in \overline{\Omega_i}$, 如果存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_i$ 及 $q_i^{k_1}, q_i^{k_2} \in \overline{\Omega_i}$, 使得

$$\varphi_i(q_i^{k_0}, \lambda_1) = q_i^{k_1}, \varphi_i(q_i^{k_1}, \lambda_2) = q_i^{k_2},$$

记 $\Phi_i(q_i^{k_0}, \lambda_1 \lambda_2) = \varphi_i(\varphi_i(q_i^{k_0}, \lambda_1), \lambda_2)$, 则

$$\Phi_i(q_i^{k_0}, \lambda_1 \lambda_2) = q_i^{k_2} \text{ (图 9)}.$$

定义 7 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1, 2, \cdots, n$. 对于任意 $q_i \in Q$, 项目 q_i 的状态空间是三元组 $(\overline{\Omega_i}, \Lambda_i, \varphi_i)$, 其中, φ_i 是 q_i 的项目状态转移函数。

设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, q_i 的非空有限操作集为 Λ_i , 操作序列集为 Λ_i^* . 由定义 3 可知, 状态转移函数 φ_i 表示单个操作对 q_i 的项目状态的作用. 而由注 4 可知, 一个操作序列对项目 q_i 的给定状态的作用可由定义 8 的过程函数 Φ_i 表示。

定义 8 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1, 2, \cdots, n$. 对于任意给定的 $q_i \in Q$, 过程函数 Φ_i 是从 $\overline{\Omega_i} \times \Lambda_i^*$ 到 $\overline{\Omega_i}$ 的映射, 其中, 函数 Φ_i 定义为

1) 对于由 $q_i^k \in \Omega_i$ 产生的错误状态 $q_i^{k-} \in \Omega_i^{k-}$, 任意 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s \in \Lambda_i^*$, 均有 $\Phi_i(q_i^{k-}, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s) \in \Omega_i^{k-}$;

2) 对于任意给定的操作序列 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s \in \Lambda_i^*$, 如果存在项目状态序列 $q_i^{k_0}, q_i^{k_1}, \cdots, q_i^{k_s} \in \Omega_i$, 使得

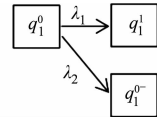


图 7 例 2 的项目 q_1 的状态转移图

Fig. 7 State transition diagram of item q_1 of example 2

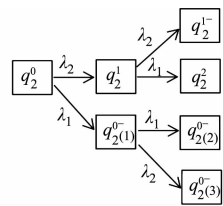


图 8 例 2 的项目 q_2 的状态转移图

Fig. 8 State transition diagram of item q_2 of example 2

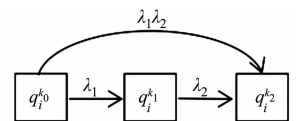


图 9 项目状态转移的传递性
Fig. 9 Transitivity of item state transition

$$\varphi_i(q_i^{kj-1}, \lambda_j) = q_i^k, \quad j=1, 2, \cdots, s,$$

则 $\Phi_i(q_i^{k_0}, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s) = q_i^k$, 称 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s$ 为 q_i 的正确操作序列, 否则, $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s$ 是 q_i 的错误操作序列.

命题 2 对于任意的 $q_i \in Q$, 项目状态转移函数 φ_i 是 $\overline{\Omega_i} \times \Lambda_i$ 上的过程函数 Φ_i . 即对于任意长度为 1 的操作序列 $\lambda \in \Lambda_i$, 如果存在项目状态序列 $q_i^{k_0}, q_i^{k_1} \in \Omega_i$, 使得 $\varphi_i(q_i^{k_0}, \lambda) = q_i^{k_1}$, 则

$$\Phi_i(q_i^{k_0}, \lambda) = q_i^{k_1} = \varphi_i(q_i^{k_0}, \lambda).$$

对于任意的 $q_i \in Q$, 由于 $\forall q_i^k \in \Omega_i, \varphi_i(q_i^k, \epsilon) = q_i^k$, 所以, 空操作序列 ϵ 是任意项目的正确操作序列. 因此, 以下分析中仅考察项目的正确非空操作序列.

例 6 续例 5, 考察项目 q_2 的正确非空操作序列. $V_2 = \{0, 1, 2\}, \Omega_2 = \{q_2^0, q_2^1, q_2^2\}$. 由于 q_2 的解答有 2 个步骤, 所以, 需考察 Λ_2 的所有长度为 1 和 2 的操作序列为

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_2 \lambda_1, \lambda_2 \lambda_2.$$

由图 8 可以看出, 对于操作序列 λ_2, λ_1 和 $\lambda_2 \lambda_1$, 有 $\Phi_2(q_2^0, \lambda_2) = q_2^1, \Phi_2(q_2^1, \lambda_1) = q_2^2, \Phi_2(q_2^0, \lambda_2 \lambda_1) = q_2^2$; 其余均为错误操作序列. 所以, 项目 q_2 的正确非空操作序列为 λ_2, λ_1 和 $\lambda_2 \lambda_1$.

如果项目 $q \in Q$ 的解答或操作中有分支, 则需要考虑非空操作组合对给定项目状态的作用.

定义 9 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$. 对任意的 $q_i \in Q$ 及任意的 $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_i^* \setminus \{\epsilon\}$, 如果存在操作过程的初始状态 $q_i^k \in \Omega_i$, 使得 $\Phi_i(q_i^k, \omega_1) = q_i^a$ 且 $\Phi_i(q_i^k, \omega_2) = q_i^b$, 其中, 响应值 a 与 b 不可比较, 且 $a \vee b = c$, 则将操作组合 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 作用于 q_i^k , 有 $\Phi_i(q_i^k, \{\omega_1, \omega_2\}) = q_i^c$. 称 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 为项目 q_i 的正确非空操作组合.

例 7 续例 1, 项目 q_1 的解答是层层递推的, $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, 其中, λ_1 表示方程的等价变形, λ_2 表示解一元一次方程. $V_1 = \{0, 1, 2\}$ 是有限线性序集, 只需考察 q_1 的正确操作序列. 与例 6 的项目 q_2 类似, q_1 的正确操作序列为 λ_1, λ_2 和 $\lambda_1 \lambda_2$.

项目 q_2 的解答有分支, $V_2 = \{0, a, b, c\}$ 不是线性序集, 需考虑非空操作组合对给定项目状态的作用. 项目 q_2 的操作集 $\Lambda_2 = \{\lambda_3, \lambda_4\}$, 其中, λ_3 表示当 $x-3 \geq 0$ 时, 解含 $|x-3|$ 的一元一次方程; λ_4 表示当 $x-3 < 0$ 时, 解含 $|x-3|$ 的一元一次方程.

例 1 的项目 q_2 的状态转移图, 如图 10 所示. 图 10 中:

$$\varphi_2(q_2^0, \lambda_3) = q_2^a, \text{ 响应值由 } 0 \text{ 变为 } a;$$

$$\varphi_2(q_2^0, \lambda_4) = q_2^b, \text{ 响应值由 } 0 \text{ 变为 } b.$$

因此, q_2 仅有 2 个正确操作序列 λ_3 和 λ_4 , 只需考察操作组合 $\{\lambda_3, \lambda_4\}$. 由于 $\Phi_2(q_2^0, \lambda_3) = q_2^a, \Phi_2(q_2^0, \lambda_4) = q_2^b$, 且 $a \vee b = c$, 故 $\Phi_2(q_2^0, \{\lambda_3, \lambda_4\}) = q_2^c$, $\{\lambda_3, \lambda_4\}$ 是 q_2 的正确非空操作组合.

定义 10 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$. 对于任意的 $q_i \in Q$, 项目 q_i 的操作程序是由 q_i 的正确非空操作序列或正确非空操作组合构成的序列 $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l$, 其中, $\omega_h \in (\Lambda_i^* \setminus \{\epsilon\}) \cup 2^{\Lambda_i^* \setminus \{\epsilon\}}, h=1, \cdots, l$.

定义 11 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$. 对于任意的 $q_i \in Q$, 如果存在操作程序 $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l$, 及项目状态序列 $q_i^{k_0}, q_i^{k_1}, \cdots, q_i^{k_l} \in \Omega_i$, 使得

$$\Phi_i(q_i^{k_{h-1}}, \omega_h) = q_i^{k_h}, \quad h=1, 2, \cdots, l,$$

则 $\Phi_i(q_i^{k_0}, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l) = q_i^{k_l}$, 称 $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_l$ 为 q_i 的正确操作程序.

定义 12 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$. 项目 q_i 的一个正确操作程序称为 q_i 的一个相关技能. 项目 q_i 的所有相关技能的集合 S_i 称为 q_i 的技能集, $i=1, 2, \cdots, n$. 项目集 Q 的技能集为 $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$.

例 8 续例 6, 考察项目集 $Q = \{q_1, q_2\}$ 的技能集. $V_1 = \{0, 1\}, V_2 = \{0, 1, 2\}$. 由图 7 可知, q_1 的所有正确操作程序为 λ_1 , 因此, q_1 的所有相关技能的集合为 $S_1 = \{\lambda_1\}$. 由例 6 可知, q_2 的所有正确操作程序是 λ_2, λ_1 和 $\lambda_2 \lambda_1$, 所以, q_2 的技能集为 $S_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 \lambda_1\}$. 因此, 项目集 $Q = \{q_1, q_2\}$ 的技能集为

$$S = S_1 \cup S_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 \lambda_1\}.$$

例 9 续例 7, 考察项目集 $Q = \{q_1, q_2\}$ 的技能集. $V_1 = \{0, 1, 2\}$, 由例 7 可知, 项目 q_1 的所有正确操作程序为 λ_1, λ_2 和 $\lambda_1 \lambda_2$, 所以, $S_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2\}$. $V_2 = \{0, a, b, c\}$ 不是线性序集, 由图 10 可知, q_2 的所有正确操作程序为 λ_3, λ_4 和 $\{\lambda_3, \lambda_4\}$, 所以, $S_2 = \{\lambda_3, \lambda_4, \{\lambda_3, \lambda_4\}\}$. 项目集 $Q = \{q_1, q_2\}$ 的技能集为

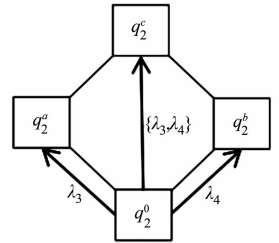


图 10 例 1 的项目 q_2 的状态转移图

Fig. 10 State transition diagram of item q_2 in example 1

$$S = S_1 \cup S_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \{\lambda_3, \lambda_4\}\}.$$

例 10 续例 4, 考察项目 q 的技能集.

项目 q 的操作集 $\Delta = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $V = \{0, 1, 2_a, 2_b, 2_c, 3_d, 3_e, 3_f, 4\}$. 例 4 的项目 q 的状态转移图, 如图 11 所示. 由图 11 得到项目 q 的所有正确操作程序的集合, 即 q 的技能集为

$$\begin{aligned} S = & \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_4, \{\lambda_2, \lambda_3\}, \\ & \{\lambda_2, \lambda_4\}, \{\lambda_3, \lambda_4\}, \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \lambda_1 \{\lambda_2, \lambda_3\}, \\ & \lambda_1 \{\lambda_2, \lambda_4\}, \lambda_1 \{\lambda_3, \lambda_4\}, \lambda_1 \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}\}. \end{aligned}$$

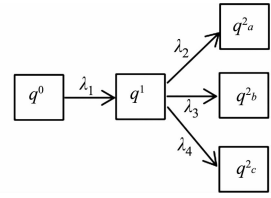


图 11 例 4 的项目 q 的状态转移图

Fig. 11 State transition diagram of item q in example 4

2.4 析取的技能映射

设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. 根据各项目的解答或操作步骤设定 Q 上的非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1, 2, \dots, n$. 设 Q 的技能集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. 技能状态 T 是技能集 S 的子集, $T \subseteq S$, 其中, T 表示个体掌握(或没掌握)的技能集合.

在析取模型中, 个体只需掌握至少一个相关的技能, 即可达到相应的项目状态. 因此, 对于任意给定的项目状态 $q_i^k \in \Omega_i$, q_i^k 的相关技能是能够实现从 q_i^{\perp} 到 q_i^k 的转移过程的操作程序, 即 q_i^k 的相关技能是由过程函数导出的. 因为空操作程序 ϵ 和空操作组合 \emptyset 不是技能, 所以不考虑 q_i^{\perp} 的相关技能.

定义 13 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1, 2, \dots, n$. Q 的技能集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. 记 $\Omega_i^+ = \Omega_i \setminus \{q_i^{\perp}\}$, 对于任意的 $q_i^k \in \Omega_i^+$, 称 $s \in S_i$ 是项目状态 q_i^k 的相关技能, 如果存在子程序 $\sigma \leq s$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp}, \sigma) = q_i^k$.

例 11 续例 8, 考察例 2 中的项目状态 q_1^1, q_2^2 和 q_2^2 的相关技能. $S_1 = \{\lambda_1\}$, 由图 7 得到 $\Phi_1(q_1^0, \lambda_1) = q_1^1$, 所以 q_1^1 的所有相关技能为 λ_1 . $S_2 = \{\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \lambda_1\}$, 由图 8 得到 $\Phi_2(q_2^0, \lambda_2) = q_2^1$, 由于 $\lambda_2 \leq \lambda_2, \lambda_2 \leq \lambda_2 \lambda_1$, 所以 λ_2 和 $\lambda_2 \lambda_1$ 是 q_2^1 的相关技能; $\Phi_2(q_2^0, \lambda_2 \lambda_1) = q_2^2$, 且 $\lambda_2 \lambda_1 \leq \lambda_2 \lambda_1$, 所以 $\lambda_2 \lambda_1$ 是 q_2^2 的相关技能.

定义 14 设项目集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i, \leq_i) 是格, $i=1, 2, \dots, n$. Q 的技能集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. 记 $(V_i^Q)^+ = V_i^Q \setminus \{q_i^{\perp}, q_i^{\perp 2}, \dots, q_i^{\perp n}\}$, 对任意的多分知识状态 $K \in (V_i^Q)^+$, 称技能状态 $T \subseteq S$ 是 K 的相关技能状态, 如果 T 是能够实现从 $\{q_i^{\perp 1}, q_i^{\perp 2}, \dots, q_i^{\perp n}\}$ 到 K 的转移过程的技能状态.

$(V_i^Q)^+$ 上的技能映射 τ 是从 $(V_i^Q)^+$ 到 S 的非空幂集族的映射, 其中, $\forall K \in (V_i^Q)^+, \tau(K)$ 是 K 的相关技能状态的集合. 即 $\forall T \in \tau(K), T \subseteq S$ 是多分知识状态 K 的相关技能状态.

记 $\Omega^+ = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i^+$, 设从 Ω^+ 到 S 的非空幂集的映射 τ , 其中, $\forall q_i^k \in \Omega_i^+, \tau(q_i^k) \subseteq S_i, \tau(q_i^k)$ 表示项目状态 q_i^k 的相关技能的集合. 由定义 13 可知, $s \in \tau(q_i^k)$ 当且仅当存在 $\sigma \leq s$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp}, \sigma) = q_i^k$.

定理 1 表明 $(V_i^Q)^+$ 上的技能映射可由 Ω^+ 上的技能映射张成.

定理 1 设 Ω^+ 上的映射 $\tau: \Omega^+ \rightarrow 2^S \setminus \{\emptyset\}$, 其中, 对于任意的 $q_i^{v_i} \in \Omega_i^+, i=1, 2, \dots, n$, 任意 $s \in \tau(q_i^{v_i}), s$ 是项目状态 $q_i^{v_i}$ 的相关技能. 对于任意的多分知识状态 $K = \{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \dots, q_n^{v_n}\} \in (V_i^Q)^+$, 记下标集 $I = \{i \mid q_i^{v_i} \in K \cap \Omega_i^+, i=1, 2, \dots, n\}$, 则 $\tau(K) = \{\bigcup_{i \in I} \{t_i\} \mid \forall t_i \in \tau(q_i^{v_i}), i \in I\}$.

证明: 记 $\mathcal{G} = \{\bigcup_{i \in I} \{t_i\} \mid \forall t_i \in \tau(q_i^{v_i}), i \in I\}$, 任意 $T \in \mathcal{G}$, 均有 $T = \bigcup_{i \in I} \{t_i\}$, 其中, $t_i \in \tau(q_i^{v_i})$, 即 t_i 是项目状态 $q_i^{v_i}$ 的相关技能, $i \in I$. 因此, 对于任意 $i \in I$, 存在 $\sigma_i \leq t_i$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp}, \sigma_i) = q_i^{v_i}$, 即 t_i 是能够实现从 q_i^{\perp} 到 $q_i^{v_i}$ 的转移过程的操作程序. 从而 $\bigcup_{i \in I} \{t_i\}$ 能够实现从 $\bigcup_{i \in I} \{q_i^{\perp}\}$ 到 $\bigcup_{i \in I} \{q_i^{v_i}\}$ 的转移. 又因为对于 $i \notin I, q_i^{v_i} = q_i^{\perp}$, 所以, $\bigcup_{i \in I} \{t_i\}$ 是能够实现从 $\{q_1^{\perp}, q_2^{\perp}, \dots, q_n^{\perp}\}$ 到 $\{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \dots, q_n^{v_n}\}$ 的转移过程的技能状态. 于是, 任意 $T \in \mathcal{G}, T = \bigcup_{i \in I} \{t_i\}$ 是多分知识状态 K 的相关技能状态, 即 $T \in \tau(K)$, 从而 $\mathcal{G} \subseteq \tau(K)$.

另一方面, 对于任意的 $i \in I$, 记 $K_i = \{q_1^{\perp}, \dots, q_{i-1}^{\perp}, q_i^{v_i}, q_{i+1}^{\perp}, \dots, q_n^{\perp}\}$, 则

$$\tau(K_i) = \{\{t_i\} \mid \forall t_i \in \tau(q_i^{v_i})\}, \quad i \in I.$$

因为 $K = \{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \dots, q_n^{v_n}\} = \bigcup_{i \in I} K_i$, 所以, 对于任意 $T \in \tau(K)$, 均有 $T = \bigcup_{i \in I} T_i$, 其中, $T_i \in \tau(K_i)$. 于是, 对于任意 $T \in \tau(K)$, 均有 $T = \bigcup_{i \in I} \{t_i\}$, 其中, $t_i \in \tau(q_i^{v_i})$, 即 $T \in \mathcal{G}$, 从而 $\tau(K) \subseteq \mathcal{G}$.

综上所述, $\forall K = \{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \dots, q_n^{v_n}\} \in (V_i^Q)^+, \tau(K) = \mathcal{G} = \{\bigcup_{i \in I} \{t_i\} \mid \forall t_i \in \tau(q_i^{v_i}), i \in I\}$.

例 12 续例 11, $Q = \{q_1, q_2\}, V_1 = \{0, 1\}, V_2 = \{0, 1, 2\}$, 则 $\Omega^+ = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^+ = \{q_1^1, q_2^1, q_2^2\}$. Q 的技能集

$S=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2\lambda_1\}$. 由例 11 可知, Ω^+ 上的技能映射 τ 定义为

$$\tau(q_1^1)=\{\lambda_1\}, \quad \tau(q_2^1)=\{\lambda_2,\lambda_2\lambda_1\}, \quad \tau(q_2^2)=\{\lambda_2\lambda_1\}.$$

由 Ω^+ 上的技能映射 τ 可张成 $(V_i^Q)^+$ 上的技能映射

$$\begin{aligned} \tau(\{q_1^1,q_2^0\}) &= \{\{t_1\} \mid \forall t_1 \in \tau(q_1^1)\} = \{\{\lambda_1\}\}; \\ \tau(\{q_1^0,q_2^1\}) &= \{\{\lambda_2\},\{\lambda_2\lambda_1\}\}, \tau(\{q_1^0,q_2^2\}) = \{\{\lambda_2\lambda_1\}\}; \\ \tau(\{q_1^1,q_2^1\}) &= \{\{t_1\} \cup \{t_2\} \mid \forall t_1 \in \tau(q_1^1), \forall t_2 \in \tau(q_2^1)\} = \{\{\lambda_1,\lambda_2\},\{\lambda_1,\lambda_2\lambda_1\}\}; \\ \tau(\{q_1^1,q_2^2\}) &= \{\{t_1\} \cup \{t_2\} \mid \forall t_1 \in \tau(q_1^1), \forall t_2 \in \tau(q_2^2)\} = \{\{\lambda_1,\lambda_2\lambda_1\}\}. \end{aligned}$$

定义 15 设项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i,\leq_i) 是格, $i=1,2,\cdots,n$. Q 的技能集 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$. 析取的技能映射是三元组 (Ω^+,S,τ) , 其中, $\tau:\Omega^+\rightarrow 2^S\setminus\{\emptyset\}$, 对于任意 $q_i^k\in\Omega^+$, $\tau(q_i^k)$ 是项目状态 q_i^k 的所有相关技能的集合. 即对任意 $q_i^k\in\Omega^+$, $\tau(q_i^{v_i})\subseteq S_i$, 且 $s\in\tau(q_i^{v_i})$ 当且仅当存在 $\sigma\leq s$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},\sigma)=q_i^k$.

由于在析取模型中仅考虑每个项目的某个特定的解法, 所以, 对于任意的 $q_i\in Q, \forall q_i^w\in\Omega_i^+$, 从 $q_i^{\perp_i}$ 到 q_i^w 的转移路径唯一, 即存在唯一的 $t\in S$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},t)=q_i^w$. 于是, $\forall v,w\in V_i\setminus\{\perp_i\}$, 其中, $v\leq_i w$, 从 $q_i^{\perp_i}$ 到 q_i^w 的转移路径必经过 q_i^v , 即 $q_i^v\leq_i q_i^w$, 其中, $v\leq_i w$. 因此, $\forall s\in\tau(q_i^w)\subseteq S_i$, 存在子程序 $\sigma\leq s$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},\sigma)=q_i^v$, 则一定存在 σ 的子程序 δ , 使 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},\delta)=q_i^v$, 其中, $\delta\leq\sigma\leq s$. 于是, 由定义 15 可知, $s\in\tau(q_i^v)$. 从而, 任意的 $s\in\tau(q_i^w)$, 必有 $s\in\tau(q_i^v)$, 即 $\tau(q_i^w)\subseteq\tau(q_i^v)$.

另一方面, 根据项目的解答或操作步骤设定响应值时, 每步操作产生新的项目状态, 对应新的响应值, 所以, 对于任意的 $q_i\in Q, \forall v,w\in V_i\setminus\{\perp_i\}$, 其中, $v\neq_i w$, 从 $q_i^{\perp_i}$ 到 q_i^v 的转移路径与从 $q_i^{\perp_i}$ 到 q_i^w 的转移路径是不同的. 即存在不同的 $s,t\in S$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},s)=q_i^v, \Phi_i(q_i^{\perp_i},t)=q_i^w$. 于是, 当 $v\neq_i w$ 时, 必有 $\tau(q_i^v)\neq\tau(q_i^w)$. 特别地, 当 $v<_i w$ 时, 必有 $\tau(q_i^w)\subset\tau(q_i^v)$; 当 v 与 w 不可比较时, 必存在 $s_v\in\tau(q_i^v)$ 与 $s_w\in\tau(q_i^w)$, 使得 $s_v\notin\tau(q_i^w)$ 且 $s_w\notin\tau(q_i^v)$. 于是, 析取的技能映射 τ 满足命题 3 的 2 个条件.

命题 3 设项目集 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 及其非空有限响应值集族 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 其中, (V_i,\leq_i) 是格, $i=1,2,\cdots,n$. Q 的技能集 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$. 设析取的技能映射 (Ω^+,S,τ) , 其中, $\tau:\Omega^+\rightarrow 2^S\setminus\{\emptyset\}$, 则对于任意给定的项目 $q_i\in Q$, τ 满足以下 2 个条件.

- 1) 兼容性. $\forall v,w\in V_i\setminus\{\perp_i\}$, 其中, $v<_i w$, 则 $\tau(q_i^w)\subset\tau(q_i^v)$.
- 2) 差异性. $\forall v,w\in V_i\setminus\{\perp_i\}$, 其中, v 与 w 不可比较, 则 $\tau(q_i^v)\setminus\tau(q_i^w)\neq\emptyset$ 且 $\tau(q_i^w)\setminus\tau(q_i^v)\neq\emptyset$.

2.5 由析取的技能映射诱导的多分知识结构

在析取模型中, 个体只需掌握项目状态的至少一个相关技能, 即可达到相应状态. 因此, 设个体所掌握的技能状态为 $T, T\subseteq S$, 只要存在至少一个技能 $t\in\tau(q_i^v)$, 使得 $t\in T$, 则说明该个体掌握了 q_i^v 的至少一个相关技能, 从而能够达到项目状态 q_i^v . 取该个体所能达到的所有项目状态的上确界, 则得到由技能状态 T 通过析取模型诱导的多分知识状态.

定义 16 设析取的技能映射 (Ω^+,S,τ) , 其中 $\tau:\Omega^+\rightarrow 2^S\setminus\{\emptyset\}$. 给定技能状态 $T\subseteq S, T$ 表示个体掌握的技能集合, 由 T 通过析取模型诱导的多分知识状态为

$$K_d(T)=\sqcup\{q_i^v\in\Omega^+ \mid \exists t\in\tau(q_i^v):t\in T\}.$$

命题 4 由析取的技能映射 τ 通过析取模型诱导的所有多分知识状态的集合 \mathcal{K} 包含 $\{q_1^{\perp_1},q_2^{\perp_2},\cdots,q_n^{\perp_n}\}$ 和 $\{q_1^{\top_1},q_2^{\top_2},\cdots,q_n^{\top_n}\}$, 即 \mathcal{K} 满足多分知识结构的定义 2 的条件 1).

证明: 设个体所掌握的技能状态 $T=\emptyset$, 因为对于任意的 $q_i^v\in\Omega^+$, 均不存在 $t\in\tau(q_i^v)$, 使得 $t\in\emptyset$, 所以, $K_d(\emptyset)=\sqcup\emptyset=\{q_1^{\perp_1},q_2^{\perp_2},\cdots,q_n^{\perp_n}\}$. 另一方面, 取个体所掌握的技能状态 $T=S$, 对于任意的 $q_i^v\in\Omega^+$, 由于 $\tau(q_i^v)\neq\emptyset$, 于是, 存在 $t\in\tau(q_i^v)$, 使得 $t\in S$, 所以, $K_d(S)=\sqcup\Omega^+=\{q_1^{\top_1},q_2^{\top_2},\cdots,q_n^{\top_n}\}$.

定理 2 设析取的技能映射 (Ω^+,S,τ) , 其中, $\tau:\Omega^+\rightarrow 2^S\setminus\{\emptyset\}$. 取遍所有的技能状态 $T\subseteq S$, 所有通过析取模型诱导的多分知识状态的集合 \mathcal{K} 是多分知识结构.

证明: 首先, 由命题 4 知, \mathcal{K} 包含 $\{q_1^{\perp_1},q_2^{\perp_2},\cdots,q_n^{\perp_n}\}$ 和 $\{q_1^{\top_1},q_2^{\top_2},\cdots,q_n^{\top_n}\}$, 即 \mathcal{K} 满足多分知识结构的定义 2 的条件 1).

其次, 在析取模型中, 对于任意 $q_i\in Q, \forall q_i^w\in\Omega_i^+$, 存在唯一的 $t\in S$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i},t)=q_i^w; \forall v,w\in$

$V_i \setminus \{\perp_i\}$, 其中, $v \neq_i w$, 存在不同的 $s, t \in S$, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i}, s) = q_i^v, \Phi_i(q_i^{\perp_i}, t) = q_i^w$. 因此, $\forall q_i^w \in \Omega_i^+$, 存在 q_i^w 与技能 s_w 之间的一一对应, 使得 $\Phi_i(q_i^{\perp_i}, s_w) = q_i^w$, 且 $s_w \in \tau(q_i^w)$. 于是, 对于任意 $v \in V_i \setminus \{\perp_i, w\}$, 如果 $v <_i w$, 由命题 3 的兼容性可知, $\tau(q_i^v) \subset \tau(q_i^w)$, 所以, 由 $s_w \in \tau(q_i^w)$ 可得, $s_w \in \tau(q_i^v)$; 如果 $w <_i v$, 或 v 与 w 不可比较, 则 $s_v \leq_s s_w$ 不成立, 由定义 15 可知, $s_w \notin \tau(q_i^v)$. 因此, 取 $T_w = \{s_w\}$, 由 T_w 通过析取模型诱导的 q_i 的状态集为

$$\{q_i^v \in \Omega_i^+ \mid s_w \in \tau(q_i^v)\} = \{q_i^v : v \leq_i w\}.$$

由于 $\sqcup \{q_i^v : v \leq_i w\} = q_i^w$, 所以, $q_i^w \in K_d(T_w)$, 因此,

$$K_d(T_w) \in \mathcal{K}(q_i^w) = \{K \in \mathcal{K} : q_i^w \in K\}.$$

于是, 对于任意 $q_i \in Q, \forall q_i^w \in \Omega_i^+, \mathcal{K}(q_i^w) \neq \emptyset$. 由命题 4 的证明可知, $K_d(\emptyset) \in \mathcal{K}(q_i^{\perp_i}), i = 1, 2, \dots, n$. 因此,

$$\forall q_i^w \in \Omega_i, \quad \mathcal{K}(q_i^w) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

即 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = \Omega$. 所以, \mathcal{K} 满足定义 2 的条件 2).

综上所述, 取遍所有的 $T \subseteq S$, 所有通过析取模型诱导的多分知识状态的集合 K 是多分知识结构.

定义 17 设析取的技能映射 (Ω^+, S, τ) , 其中, $\tau: \Omega^+ \rightarrow 2^S \setminus \{\emptyset\}$. 取遍所有的技能状态 $T \subseteq S$, 所有通过析取模型诱导的多分知识状态的集合为 $\mathcal{K} = \{K_d(T) \mid \forall T \subseteq S\}$, \mathcal{K} 称为由技能映射 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构.

定义 18^[25] 称三元组 (U, A, I) 为一个形式背景, 其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为对象集, 每一个 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 称为一个对象; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为属性集, 每个 $a_j (1 \leq j \leq m)$ 称为一个属性; $I \subseteq U \times A$ 为 U 和 A 之间的二元关系, 若 $(x, a) \in I$, 则称对象 x 具有属性 a , 若 $(x, a) \notin I$, 则称对象 x 不具有属性 a .

形式背景表, 如表 1 所示. 若用 1 表示 $(x, a) \in I$, 用 0 表示 $(x, a) \notin I$, 则形式背景可表示为只有 0 和 1 的表格(或表示为 0-1 矩阵).

例 13 续例 12, $Q = \{q_1, q_2\}, V_1 = \{0, 1\}, V_2 = \{0, 1, 2\}, \Omega^+ = \{q_1^1, q_2^1, q_2^2\}$. 记 $s_1 = \lambda_1, s_2 = \lambda_2, s_3 = \lambda_2 \lambda_1$, 则 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. 由例 12 可知, 析取的技能映射 τ 为

$$\tau(q_1^1) = \{s_1\}, \quad \tau(q_2^1) = \{s_2, s_3\}, \quad \tau(q_2^2) = \{s_3\}.$$

将 Ω^+ 视为对象集, S 视为属性集, $I \subseteq \Omega^+ \times S$ 是 Ω^+ 和 S 之间的二元关系, 规定

$$(q_i^v, \sigma) \in I \Leftrightarrow \sigma \in \tau(q_i^v).$$

上式中: $(q_i^v, \sigma) \in I$ 记 1, $(q_i^v, \sigma) \notin I$ 记 0, 得到例 13 的技能映射 (Ω^+, S, τ) 的形式背景表, 如表 2 所示.

由表 2 可得诱导的多分知识状态为

$$T_1 = \{s_1\}, K_d(T_1) = \sqcup \{q_1^1\} = \{q_1^1, q_2^0\};$$

$$T_2 = \{s_2\}, K_d(T_2) = \sqcup \{q_2^1\} = \{q_1^0, q_2^1\};$$

$$T_3 = \{s_3\}, K_d(T_3) = \sqcup \{q_2^2\} = \{q_1^0, q_2^2\};$$

$$T_4 = \{s_1, s_2\}, K_d(T_4) = \sqcup \{q_1^1, q_2^1\} = \{q_1^1, q_2^1\};$$

$$T_5 = \{s_1, s_3\}, K_d(T_5) = \sqcup \Omega^+ = \{q_1^1, q_2^2\};$$

$$T_6 = \{s_2, s_3\}, K_d(T_6) = \sqcup \{q_2^1, q_2^2\} = \{q_1^0, q_2^2\}.$$

于是, 取遍 $T \subseteq S$, 由 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构为

$$\mathcal{K} = \{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^1, q_2^0\}, \{q_1^0, q_2^1\}, \{q_1^0, q_2^2\}, \{q_1^1, q_2^1\}, \{q_1^1, q_2^2\}\}.$$

例 13 的多分知识结构 $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ 的 Hasse 图, 如图 12 所示. \mathcal{K} 满足逐项并 \sqcup 封闭, \mathcal{K} 是多分知识空间. 因为 $\{q_1^1, q_2^0\} \sqcap \{q_1^0, q_2^1\} = \{q_1^0, q_2^0\} \in \mathcal{K}$, 且 $\{q_1^1, q_2^1\} \sqcap \{q_1^0, q_2^2\} = \{q_1^0, q_2^1\} \in \mathcal{K}$, 所以, \mathcal{K} 满足逐项交 \sqcap 封闭.

表 1 形式背景表

Tab. 1 Formal background table

U	A			
	a_1	a_2	\dots	a_m
x_1	(x_1, a_1)	(x_1, a_2)	\dots	(x_1, a_m)
x_2	(x_2, a_1)	(x_2, a_2)	\dots	(x_2, a_m)
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	(x_n, a_1)	(x_n, a_2)	\dots	(x_n, a_m)

表 2 例 13 的技能映射 (Ω^+, S, τ) 的形式背景表

Tab. 2 Formal background table of skill map (Ω^+, S, τ) of example 13

Ω^+	S		
	s_1	s_2	s_3
q_1^1	1	0	0
q_2^1	0	1	1
q_2^2	0	0	1

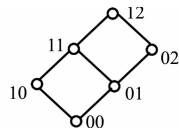


图 12 例 13 的多分知识结构 $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ 的 Hasse 图

Fig. 12 Hasse diagram of polytomous knowledge structure $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ of example 13

注 5 命题 3 的兼容性对于通过析取模型诱导多分知识结构是必要的. 如果析取的技能映射 τ 不满足该条件, 则由 τ 通过析取模型诱导的多分知识状态的集合可能不满足定义 2 的条件 2).

例如, 在例 13 中, 若定义技能映射 τ' 为

$$\tau'(q_1^1)=\{s_1\}, \quad \tau'(q_2^1)=\{s_2, s_3\}, \quad \tau'(q_2^2)=\{s_2, s_3\}.$$

上式中: $\tau'(q_2^1)=\tau'(q_2^2)$, 不满足命题 3 的兼容性. 由 τ' 通过析取模型诱导的所有多分知识状态的集合为

$$\mathcal{K}'=\{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^1, q_2^0\}, \{q_1^0, q_2^2\}, \{q_1^1, q_2^2\}\}.$$

由于 $q_2^1 \notin \bigcup_{K \in \mathcal{K}'} K$, 所以, \mathcal{K}' 不是多分知识结构.

定理 3 设析取的技能映射 (Ω^+, S, τ) , 其中, $\tau: \Omega^+ \rightarrow 2^S \setminus \{\emptyset\}$. 由技能映射 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构 \mathcal{K} 是多分知识空间.

证明: 对于任意的 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, 其中, K_i 是由技能状态 T_i 通过析取模型诱导的多分知识状态, 即

$$K_i = \sqcup \{q_i^v \in \Omega^+ \mid \exists t \in \tau(q_i^v): t \in T_i\}, \quad i=1, 2.$$

记 $A_i = \{q_i^v \in \Omega^+ \mid \exists t \in \tau(q_i^v): t \in T_i\}, i=1, 2$, 则 $K_i = \sqcup A_i, i=1, 2$.

记 $A = \{q_i^v \in \Omega^+ \mid \exists t \in \tau(q_i^v): t \in (T_1 \cup T_2)\}$, 由 $T_i \subseteq (T_1 \cup T_2), i=1, 2$, 得 $A_i \subseteq A, i=1, 2$. 因此, $(A_1 \cup A_2) \subseteq A$. 另一方面, 设 $q_i^v \notin (A_1 \cup A_2)$, 对于任意的 $t \in \tau(q_i^v)$, 有 $t \notin T_1$ 且 $t \notin T_2$, 即 $t \notin (T_1 \cup T_2)$, 因此, $q_i^v \notin A$, 于是 $A \subseteq (A_1 \cup A_2)$, 从而得 $A = (A_1 \cup A_2)$.

因为 $\sqcup A = \sqcup (A_1 \sqcup A_2) = (\sqcup A_1) \sqcup (\sqcup A_2), K_i = \sqcup A_i, i=1, 2$, 所以, $\sqcup A = K_1 \sqcup K_2$. 由 $K_d(T_1 \cup T_2) = \sqcup A$ 可得, $K_1 \sqcup K_2$ 是由 $T_1 \cup T_2$ 通过析取模型诱导的多分知识状态, 即 $K_1 \sqcup K_2 \in \mathcal{K}$. 因此, \mathcal{K} 满足逐项并 \sqcup 封闭, 即由技能映射 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构 \mathcal{K} 是多分知识空间.

根据项目 q 的解答或操作步骤设定响应值, 得到的响应值集 V 不一定是线性有序集. 例如, 例 1 中的项目 $q_2, V_2 = \{0, a, b, c\}$, 其中, a 与 b 是不可比较的, 且 $a \vee_2 b = c$.

例 14 设 $Q = \{q_1, q_2\}$. 项目 q_1 : 解方程 $|x-3|=2x-3$. 项目 q_2 : 已知 $x>3$, 且 $|x-3|=8$, 求 x^2 . $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_3\}$, 其中, λ_1 表示当 $x-3 \geq 0$ 时, 解含 $|x-3|$ 的一元一次方程; λ_2 表示当 $x-3 < 0$ 时, 解含 $|x-3|$ 的一元一次方程; λ_3 表示计算数的平方. 根据项目 q_1 和 q_2 的解答或操作步骤设定响应值, 得到 $V_1 = \{0, a, b, c\}, V_2 = \{0, 1, 2\}$. $\Omega^+ = \{q_1^a, q_1^b, q_1^c, q_2^1, q_2^2\}$.

例 14 的项目 q 的状态转移图, 如图 13 所示. 由图 13 得到过程函数为

$$\begin{aligned} \Phi_1(q_1^0, \lambda_1) &= q_1^a, & \Phi_1(q_1^0, \lambda_2) &= q_1^b, & \Phi_1(q_1^0, \{\lambda_1, \lambda_2\}) &= q_1^c, \\ \Phi_2(q_2^0, \lambda_1) &= q_2^1, & \Phi_2(q_2^0, \lambda_1 \lambda_3) &= q_2^2. \end{aligned}$$

记 $s_1 = \lambda_1, s_2 = \lambda_2, s_3 = \{\lambda_1, \lambda_2\}, s_4 = \lambda_1 \lambda_3$, 则 Q 的技能集 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. 由过程函数导出析取的技能映射 τ 为

$$\begin{aligned} \tau(q_1^a) &= \{s_1, s_3\}, & \tau(q_1^b) &= \{s_2, s_3\}, & \tau(q_1^c) &= \{s_3\}, \\ \tau(q_2^1) &= \{s_1, s_4\}, & \tau(q_2^2) &= \{s_4\}. \end{aligned}$$

例 14 的技能映射 (Ω^+, S, τ) 的形式背景表, 如表 3 所示. 由表 3 可得诱导的多分知识状态为

$$\begin{aligned} T_1 &= \{s_1\}, K_d(T_1) = \sqcup \{q_1^a, q_2^1\} = \{q_1^a, q_2^1\}; \\ T_2 &= \{s_2\}, K_d(T_2) = \sqcup \{q_1^b\} = \{q_1^b, q_2^0\}; \\ T_3 &= \{s_3\}, K_d(T_3) = \sqcup \{q_1^a, q_1^b, q_1^c\} = \{q_1^c, q_2^0\}; \\ T_4 &= \{s_4\}, K_d(T_4) = \sqcup \{q_2^1, q_2^2\} = \{q_1^c, q_2^2\}. \end{aligned}$$

由定理 3 可知, 取遍 $T \subseteq S$, 由 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构 \mathcal{K} 是多分知识空间, 且 \mathcal{K} 是由 $\{\{q_1^a, q_2^1\}, \{q_1^b, q_2^0\}, \{q_1^c, q_2^0\}, \{q_1^c, q_2^2\}\}$ 张成的, 即

$$\mathcal{K} = \{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^a, q_2^1\}, \{q_1^b, q_2^0\}, \{q_1^c, q_2^0\}, \{q_1^c, q_2^2\}, \{q_1^c, q_2^1\},$$

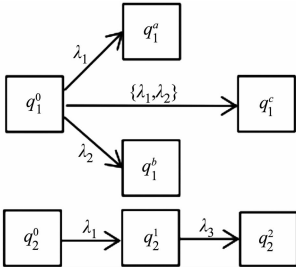


图 13 例 14 的项目 q 的状态转移图

Fig. 13 State transition diagram of item q of example 14

表 3 例 14 的技能映射 (Ω^+, S, τ) 的形式背景表

Tab. 3 Formal background table of skill map (Ω^+, S, τ) of example 14

Ω^+	S			
	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1^a	1	0	1	0
q_1^b	0	1	1	0
q_1^c	0	0	1	0
q_2^1	1	0	0	1
q_2^2	0	0	0	1

$$\{q_1^a, q_2^2\}, \{q_1^b, q_2^2\}, \{q_1^c, q_2^2\}\}.$$

例 14 的多分知识结构 $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ 的 Hasse 图, 如图 14 所示, \mathcal{K} 满足逐项并 \sqcup 封闭. 然而, 因为

$$\{q_1^a, q_2^1\} \sqcap \{q_1^c, q_2^0\} = \{q_1^a, q_2^0\} \notin \mathcal{K}.$$

所以, \mathcal{K} 不满足逐项交 \sqcap 封闭.

注 6 由析取的技能映射 τ 通过析取模型诱导的多分知识结构 \mathcal{K} 未必满足逐项交 \sqcap 封闭.

例如, 例 13 的多分知识空间 \mathcal{K} 满足逐项交 \sqcap 封闭. 但是, 例 14 的 \mathcal{K} 不满足逐项交 \sqcap 封闭.

注 7 命题 3 的差异性对于通过析取模型诱导多分知识结构是必要的. 如果析取的技能映射 r 不满足该条件, 则由 r 通过析取模型诱导的多分知识状态的集合可能不满足定义 2 的条件 2).

例如, 在例 14 中, 若定义技能映射 τ' 为

$$\begin{aligned} \tau(q_1^a) &= \{s_1, s_3\}, & \tau(q_1^b) &= \{s_3\}, & \tau(q_1^c) &= \{s_3\}, \\ \tau(q_2^1) &= \{s_1, s_4\}, & \tau(q_2^2) &= \{s_4\}. \end{aligned}$$

上式中: a 与 b 不可比较; $\tau(q_1^a) \setminus \tau(q_1^b) = \{s_1\} \neq \emptyset$, 但是 $\tau(q_1^b) \setminus \tau(q_1^a) = \emptyset$, 不满足命题 3 的差异性. 由 τ' 通过析取模型诱导的所有多分知识状态的集合为

$$\mathcal{K}' = \{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^a, q_2^1\}, \{q_1^c, q_2^0\}, \{q_1^0, q_2^2\}, \{q_1^c, q_2^1\}, \{q_1^a, q_2^2\}, \{q_1^c, q_2^2\}\}.$$

由于 $q_1^b \notin \bigcup_{K \in \mathcal{K}'} K$, 所以, \mathcal{K}' 不是多分知识结构.

3 结束语

基于程序性知识的评估, 通过项目状态转移函数定义项目状态空间, 从而将问题空间推广到多分情形. 通过过程函数导出技能映射, 证明了技能映射通过析取模型诱导的多分知识结构是多分知识空间. 在文中的框架中, 仅考虑每个项目的某个特定解法, 对于一题多解的情形将在后续的能力模型中考虑. 为了保证操作集的有限性, 假定各项目的解答或操作是非循环的, 所以, 对循环解路径的约简可以在后续研究中考虑. 另外, 由于知识空间的形式背景与形式概念分析密切相关^[26-29], 因此, 将 KST 的多分推广与形式概念分析的发展联系起来将是今后研究的方向.

参考文献:

[1] BIRKHOFF G. Rings of sets[J]. Duke Mathematical Journal, 1937, 3(3): 443-454. DOI: 10. 1215/S0012-7094-37-00334-X.

[2] BIRKHOFF G. Lattice theory[M]. 3rd ed. New York: American Mathematical Society, 1967. DOI: 10. 1090/coll/025.

[3] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2): 175-196. DOI: 10. 1016/s0020-7373(85)80031-6.

[4] FALMAGNE J C, KOPPEN M, VILLANO M, et al. Introduction to knowledge spaces: How to build, test and search them[J]. Psychological Review, 1990, 97(2): 201-224. DOI: 10. 1037/0033-295x. 97. 2. 201.

[5] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Knowledge spaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999. DOI: 10. 1007/978-3-642-58625-5.

[6] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011. DOI: 10. 1007/978-3-642-01039-2.

[7] FALMAGNE J C, ALBERT D, DOBLE D, et al. Knowledge spaces: Applications in education[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2013. DOI: 10. 1007/978-3-642-35329-1.

[8] SCHREPP M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1997, 41(3): 237-243. DOI: 10. 1006/jmps. 1997. 1169.

[9] BARTL E, BELOHLAVEK R. Knowledge spaces with graded knowledge states[J]. Information Sciences, 2011, 181

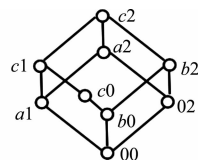


图 14 例 14 的多分知识结构 $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ 的 Hasse 图

Fig. 14 Hasse diagram of polytomous knowledge structure $(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$ of example 14

- (8);1426-1439. DOI:10.1109/kam.2008.106.
- [10] STEFANUTTI L, ANSELM I P, DE CHIUSOLE D, *et al.* On the polytomous generalization of knowledge space theory[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2020, 94:102306. DOI:10.1016/j.jmp.2019.102306.
- [11] HELLER J. Generalizing quasi-ordinal knowledge spaces to polytomous items[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2021, 101:102515. DOI:10.1016/j.jmp.2021.102515.
- [12] DOIGNON J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]// FISCHER G, LAMING D. *Contributions to mathematical psychology, psychometrics and methodology*. New York: Springer-Verlag, 1994:111-121. DOI:10.1007/978-1-4612-4308-3_8.
- [13] DUNTSCH I, GEDIGA G. Skills and knowledge structures[J]. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1995, 48(1):9-27. DOI:10.1111/j.2044-8317.1995.tb01047.x.
- [14] KOROSSY K. Modeling knowledge as competence and performance[M]// ALBERT D, LUKAS J. *Knowledge spaces: Theories, empirical research, applications*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 1999:103-132. DOI:10.4324/9781410602077-14.
- [15] HELLER J, STEINER C, HOCKEMEYER C, *et al.* Competence-based knowledge structures for personalized learning[J]. *International Journal on E-learning*, 2006, 5(1):75-88. DOI:10.14236/ewic/el2005.2.
- [16] HELLER J, REPITSCH C. Distributed skill functions and the meshing of knowledge structures[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2008, 52(3):147-157. DOI:10.1016/j.jmp.2008.01.003.
- [17] HELLER J, ANSELM I P, STEFANUTTI L, *et al.* A necessary and sufficient condition for unique skill assessment[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, 79:23-28. DOI:10.1016/j.jmp.2017.05.004.
- [18] STEFANUTTI L. On the assessment of procedural knowledge: From problem spaces to knowledge spaces[J]. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 2019, 72(2):185-218. DOI:10.1111/bmsp.12139.
- [19] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. *西北大学学报(自然科学版)*, 2019, 49(4):517-526. DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2019-04-004.
- [20] STEFANUTTI L, DE CHIUSOLE D, GONDAN M, *et al.* Modeling misconceptions in knowledge space theory[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2020, 99:102435. DOI:10.1016/j.jmp.2020.102435.
- [21] GE Xun, LI Jinjin. A note on the separability of items in knowledge structures delineated by skill multimaps[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2020, 98:102427. DOI:10.1016/j.jmp.2020.102427.
- [22] 陈应生, 李进金. 决策信息系统协调性的关系矩阵表示[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(6):823-829. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201810106.
- [23] 王国俊. *L-fuzzy 拓扑空间论*[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.
- [24] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. *Introduction to lattices and order*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. DOI:10.1017/cbo9780511809088.
- [25] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C]// *International Conference on Formal Concept Analysis*. Berlin: Springer, 1982:314-339. DOI:10.1007/978-94-009-7798-3_15.
- [26] GANTER B, WILLE R. *Formal concept analysis, mathematical foundations*[M]. Berlin: Springer, 1999. DOI:10.1007/978-3-642-59830-2.
- [27] SPOTO A, STEFANUTTI L, VIDOTTO G. Knowledge space theory, formal concept analysis, and computerized psychological assessment[J]. *Behavior Research Methods*, 2010, 42(1):342-350. DOI:10.3758/brm.42.1.342.
- [28] 李进金, 李克典, 吴端恭. *基于粗糙集与概念格的知识系统模型*[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [29] 陈东晓, 李进金. 形式背景的下近似协调与粒协调的关系[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2020, 41(1):130-136. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.20190703.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)