第 43 卷　第 6 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 43　No. 6
2022 年 11 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Nov.　2022

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202109016

平面带形区域上一类解析函数的 Bohr 现象

林珍连[1]，曾旭暾[2]

(1. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021；
2. 泉州师范学院 外国语学院，福建 泉州 362000)

摘要： 研究平面带形区域 $S=\{z=x+\mathrm{i}y,\mathbf{C}:-1<x<1\}$ 上一类解析函数，建立此类解析函数系数估计. 利用该估计，考虑这类解析函数的 Bohr 现象，获得其解析函数的 Bohr 半径及两个改进版的 Bohr 不等式.

关键词： 系数估计；带形区域；Bohr 不等式；Bohr 现象；解析函数

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2022)06-0840-05

Bohr Phenomenon for a Kind of Analytic Functions on Plane Strip Region

LIN Zhenlian[1], ZENG Xutun[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Foreign Languages, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China)

Abstract: This paper studies a kind of analytic functions on plane strip region $S=\{z=x+\mathrm{i}y,\mathbf{C}:-1<x<1\}$, and establishes the coefficient estimation for this kind of analytic functions. Using this estimate, Bohr phenomenon of this kind of analytic functions is considered, Bohr radius and two improved versions of Bohr inequalities are obtained.

Keywords: coefficient estimation; strip region; Bohr inequality; Bohr phenomenon; analytic function

1　预备知识

用 $\mathbf{C}$ 表示复平面，$D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 表示 $\mathbf{C}$ 中的单位开圆盘，$H(D)$ 表示 D 上解析函数的全体. 经典的 Bohr 不等式中，若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H(D)$，且 $|f(z)|<1$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant 1,\qquad |z|\leqslant\frac{1}{3}.$$

$|z|=\frac{1}{3}$ 是最佳的，通常将其称为 Bohr 半径[1-3]. 若对一切具有 $\|f\|<1$ 的函数 $f\in H(D)$，存在某个 ρ，当 $|z|\leqslant\rho$ 时，有类似的 Bohr 不等式，则称 $H(D)$ 中某函数族具有 Bohr 现象. 由于不是每一类函数都具有 Bohr 现象[4]，因此，一类函数何时具有 Bohr 现象是一个值得研究的问题.

收稿日期： 2021-09-13
通信作者： 林珍连(1970-)，女，副教授，主要从事函数论的研究. E-mail:zhenlian@hqu.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12071161)；福建省自然科学基金资助项目(2020J01073)；华侨大学高层次人才科研启动项目(19BS102)

设 $\Omega\supset D$ 是平面单连通区域，用 $H(\Omega)$ 表示 Ω 上解析函数全体，用 $B(\Omega)$ 表示 $f\in H(\Omega)$，使 $f(\Omega)\subseteq \overline{D}$ 的解析函数全体，函数族 $B(\Omega)$ 的 Bohr 半径记为 $B_\Omega\in(0,1)$，有

$$B_\Omega=\sup\left\{r\in(0,1):\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant 1,\forall f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(\Omega),z\in D\right\}.$$

2010 年，文献[5]考虑了区域 Ω 为一类移动圆盘，当

$$\Omega_\gamma=\left\{z\in\mathbf{C}:\left|z+\frac{\gamma}{1-\gamma}\right|<\frac{1}{1-\gamma}\right\},\qquad 0\leqslant\gamma<1$$

时，解析函数族 $B(\Omega_\gamma)$ 的 Bohr 不等式，可得定理 A.

定理 A　假设 $f(z)\in B(\Omega_\gamma)$，则有 $B_{\Omega_\gamma}=\rho_\gamma:=\dfrac{1+\gamma}{3+\gamma}$，如果对某一 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(\Omega_\gamma)$，则有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\rho_\gamma{}^n=1$，当且仅当 $f(z)=c$，$|c|=1$.

2021 年，文献[6]改进和推广了文献[5]的结果，结果之一为定理 B.

定理 B　假设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H(D)$，$|f(z)|<1$，$z\in D$，则有

$$|a_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n+\frac{16}{9}\frac{S_r}{\pi}\leqslant 1,\qquad \forall r\leqslant\frac{1}{3}.$$

上式中：$\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{16}{9}$ 是不能改进的；S_r 表示圆盘 $D_r=\{z:|z|<r\}$ 在映射 $f(z)$ 之下像的面积.

关于经典 Bohr 不等式的更多改进和推广，可参见文献[7-16].

文中考虑当区域 Ω 是带形区域 $S=\{z=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}:-1<x<1\}$ 时，解析函数族 $B(S)$ 的 Bohr 现象，得到 $B(S)$ 解析函数族的 Bohr 半径及两个改进版的 Bohr 不等式.

2　主要结果及其证明

证明以下引理.

引理 1　设 $f(z)\in B(S)$，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$\forall z\in D$，有

$$|a_n|\leqslant\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2),\qquad n\geqslant 1.$$

证明：由于函数 $\varphi(z)=\tan\dfrac{\pi}{4}z$ 把带形区域 $S=\{z=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}:-1<x<1\}$ 共形映照为单位圆盘 D，那么 S 上的双曲度量为

$$\lambda_S(z)=\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}=\frac{\pi}{4}\frac{\left|\cos^2\dfrac{\pi}{4}z\right|^{-1}}{1-\left|\tan\dfrac{\pi}{4}z\right|^2}=\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}\mathrm{Re}\,z}.$$

由于 $f(z)\in B(S)$，故 $|f(z)|\leqslant 1$，由 Schwarz-Pick 引理，有

$$|f'(z)|\leqslant\lambda_S(z)(1-|f(z)|^2),\qquad z\in D.$$

特别地，当 $z=0$ 时，上式化为

$$|a_1|\leqslant\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2).\tag{1}$$

当 $n\geqslant 2$ 时，对任何给定的正整数 n，令

$$g(z)=\frac{1}{n}[f(\omega_1z)+f(\omega_2z)+\cdots+f(\omega_nz)].$$

上式中：$\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}(k=1,2,\cdots,n)$ 为 1 的 n 次方根，故不难验证

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^p=\begin{cases}0, & p\neq Nn,\\ n, & p=Nn,\end{cases}$$

N 为任一正整数,则有

$$g(z)=a_0+a_nz^n+a_{2n}z^{2n}+a_{3n}z^{3n}+\cdots\in B(S),$$

再令

$$G(z)=g(\sqrt[n]{z})=a_0+a_nz+a_{2n}z^2+\cdots\in B(S),$$

且 $g(z)$,$G(z)$都是从 D 到 $\overline{D}$ 的解析函数,由式(1)可知,

$$|a_n|\leqslant\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2),\qquad n\geqslant 2.$$

综上所述,引理得证.

利用引理 1 探讨 $B(S)$函数族的 Bohr 现象,得到了这类函数的 Bohr 半径和两个 Bohr 不等式. 证明 $B(S)$解析函数族的 Bohr 半径.

定理 1 设 $f(z)\in B(S)$,$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$\forall z\in D$,则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant 1,\qquad \forall\ |z|\leqslant\frac{2}{2+\pi},$$

若对某一 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(S)$,有 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\left(\frac{2}{2+\pi}\right)^n=1$,当且仅当 $f(z)=c$,$|c|=1$.

证明:由引理 1,可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n\leqslant|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n=|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\frac{|z|}{1-|z|}. \tag{2}$$

$|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\frac{|z|}{1-|z|}\leqslant 1$ 对一切可允的 a_0 成立,当且仅当$|z|\leqslant\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{4}(1+|a_0|)}$对一切可允的 a_0 成立,因为$|a_0|\leqslant 1$,因此,$|z|\leqslant\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{4}(1+|a_0|)}$对一切可允的 a_0 成立,当且仅当$|z|\leqslant r_0:=\dfrac{2}{2+\pi}$.

若对某一 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(S)$,有$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\left(\frac{2}{2+\pi}\right)^n=1$,根据式(2),有

$$1\leqslant|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\frac{r_0}{1-r_0}=|a_0|+\frac{1}{2}(1-|a_0|^2).$$

经简单计算可得$|a_0|\geqslant 1$,由题设可知$|a_0|\leqslant 1$,从而$|a_0|=1$,即有$|f(0)|=1$,$|a_n|=0$,$n\geqslant 1$,从而 $f(z)=c$,$|c|=1$,这表明$\dfrac{2}{2+\pi}$是最佳的. 证毕.

对定理 1 进行一些改进和推广,首先,证明其中一个改进版(定理 2).

定理 2 设 $f(z)\in B(S)$,$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$\forall z\in D$,则有

$$B_1(r):=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\frac{1}{2}\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}\right)^2\frac{S_r}{\pi}\leqslant 1,\qquad \forall r\leqslant\frac{2}{2+\pi}.$$

证明:因为 $f(z)\in B(S)$,由引理 1,可得

$$\frac{S_r}{\pi}=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<r}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2r^{2n}\leqslant$$

$$\frac{\pi^2}{16}(1-|a_0|^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}nr^{2n}=\frac{\pi^2(1-|a_0|^2)^2}{16}\frac{r^2}{(1-r^2)^2}.$$

当 $r\leqslant r_0:=\dfrac{2}{2+\pi}$时,由引理 1,可得

$$B_1(r)\leqslant|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}+\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}\right)^2\frac{(1-|a_0|^2)^2r^2}{(1-r^2)^2}\leqslant$$

$$|a_0|+\frac{\pi}{4}(1-|a_0|^2)\frac{r_0}{1-r_0}+\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}\right)^2\frac{(1-|a_0|^2)^2r_0^2}{(1-r_0^2)^2}=$$
$$1-\frac{(1-|a_0|)^2}{2}\left(1-\frac{(1+|a_0|)^2}{4}\right).$$

由于 $|a_0|\leqslant 1$，所以 $B_1(r)\leqslant 1$. 当 $B_1(r)=1$ 时，有 $f(z)=c$，$|c|=1$. 证毕.

对于 S 上的解析函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，记 $\|f_0\|_r^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$，其中，$f_0(z)=f(z)-f(0)$. 定理 1 的另一种改进版(定理 3).

定理 3　设 $f(z)\in B(S)$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$\forall z\in D$，则有

$$M_f(r):=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r\leqslant 1,\qquad \forall r\leqslant\frac{2}{2+\pi}:=r_0.$$

若对某一 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(S)$，有 $M_f(r)=1$，当且仅当 $f(z)=c$，$|c|=1$.

证明：不失一般性，记 $|a_0|=a\in[0,1]$，由引理 1，可得

$$M_f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r\leqslant$$
$$a+\frac{\pi(1-a^2)}{4}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a^2)^2\pi^2}{16}\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=$$
$$a+\frac{\pi(1-a^2)}{4}\frac{r}{1-r}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a^2)^2\pi^2}{16}\frac{r^2}{1-r^2}=$$
$$a+\frac{\pi(1-a^2)}{4}\frac{r}{1-r}+\frac{(1-a)(1-a^2)\pi^2}{16}\frac{r^2}{1-r^2}+\frac{(1-a^2)^2\pi^2}{16}\frac{r^3}{(1-r)(1-r^2)}.$$

记

$$g(a)=a+A(1-a^2)+B(1-a)(1-a^2)+C(1-a^2)^2,\qquad a\in[0,1].$$

上式中：$A=\frac{\pi}{4}\frac{r}{1-r}$，$B=\frac{\pi^2}{16}\frac{r^2}{1-r^2}$，$C=\frac{\pi^2}{16}\frac{r^3}{(1-r)(1-r^2)}$，则有

$$g'(a)=1-2Aa+B(3a^2-2a-1)+4C(a^3-a),$$
$$g''(a)=-2A+2B(3a-1)+4C(3a^2-1).$$

因为 B 和 C 都是非负数，所以 $g''(a)$ 关于 a 的函数在 $(0,1)$ 内是单调递增函数，从而有

$$g''(a)\leqslant g''(1)=-\frac{\pi}{2}\frac{r}{1-r}+\frac{\pi^2}{4}\frac{r^2}{1-r^2}+\frac{\pi^2}{2}\frac{r^3}{(1-r)(1-r^2)}=$$
$$\frac{\pi}{2}\frac{r}{(1-r)(1-r^2)}[(\pi+2)r^2+\pi r-2].$$

当 $r\leqslant\frac{2}{2+\pi}$ 时，$(\pi+2)r^2+\pi r-2\leqslant 0$，即 $g''(a)\leqslant 0$. 这说明了 $g'(a)$ 在 $(0,1)$ 内是递减函数. 因此，当 $r\leqslant r_0:=\frac{2}{2+\pi}$ 时，有 $g'(a)\geqslant g'(1)1-2A>1-\frac{2}{\pi}\frac{r_0}{1-r_0}$，故 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，$g(a)\leqslant g(1)=1$，即 $M_f(r)\leqslant 1$，$\forall r\leqslant\frac{2}{2+\pi}$.

若对某一 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(S)$，有 $M_f(r)=1$，则有 $1\leqslant a+\frac{\pi(1-a^2)}{4}\frac{r}{1-r}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a^2)^2\pi^2}{16}\frac{r^2}{1-r^2}$，即

$$1\leqslant\frac{\pi(1+a)}{4}\frac{r}{1-r}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a)(1+a)^2\pi^2}{16}\frac{r^2}{1-r^2}.$$

当 $r\leqslant r_0:=\frac{2}{2+\pi}$，可得

$$1\leqslant\frac{\pi(1+a)}{4}\frac{r_0}{1-r_0}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r_0}{1-r_0}\right)\frac{(1-a)(1+a)^2\pi^2}{16}\frac{r_0^2}{1-r_0^2}.$$

经计算可得 $a\geqslant 1$,由题设可知 $a\leqslant 1$,从而 $|a_0|=1$,由最大模原理可知,$f(z)=c$,$|c|=1$.

由引理1可知,$\Omega\supset D$ 为一般的单连通区域时,有类似的结论成立.换而言之,带形区域可以推广到一般单连通区域.

参考文献:

[1] SIDON S. Über einen Satz von Herrn Bohr[J]. Mathematische Zeitschrift,1927,26(1):731-732. DOI:10.1007/BF01475487.

[2] TOMIC M. Sur un théorém de H Bohr[J]. Mathematica Scandinavica,1962,11:103-106. DOI:10.7146/math.scand.a-10653.

[3] BOHR H. A theorem concerning power series[J]. Proceeding of the London Mathematical Society,1914,13(1):1-5. DOI:10.1112/plms/s2-13.1.1.

[4] BENETEAU C,DAHLNE A,KHAVINSO D. Remarkson the Bohr phenomenon[J]. Comput Methods Funct Theory,2004,4:1-19. DOI:10.1007/BF03321051.

[5] FOURNIER R,RUSCHWEYH S. On the Bohr radius for simply connected plane domains[J]. CRM Proceedings and Lecture Notes,2010,51:165-171. DOI:10.1090/crmp.051/12.

[6] EVDORIDIS S,PONNUSAMY S A,RASILA A. Improved Bohr's inequality for shifted disks[J]. Results in Mathematics,2021,76(14):1-15. DOI:10.1007/s00025-020-01325-x.

[7] MUHANNA Y A. Bohr's phenomenon in subordination and bounded harmonic classes[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2010,55:1071-1078.

[8] BOMBIERI E,BOURGAIN J. A remark on Bohr's inequality[J]. International Mathematics Research Notices,2004,80:4307-4330. DOI:10.1155/S1073792804143444

[9] LIU Mingsheng,PONNUSAMY S. Multidimensional analogues of refined Bohr's inequality[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2021,149(5):2133-2146. DOI:10.1090/proc/15371.

[10] 李程鹏,李锦成.一类解析函数的Bohr定理[J].华侨大学学报(自然科学版),2021,42(4):547-550. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202011005.

[11] ALLU V,HALDER H. Bohr radius for certain classes of starlike and convex univalent functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,493:1-15. DOI:10.1016/j.jmaa.2020.124519.

[12] BHOWMIK B,DAS N. Bohr phenomenon for subordinating families of certain univalent functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2018,462:1087-1098. DOI:10.1016/j.jmaa.2018.01.035.

[13] ALKHALEEFAH S,KAYUMOV I,PONNUSAMY S. On the Bohr inequality with a fixed zero coefficient[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2019,147:5263-5274. DOI:10.1090/proc/14634.

[14] 白晓瑾,石擎天.解析函数的Bohr型半径估计[J].华侨大学学报(自然科学版),2019,40(6):817-822. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201901058.

[15] LIU Taixun,WANG Jianfei. An absolute estimate of the homogeneous expansions of holomorphic mappings[J]. Pacific Journal of Mathematics,2007,231(1):155-166. DOI:10.4046/sm180-2-5.

[16] KAYUMOV I,PONNUSAMY S. Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2018,465:857-871. DOI:10.1016/j.jmaa.2018.05.038.

(责任编辑:钱筠　英文审校:黄心中)