

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202108033



# 空间分数阶 Allen-Cahn 方程的 高效算子分裂格式

刘佳奇, 蔡耀雄, 翟术英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 基于算子分裂思想, 将空间分数阶 Allen-Cahn 方程分解为非线性方程和分数阶热传导方程, 其中, 非线性方程有解析解, 分数阶热传导方程可利用生成函数的方法结合 Crank-Nicolson 格式建立差分格式. 通过数值算例验证格式的有效性. 结果表明: 空间分数阶 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂格式具有稳定性、收敛性及有效性.

**关键词:** 空间分数阶 Allen-Cahn 方程; 生成函数; 分数阶 Laplace 算子; 算子分裂法

**中图分类号:** O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2022)06-0833-07

## High Efficient Operator Splitting Scheme of Space-Fractional Allen-Cahn Equation

LIU Jiaqi, CAI Yaoxiong, ZHAI Shuying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Based on the operator splitting thought, the space-fractional Allen-Cahn equation can be decomposed into a nonlinear equation and a fractional heat conduction equation. Among them, a nonlinear equation has analytical solution. For the fractional heat conduction equation, a difference scheme is established by using the generating function method and the Crank-Nicolson scheme. Numerical experiments are given to verify the effectiveness of the form. The result shows that the efficient operator splitting scheme of the spatial-fractional Allen-Cahn equation is of the stability, convergence and effectiveness.

**Keywords:** spatial-fractional Allen-Cahn equation; generating function; fractional Laplace operator; operator splitting method

Allen-Cahn 方程是一类非齐次半线性泊松方程<sup>[1]</sup>, 是材料科学中描述相位变迁和样品形成的重要方程. 在研究图像修复<sup>[2]</sup>、晶体生长<sup>[3]</sup>等问题时, Allen-Cahn 方程发挥着至关重要的作用.

考虑分数阶 Allen-Cahn 方程, 即

$$\left. \begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u &= -\frac{1}{\varepsilon} F'(u), & (x, t) \in [a, b] \times (0, T], \\ u(a, t) &= f(t), & u(b, t) = g(t), & t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in [a, b]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中:  $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ , 且  $F'(u) = \frac{dF(u)}{du} = u(u^2 - 1)$ ;  $\varepsilon$  为描述相界厚度的一个参数.

收稿日期: 2021-08-03

通信作者: 翟术英(1986-), 女, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: zhaishuying123456@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701196); 福建省自然科学基金资助项目(2020J01074)

分数阶 Allen-Cahn 方程可以看作是 Lyapunov 能量泛函的  $L_2$  梯度流<sup>[1]</sup>,即

$$E(u)=\int_a^b\frac{1}{2}u(-\Delta)^{a/2}u+\frac{1}{\varepsilon^2}F(u)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

$E(u)$ 对时间  $t$  求导,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(u)}{\mathrm{d}t}&=\int_a^b\frac{1}{2}u_t(-\Delta)^{a/2}u+\frac{1}{2}u(-\Delta)^{a/2}u_t+\frac{1}{\varepsilon^2}F'(u)u_t\mathrm{d}x=\\&\left(\frac{1}{2}u_t,(-\Delta)^{a/2}u\right)+\left(\frac{1}{2}u,(-\Delta)^{a/2}u_t\right)+\int_a^b\frac{1}{\varepsilon^2}F'(u)u_t\mathrm{d}x=\\&\int_a^bu_t(-\Delta)^{a/2}u+\frac{1}{\varepsilon^2}F'(u)u_t\mathrm{d}x=\int_a^bu_t\left((-\Delta)^{a/2}u+\frac{1}{\varepsilon^2}F'(u)\right)\mathrm{d}x=\\&-\int_a^b(u_t)^2\mathrm{d}x\leqslant 0.\end{aligned}\tag{3}$$

由式(3)可知,能量泛函  $E(u)$ 随时间的推移而逐渐减小.

近年来,由于分数阶 Allen-Cahn 方程在实际问题中应用较多,故引起了许多学者研究的兴趣. Chen 等<sup>[4]</sup>提出求解空间分数阶 Allen-Cahn 方程的指数时间差分格式,并证明该格式满足极大值原理. 文献 [5-6]使用降阶有限元方法求解空间分数阶 Allen-Cahn 方程. 吴龙渊等<sup>[7]</sup>提出二阶和四阶两种交替方向隐(ADI)格式,并用傅里叶分析法验证两种格式是能量稳定的,且满足极大值原理. Zhai 等<sup>[8]</sup>给出一种线性化高阶紧致差分方法,并运用 ADI 格式减少运算量. Chen 等<sup>[9]</sup>在时间上用修正的 Crank-Nicolson 格式,空间上用 Legendre 谱方法建立了一种全离散格式,并严格证明了全离散格式的稳定性 and 收敛性. Khalid 等<sup>[10]</sup>重新定义三次 b 样条插值函数,并用其求解时间分数阶 Allen-Cahn 方程. 此外,重心插值配点法<sup>[11]</sup>、有限体积法<sup>[12]</sup>、有限元<sup>[13-14]</sup>等方法均可用于求解时间分数阶 Allen-Cahn 方程.

文献[15-16]利用算子分裂方法求解二维 Allen-Cahn 方程. 此方法基于模型各部分的性质构造相应的求解策略,快速有效且便于实施,广泛应用于数值求解各种复杂模型<sup>[17]</sup>. 本文结合算子分裂方法和生成函数有限差分方法,构造求解空间分数阶 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂格式.

## 1 空间分数阶 Allen-Cahn 方程的求解

### 1.1 预备知识

对空间进行  $N$  等剖分,记空间步长为  $h=\frac{b-a}{N}$ ,空间节点为  $x_j=a+jh, j=0,1,2,\cdots,N$ .

**引理 1**<sup>[18]</sup> 对分数阶 Laplace 算子  $(-\Delta)^{a/2}$  构造离散形式,即

$$(-\Delta_h)^{a/2}u(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\frac{1}{h^a}\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_d\in\mathbf{Z}}a_{j_1,j_2,\cdots,j_d}^{(a)}u(x_1+j_1h,x_2+j_2h,\cdots,x_d+j_dh). \tag{4}$$

式(4)中: $\mathbf{Z}$  是整数集合; $a_{j_1,j_2,\cdots,j_d}^{(a)}$  是生成函数  $\left[\sum_{j=1}^d4\sin^2\left(\frac{z_j}{2}\right)\right]^{a/2}$  的扩散系数.

根据引理 1,有以下 2 个结论.

1) 若  $u\in W^{\gamma+a,1}(\mathbf{R}^d)$ ,则有

$$(-\Delta)^{a/2}_du=(-\Delta_h)^{a/2}_du+O(h^\gamma),\quad 0<\gamma\leqslant 2. \tag{5}$$

2) 若  $u\in W^{\delta+a,1}(\mathbf{R}^d)$ ,则有

$$(-\Delta)^{a/2}_du=\frac{4}{3}(-\Delta_{\frac{h}{2}})^{a/2}_du-\frac{1}{3}(-\Delta_h)^{a/2}_du+O(h^\delta),\quad 2\leqslant\delta\leqslant 4. \tag{6}$$

$$\begin{aligned}W^{s,1}(\mathbf{R}^d)&=\{u\mid u\in L^1(\mathbf{R}^d),\int_{\mathbf{R}^d}(1+|k|)^s|\hat{u}(k_1,k_2,\cdots,k_d)|\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\cdots\mathrm{d}k_d<\infty\},|k|^2=k_1^2+k_2^2+\\&\cdots+k_d^2.\end{aligned}$$

由引理 1 知,在一维情况下,分数阶 Laplace 算子离散形式为

$$(-\Delta_h)^{a/2}_1u(x)=\frac{1}{h^a}\sum_{j\in\mathbf{Z}}a_j^{(a)}u(x+jh). \tag{7}$$

式(7)中:

$$a_j^{(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{z}{2} \right) \right]^{a/2} \exp(-ijz) dz. \tag{8}$$

通过快速傅里叶(FFT)变换算法可以得到系数序列,即

$$a_0^{(a)}, a_1^{(a)}, \cdots, a_{N-1}^{(a)}. \tag{9}$$

由式(7)可建立 $(-\Delta)^{a/2} \mathbf{u}$ 的离散格式,即

$$(-\Delta_h)^{a/2} \mathbf{u} = \frac{1}{h^a} \mathbf{G} \mathbf{u}. \tag{10}$$

式(10)中:  $\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{N-1})^\top$ , 系数矩阵  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_0^{(a)} & a_1^{(a)} & a_2^{(a)} & \cdots & a_{N-2}^{(a)} \\ a_1^{(a)} & a_0^{(a)} & a_1^{(a)} & \cdots & a_{N-3}^{(a)} \\ a_2^{(a)} & a_1^{(a)} & a_0^{(a)} & \cdots & a_{N-4}^{(a)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N-2}^{(a)} & a_{N-3}^{(a)} & a_{N-4}^{(a)} & \cdots & a_0^{(a)} \end{pmatrix}$ . 显然,  $\mathbf{G}$  为 To-

eplitz 矩阵且为正定矩阵<sup>[18]</sup>.

系数  $a_j^{(a)}$  可以用函数重新表示,即

$$a_j^{(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{z}{2} \right) \right]^{a/2} \exp(-ijz) dz = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha/2 - j + 1) \Gamma(\alpha/2 + j + 1)}.$$

还可利用数值求积法计算系数  $a_j^{(a)}$ ,应用梯形法则,可得

$$a_j^{(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{z}{2} \right) \right]^{a/2} \exp(-ijh) dz \approx \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{ph}{2} \right) \right]^{a/2} \exp(-ijph) = \tilde{a}_j^{(a)}.$$

1.2 算子分裂法求解分数阶 Allen-Cahn 方程

取空间节点数为  $N$ ,空间步长为  $h = \frac{b-a}{N}$ ,空间节点表示为  $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \cdots, N$ . 对时间进行  $M$  等分,时间步长为  $\tau = \frac{T}{M}$ ,时间节点表达式为  $t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \cdots, M$ ,记  $u_j^k = u(x_j, t_k)$ . 将分数阶 Allen-Cahn 方程分解为非线性问题  $S^A$  和分数阶热传导问题  $S^B$  两个子问题,分别为

$$S^A: u_t = -\frac{1}{\epsilon} u(u^2 - 1), \tag{11}$$

$$S^B: u_t = (-\Delta)^{a/2} u. \tag{12}$$

在前半个时间步长  $t \in [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}]$  内,求解  $S^A$  问题;然后,在一个完整的时间步长  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  内,求解  $S^B$  问题;最后,在后半个时间步长  $t \in [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}]$  内,再次求解  $S^A$  问题,即

$$u(t+\tau) = S^A \left( \frac{\tau}{2} \right) S^B(\tau) S^A \left( \frac{\tau}{2} \right) u(t) + O(\tau^2). \tag{13}$$

非线性方程问题  $S^A$  可利用解析形式求解,即

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{\mathbf{u}^k}{\sqrt{\exp(-2\tau/\epsilon^2) + (\mathbf{u}^k)^2 (1 - \exp(-2\tau/\epsilon^2))}}. \tag{14}$$

对于分数阶热传导方程问题  $S^B$ ,用 Crank-Nicolson 格式进行离散. 有

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{1}{2} ((-\Delta_h)^{a/2}) u_j^{k+1} + ((-\Delta_h)^{a/2}) u_j^k. \tag{15}$$

整理可得

$$u_j^{k+1} = \left( 1 + \frac{\tau}{2} (-\Delta_h)^{a/2} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\tau}{2} (-\Delta_h)^{a/2} \right) u_j^k. \tag{16}$$

将式(16)改写为矩阵形式,即

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left( \mathbf{I} + \frac{\tau}{2h^a} \mathbf{G} \right)^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{\tau}{2h^a} \mathbf{G} \right) \mathbf{u}^k. \tag{17}$$

式(17)中:  $\mathbf{u}^k = (u_1^k \quad u_2^k \quad \cdots \quad u_{N-1}^k)'$  为第  $k$  层的数值解;  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

结合式(13)~(17),可得出求解问题(1)的差分格式,即

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{u}^{k+1,(1)} &= \frac{\boldsymbol{u}^k}{\sqrt{\exp(-\tau/\epsilon^2) + (\boldsymbol{u}^k)^2(1 - \exp(-\tau/\epsilon^2))}}, \\ \boldsymbol{u}^{k+1,(2)} &= \left(\boldsymbol{I} + \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{u}^{k+1,(1)}, \\ \boldsymbol{u}^{k+1} &= \frac{\boldsymbol{u}^{k+1,(2)}}{\sqrt{\exp(-\tau/\epsilon^2) + (\boldsymbol{u}^{k+1,(2)})^2(1 - \exp(-\tau/\epsilon^2))}}. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$\boldsymbol{U}_w^k$  为式(18)的解,且  $\boldsymbol{U}_w^k = \frac{4}{3}\hat{\boldsymbol{u}}^k - \frac{1}{3}\boldsymbol{u}^k$ . 其中,  $\boldsymbol{u}^k$  表示  $x$  方向空间剖分为  $N$  时,第  $k$  个时间层的数值解; $\hat{\boldsymbol{u}}^k$  表示  $x$  方向空间剖分为  $2N$  时第  $k$  个时间层的数值解.

2 稳定性分析和误差估计

**定理 1** 对任意的空间步长  $h$  和时间步长  $\tau$ ,差分格式(17)是无条件能量稳定的.

证明:令  $\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)$ , 设  $\lambda_i (i=1,2,\cdots,N-1)$  为系数矩阵  $\boldsymbol{G}$  的特征值,由于  $\boldsymbol{G}$  是一个正定矩阵<sup>[18]</sup>,则特征值  $\lambda_i \geq 0$ ,从而  $\boldsymbol{P}$  的特征值  $|\lambda(\boldsymbol{P})| = \left|\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right| \leq 1$ ,故由稳定性条件可知,差分格式(17)是无条件稳定的. 证明完毕.

记  $\tilde{u}(x,t)$  为式(13)的精确解,定义网格函数空间  $\boldsymbol{\Pi}^h = \{\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{U} = \{u_j \mid 0 < j < N-1\}\}$ .

**引理 2** 对任意网格函数  $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{\Pi}^h$ , 有  $\left\|S_h^A\left(\frac{\tau}{2}\right)\boldsymbol{U}\right\| \leq \exp\left(\frac{\tau}{2\epsilon^2}\right)\|\boldsymbol{U}\|$ ,  $\|\cdot\|$  表示离散意义下  $L^2$  范数.

证明:由式(18)中第 1 个等式,可得

$$|u_j^{k+1,(1)}| = \frac{|u_j^k|}{\sqrt{\exp(-\tau/\epsilon^2) + (u_j^k)^2(1 - \exp(-\tau/\epsilon^2))}} \leq \frac{|u_j^k|}{\sqrt{\exp(-\tau/\epsilon^2)}} = \exp(-\tau/(2\epsilon^2))|u_j^k|.$$

即  $\|\boldsymbol{U}^{k+1,(1)}\| \leq \exp(\tau/(2\epsilon^2))\|\boldsymbol{U}^k\|$ . 证明完毕.

**引理 3** 对于任意的网格函数  $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{\Pi}^h$ , 有  $\|S_h^B(\tau)\boldsymbol{U}\| \leq \|\boldsymbol{U}\|$ .

证明:由式(18)中第 2 个等式,可得

$$\|\boldsymbol{U}^{k+1,(2)}\| \leq \left\|\left(\boldsymbol{I} + \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{U}^{k+1,(1)}\right\| \leq \left\|\left(\boldsymbol{I} + \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\tau}{2h^a}\boldsymbol{G}\right)\right\|\|\boldsymbol{U}^{k+1,(1)}\| \leq \|\boldsymbol{U}^{k+1,(1)}\|.$$

由定理 1 可知第 2 个不等号成立. 证明完毕.

**定理 2** 对于任意  $h > 0, \tau > 0$ ,差分格式(18)是无条件稳定的,且满足  $\|\boldsymbol{U}^{k+1}\| \leq \exp(T/(2\epsilon^2))\|\boldsymbol{U}^0\|$ .

证明:由引理 2,3,可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{U}^{k+1}\| &= \left\|S_h^A\left(\frac{\tau}{2}\right)S_h^B(\tau)S_h^A\left(\frac{\tau}{2}\right)\boldsymbol{U}^k\right\| \leq \exp(\tau/(2\epsilon^2))\left\|S_h^B(\tau)S_h^A\left(\frac{\tau}{2}\right)\boldsymbol{U}^k\right\| \leq \\ &\exp(\tau/(2\epsilon^2))\left\|S_h^A\left(\frac{\tau}{2}\right)\boldsymbol{U}^k\right\| \leq \exp(\tau/\epsilon^2)\|\boldsymbol{U}^k\| \leq \exp(T/\epsilon^2)\|\boldsymbol{U}^0\|. \end{aligned}$$

$T$  为最终的时间. 证明完毕.

定义映射  $\mathcal{J}^h: H_D \rightarrow \boldsymbol{\Pi}^h$ , 有  $\mathcal{J}^h(u) = \boldsymbol{U}$ , 其中,  $H_D = \{u \in H \mid u(a) = 0, u(b) = 0\}$ .

**引理 4** 对任意的函数  $\boldsymbol{u}_0 \in H_D$ , 有  $\|\mathcal{J}^h S_h^A \boldsymbol{u}_0 - S_h^A \mathcal{J}^h \boldsymbol{u}_0\| \leq C\tau(\tau^2 + h^\gamma)$ .

证明:由式(5)和 Crank-Nicolson 格式可知,不等式成立. 证明完毕.

**定理 3** 设  $\boldsymbol{u}^{k+1}$  是式(1)精确解,则存在与  $\tau$  和  $h$  无关的常数  $C$ ,使  $\|\mathcal{J}^h \boldsymbol{u}^{k+1} - \boldsymbol{U}^{k+1}\| \leq C(\tau^2 + h^\gamma)$ .

证明:对  $k > 0$ , 有  $\|\mathcal{J}^h \boldsymbol{u}^{k+1} - \boldsymbol{U}^{k+1}\| \leq \|\mathcal{J}^h \boldsymbol{u}^{k+1} - \mathcal{J}^h \tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1}\| + \|\mathcal{J}^h \tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1} - \boldsymbol{U}^{k+1}\|$ . 由 Strang 分裂误差<sup>[19]</sup>, 可知  $\|\mathcal{J}^h \boldsymbol{u}^{k+1} - \mathcal{J}^h \tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1}\| \leq C_1 \tau^3$ . 由引理 2,4,可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}^h \tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1} - \boldsymbol{U}^{k+1}\| &= \|\mathcal{J}^h S^A S^B S^A \tilde{\boldsymbol{u}}^k - S_h^A S_h^B S_h^A \boldsymbol{U}^k\| \leq \\ &\|\mathcal{J}^h S^A S^B S^A \tilde{\boldsymbol{u}}^k - S_h^A \mathcal{J}^h S_h^B S_h^A \tilde{\boldsymbol{u}}^k\| + \|S_h^A \mathcal{J}^h S_h^B S_h^A \tilde{\boldsymbol{u}}^k - S_h^A S_h^B S_h^A \boldsymbol{U}^k\| \leq \\ &C_2 \tau(\tau^2 + h^\gamma) + \exp(\tau/(2\epsilon^2))\|\mathcal{J}^h S_h^B S_h^A \tilde{\boldsymbol{u}}^k - S_h^B S_h^A \boldsymbol{U}^k\|. \end{aligned}$$

由引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^h S_h^B S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^B S_h^A \mathbf{U}^k\| &\leq \|\mathcal{P}^h S_h^B S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^B \mathcal{P}^h S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k\| + \|S_h^B \mathcal{P}^h S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^B S_h^A \mathbf{U}^k\| \leq \\ &\|\mathcal{P}^h S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^A \mathbf{U}^k\|. \end{aligned}$$

再次应用引理 2, 4, 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^h S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^A \mathbf{U}^k\| &\leq \|\mathcal{P}^h S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^A \mathcal{P}^h \tilde{\mathbf{u}}^k\| + \|S_h^A \mathcal{P}^h \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^A \mathbf{U}^k\| \leq \\ &C_3 \tau (\tau^2 + h^\gamma) + \exp(\frac{\tau}{2\epsilon^2}) \|\mathcal{P}^h \tilde{\mathbf{u}}^k - \mathbf{U}^k\|. \end{aligned}$$

综上, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^h \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{U}^{k+1}\| &\leq C_1 \tau^3 + C_2 \tau (\tau^2 + h^\gamma) + \exp(\tau/(2\epsilon^2)) \|\mathcal{P}^h S_h^B S_h^A \tilde{\mathbf{u}}^k - S_h^B S_h^A \mathbf{U}^k\| \leq \\ &C_1 \tau^3 + C_4 \tau (\tau^2 + h^\gamma) + \exp(T/(2\epsilon^2)) \|\mathcal{P}^h \tilde{\mathbf{u}}^0 - \mathbf{U}^0\| \leq C(\tau^2 + h^\gamma). \end{aligned}$$

因为  $\mathcal{P}^h \tilde{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{U}^0$ , 则最后一个不等号成立. 证明完毕.

3 数值算例

3.1 算例 1

定义  $L_\infty$  误差和  $L_2$  误差分别为  $\text{Err}_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |\mathbf{U}_w|, \text{Err}_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}_w)_j^2}$ . 初值为

$$u(x) = 0.1 \sin(2x) \cos\left(\frac{3}{2}x\right), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

空间收敛阶的验证. 将时间剖分固定为  $M=5\,000$ , 取  $\epsilon=0.1, T=2$ , 计算  $\alpha=1.3, 1.5, 1.8$  时的数值结果. 空间收敛阶, 如表 1 所示. 表 1 中:  $\eta$  为收敛阶. 由表 1 可知: 随着网格剖分变细,  $\text{Err}_2$  与  $\text{Err}_\infty$  变得越来越小, 在空间上可达到二阶精度; 随着  $\alpha$  的增加,  $\text{Err}_2$  与  $\text{Err}_\infty$  也变得越来越小.

表 1 空间收敛阶

Tab. 1 Spatial convergence order

$N$	$\alpha=1.3$				$\alpha=1.5$				$\alpha=1.8$			
	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$
200	$7.31 \times 10^{-1}$	—	1.44	—	$5.18 \times 10^{-3}$	—	$1.30 \times 10^{-2}$	—	$2.43 \times 10^{-3}$	—	$4.43 \times 10^{-3}$	—
400	$5.42 \times 10^{-2}$	3.75	$1.21 \times 10^{-1}$	3.56	$1.23 \times 10^{-3}$	2.07	$3.02 \times 10^{-3}$	2.11	$5.94 \times 10^{-4}$	2.03	$1.08 \times 10^{-3}$	2.03
800	$1.34 \times 10^{-2}$	2.01	$3.05 \times 10^{-2}$	1.99	$3.03 \times 10^{-4}$	2.02	$7.38 \times 10^{-4}$	2.03	$1.47 \times 10^{-4}$	2.00	$2.68 \times 10^{-4}$	2.00
1 600	$3.36 \times 10^{-3}$	2.00	$7.58 \times 10^{-3}$	2.00	$7.54 \times 10^{-5}$	2.00	$1.83 \times 10^{-4}$	2.00	$3.69 \times 10^{-5}$	2.00	$6.73 \times 10^{-5}$	1.99

时间收敛阶的验证. 将空间剖分固定为  $N=1\,000$ , 取  $\epsilon=0.1, T=2$ , 计算  $\alpha=1.3, 1.5, 1.8$  时的数值结果. 时间收敛阶, 如表 2 所示. 由表 2 可知: 随着网格剖分变细,  $\text{Err}_2$  与  $\text{Err}_\infty$  变得越来越小, 在时间上也可达到二阶精度.

表 2 时间收敛阶

Tab. 2 Time convergence order

$N$	$\alpha=1.3$				$\alpha=1.5$				$\alpha=1.8$			
	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$	$\text{Err}_2$	$\eta$	$\text{Err}_\infty$	$\eta$
640	$1.83 \times 10^{-1}$	—	$3.26 \times 10^{-2}$	—	$3.42 \times 10^{-3}$	—	$7.43 \times 10^{-4}$	—	4.82	—	1.41	—
1 280	$4.49 \times 10^{-2}$	2.02	$8.02 \times 10^{-3}$	2.02	$8.55 \times 10^{-4}$	1.99	$1.86 \times 10^{-4}$	1.99	$7.69 \times 10^{-1}$	2.64	$2.12 \times 10^{-1}$	2.73
2 560	$1.12 \times 10^{-2}$	2.00	$1.99 \times 10^{-3}$	2.00	$2.14 \times 10^{-4}$	1.99	$4.65 \times 10^{-5}$	1.99	$2.56 \times 10^{-41}$	11.55	$4.42 \times 10^{-5}$	12.22
5 120	$2.79 \times 10^{-3}$	2.00	$4.98 \times 10^{-4}$	2.00	$5.35 \times 10^{-5}$	1.99	$1.16 \times 10^{-5}$	1.99	$6.41 \times 10^{-5}$	1.99	$1.10 \times 10^{-5}$	1.99
10 240	$6.98 \times 10^{-4}$	2.00	$1.24 \times 10^{-4}$	2.00	$1.33 \times 10^{-5}$	2.00	$2.90 \times 10^{-6}$	2.00	$1.60 \times 10^{-5}$	2.00	$2.76 \times 10^{-6}$	2.00

3.2 算例 2

现将能量函数  $E(u)$  进行离散, 可得

$$E^h(\mathbf{u}^k) = \frac{h}{4\epsilon^2} \sum_{i=0}^N [(u_j^k)^2 - 1]^2 + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^N u_j^k \bar{u}_j^k.$$

上式中:  $\bar{u}_j^k = G(:, j) \cdot \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k$  为第  $k$  层数值解.

考虑初值问题

$$u(x)=0.1\tanh(x)\cos\left(\frac{3}{2}x\right),\quad x\in[-\pi,\pi].$$

取 Dirichlet 边界条件,参数为  $\varepsilon=0.1,T=40,N=1\,600,M=10^5$ ,得到  $\alpha$  为 1.3,1.5,1.8 的数值解和能量变化图像,分别如图 1~6 所示.

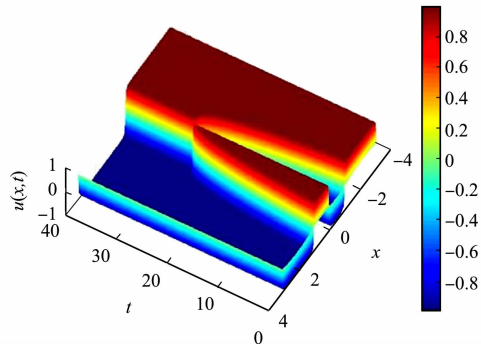


图 1 算例 2 的数值解图像( $\alpha=1.3$ )

Fig. 1 Numerical solution image of example 2 ( $\alpha=1.3$ )

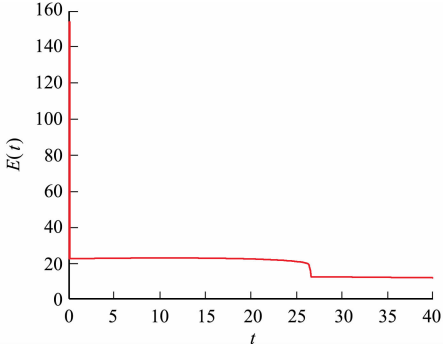


图 2 算例 2 的能量变化图像( $\alpha=1.3$ )

Fig. 2 Energy change image of example 2 ( $\alpha=1.3$ )

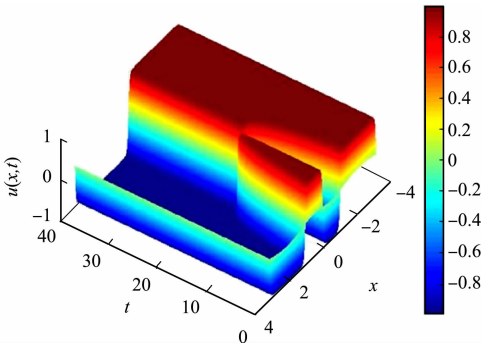


图 3 算例 2 的数值解图像( $\alpha=1.5$ )

Fig. 3 Numerical solution image of example 2 ( $\alpha=1.5$ )

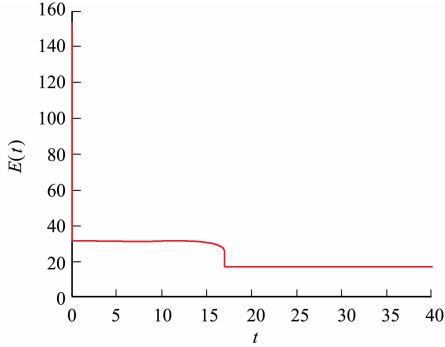


图 4 算例 2 的能量变化图像( $\alpha=1.5$ )

Fig. 4 Energy change image of example 2 ( $\alpha=1.5$ )

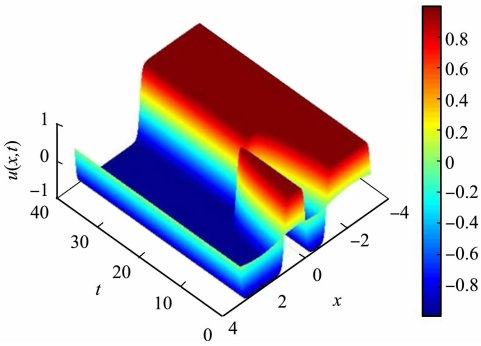


图 5 算例 2 的数值解图像( $\alpha=1.8$ )

Fig. 5 Numerical solution image of example 2 ( $\alpha=1.8$ )

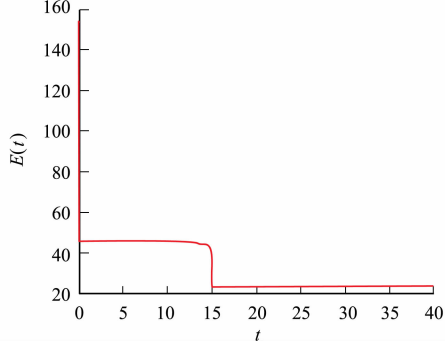


图 6 算例 2 的能量变化图像( $\alpha=1.8$ )

Fig. 6 Energy change image of example 2 ( $\alpha=1.8$ )

由图 1~6 可知:能量函数  $E(t)$  随着时间  $t$  的增加而减小,即能量泛函  $E(t)$  满足能量递减; $\alpha$  越大,分数阶 Allen-Cahn 方程的能量衰减越快.由此验证了此算法的有效性.

4 结束语

提出了求解分数阶 Allen-Cahn 方程的生成函数法. 首先,利用算子分裂法将原方程分解为非线性问题和分数阶热传导问题,非线性问题可求出精确解,分数阶热传导问题则利用生成函数法结合 Crank-Nicolson 格式建立二阶差分格式求解;其次,给出了稳定性和收敛性分析;最后,通过两组数值算例验证了差分格式的有效性.

## 参考文献:

- [1] 汪精英,邓杨芳,翟术英.利用 Laplace 变换求解分数阶 Allen-Cahn 方程[J].华侨大学学报(自然科学版),2020,41(4):549-554. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201910013.
- [2] QIAO Yuanyang,ZHAI Shuying,FENG Xinlong. An operator splitting method for image inpainting based on the Allen-Cahn equation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2018,35(6):722-732. DOI:10.3969/j.issn.1005-3085.2018.06.011.
- [3] WHEELER A A,BOETTINGER W J,MCFADDEN G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys[J]. Physical Review A,1992,45(10):7424-7439. DOI:10.1103/physrev.45.7424.
- [4] CHEN Hao,SUN Haiwei. A dimensional splitting exponential time differencing scheme for multidimensional fractional Allen-Cahn equations[J]. Journal of Scientific Computing,2021,87(1):30-55. DOI:10.1007/s10915-021-01431-0.
- [5] LI Huanrong,SONG Zhengyuan. A reduced-order finite element method based on proper orthogonal decomposition for the Allen-Cahn model[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,500(2):1261-1272. DOI:10.1016/j.jmaa.2021.125103.
- [6] 王郭振. 分数阶 Allen-Cahn 方程的有限元模拟及其理论分析[D]. 济南:山东师范大学,2020.
- [7] 吴龙渊,汪精英,翟术英. 求解二维 Allen-Cahn 方程的两种 ADI 格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2019,40(3):412-420. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201810014.
- [8] ZHAI Shuying,FENG Xinlong,HE Yinnian. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by the high-order compact ADI method[J]. Computer Physics Communications,2014,185(10):2449-2445. DOI:10.1016/j.cpc.2014.05.017.
- [9] CHEN Wenping,LU Shujuan,HU Chen,*et al.* Crank-Nicolson Legendre spectral approximation for space-fractional Allen-Cahn equation[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2019,2019(76):1-17.
- [10] KHALID N,ABBAS M,IQBAL M K,*et al.* A numerical investigation of Caputo time fractional Allen-Cahn equation using redefined cubic B-spline functions[J]. Advances in Difference Equations,2020,2020(1):1-22. DOI:10.1186/s13662-020-02616-x.
- [11] 翁智峰,姚泽丰,赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2019,40(1):133-140. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201701004.
- [12] CHEN Aimin,LIU Fawang. A finite volume unstructured mesh method for fractional-in-space Allen-Cahn equation[J]. Chin Quart J of Math,2017,32(4):345-354. DOI:10.13371/j.cnki.chin.q.j.m.2017.04.002.
- [13] LI Can,LIU Shuming. Local discontinuous Galerkin scheme for space fractional Allen-Cahn equation[J]. Communications on Applied Mathematics and Computation,2020,2(1):73-91. DOI:10.1007/s42967-019-00034-9.
- [14] WANG Guozhen,CHEN Huanzhen. Efficient implementation and numerical analysis of finite element method for fractional Allen-Cahn equation[J]. Mathematical Problems in Engineering,2019(4):1-14. DOI:10.1155/2019/7969371.
- [15] WENG Zhifeng,TANG Longkun. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals,2016,70(5):472-483. DOI:10.1080/10407790.2016.1215714.
- [16] ZHAI Shuying,WENG Zhifeng,FENG Xinlong. Fast explicit operator splitting method and time-step adaptivity for fractional non-local Allen-Cahn model[J]. Applied Mathematical Modelling,2016,40(2):1315-1324. DOI:10.1016/j.apm.2015.07.021.
- [17] CHEN Feng,SHEN Jie. Stability and error analysis of operator splitting methods for american options under the black-scholes model[J]. Journal of Scientific Computing,2020,82(2):33-50. DOI:10.1007/s10915-020-01137-9.
- [18] HAO Zhaopeng,ZHANG Zhongqiang,DU Rui. Fractional centered difference scheme for high-dimensional integral fractional Laplacian[J]. Journal of Computational Physics,2021,424:109851. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109851.
- [19] STRANG G. On the construction and comparison of difference schemes[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis,1968,5(3):506-517. DOI:10.1137/0705041.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)