

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202107008



# 非局部守恒 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂格式

崔晨, 吴哲, 翟术英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 研究带有拉格朗日乘子的非局部守恒 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂格式. 基于算子分裂思想, 将原方程分解为非线性方程、非局部方程和拉格朗日乘子方程; 然后, 利用非线性方程解析求解, 非局部方程结合矩形公式及 Crank-Nicolson 格式建立二阶差分格式, 利用拉格朗日乘子方程进行数值积分离散. 理论分析表明: 数值格式满足质量守恒. 最后, 通过数值算例验证算法的有效性, 包括收敛阶、能量递减及质量守恒.

**关键词:** 非局部 Allen-Cahn 方程; 拉格朗日乘子; 算子分裂方法; 质量守恒

**中图分类号:** O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2022)05-0698-07

## Effective Operator Splitting Scheme for Conservative Nonlocal Allen-Cahn Equation

CUI Chen, WU Zhe, ZHAI Shuying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** An effective operator splitting scheme for solving the nonlocal Allen-Cahn equation with a Lagrange multiplier is studied, based on the operator splitting method, the original equation is discretized respectively into a nonlinear equation, a nonlocal equation and a Lagrange multiplier equation. Then, the nonlinear equation is solved analytically; the nonlocal equation is discretized using rectangle formula and Crank-Nicolson format, and Lagrange multiplier equation is discretized using trapezoidal formulas. The theoretical results show that the proposed scheme satisfies mass conservation. Numerical experiments demonstrate the validity of the proposed method, including convergence order, energy decline and mass conservation.

**Keywords:** nonlocal Allen-Cahn equation; Lagrange multiplier; operator splitting method; mass conservation

### 1 预备知识

近年来, 带有非局部算子的 Allen-Cahn 方程等相场模型引起了广泛的关注, 且在数学、物理、力学、图像处理和材料科学等领域得到了成功的应用. 例如, 相变<sup>[1]</sup>、近场动力学理论<sup>[2]</sup>、图像修复<sup>[3]</sup>和非局部热传导<sup>[4]</sup>. 由于经典的 Allen-Cahn 方程不保持其初始质量, Rubinstein 等<sup>[5]</sup>提出了一个守恒型的 Allen-Cahn 方程, 这个问题与相变的扩散界面模型有密切的关系; 随后他们的模型在文献[6]中得到了广泛的分析和数值研究.

文中, 考虑如下带有周期边界条件的非局部 Allen-Cahn 方程, 即

**收稿日期:** 2021-07-06

**通信作者:** 翟术英(1986-), 女, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解及理论的研究. E-mail: zhaishuying123456@163.com.

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11701196); 福建省自然科学基金资助项目(2020J01074)

$$\begin{cases} u_t + \epsilon^2 \mathcal{L}_\delta u + f(u) - \beta(u) = 0, & x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中:  $\epsilon > 0$  表示与界面厚度相关的一个参数;  $\Omega = [-L, L]$  是一个有界区域. 函数  $f(u) = F'(u)$ ,  $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$  是一个双井势函数,  $\beta(u)$  是为满足质量约束  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = 0$  的拉格朗日乘子, 文中取  $\beta(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) dx$ .  $\mathcal{L}_\delta$  为非局部算子<sup>[7]</sup>, 定义为

$$\mathcal{L}_\delta u(x) = \int_{\Omega} J(x-y)[u(x) - u(y)] dy, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2)$$

式(2)中: 卷积核  $J$  满足 i)  $J(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ ; ii)  $J(x-y) = J(y-x)$ ; iii)  $J$  是  $\Omega$  周期的.

非局部 Allen-Cahn 方程(1)可以看作能量泛函的  $L_2$  梯度流<sup>[8]</sup>, 即

$$E(u) = \int_{\Omega} \left( F(u) + \frac{\epsilon^2}{2} u(x) \mathcal{L}_\delta u(x) \right) dx, \quad (3)$$

对能量泛函  $E(u)$  关于时间  $t$  求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{du}{dt} dx = \int_{\Omega} \left( -\frac{du}{dt} + \beta(u) \right) \frac{du}{dt} dx = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx + \beta(u) \int_{\Omega} \frac{du}{dt} dx = - \int_{\Omega} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

由上述推导可知, 能量泛函  $E(u)$  是非增的.

与经典 Allen-Cahn 方程<sup>[9-12]</sup>的大量研究相比, 非局部 Allen-Cahn 方程的数值结果较少. 额外的非局部项给开发快速有效的算法带来了巨大的数值挑战, 因此许多学者致力于这一方面的研究. Du 等<sup>[13]</sup>研究了非局部 Allen-Cahn 问题的傅里叶谱逼近; Zhai 等<sup>[14-15]</sup>结合谱方法和解析法, 研究了分数阶非局部 Allen-Cahn 模型的快速显式算子分裂方法; Weng 等<sup>[16]</sup>对此方法进行进一步推广, 并给出了误差分析; Liu 等<sup>[17]</sup>研究了几类非局部和分数阶模型的数值分析及快速算法; Guan 等<sup>[18]</sup>研究了非局部 Allen-Cahn 和 Cahn-Hilliard 方程的二阶凸分裂格式, 且利用非线性多重网格方法求解离散产生的非线性方程; Tian 等<sup>[19]</sup>对非局部扩散方程的不同逼近形式做了比较并给出理论分析.

鉴于此, 本文给出求解守恒型非局部 Allen-Cahn 方程的数值格式及质量守恒定理, 并通过两个数值算例验证算法的有效性.

## 2 数值格式

考虑一维空间区域  $\Omega = [-L, L]$  上的全离散格式. 为了便于离散, 定义空间节点数为  $N$ , 空间步长  $h = 2L/N$ , 则空间节点为  $x_i = -L + ih, i = 0, 1, \dots, N$ . 取时间节点数  $M$ , 时间步长  $\tau = T/M$ , 则时间节点为  $t_m = m\tau, m = 0, 1, \dots, M$ .  $u_i^m, u(x_i, t_m)$  分别代表数值解和精确解.

### 2.1 非局部算子的离散格式

首先, 从文献[20]关于非局部算子  $\mathcal{L}_\delta$  的分析, 可将算子  $\mathcal{L}_\delta$  转化为卷积形式. 对于任意函数  $u(x, t)$ , 有

$$\mathcal{L}_\delta u(x, t) = (J * 1)u(x, t) - J * u(x, t). \quad (5)$$

于是, 可将  $\mathcal{L}_\delta u$  在点  $(x_i, t^m), (0 \leq i \leq N, 0 \leq m \leq M)$  处离散为

$$(\mathcal{L}_\delta u)_i^m = (J * 1)_i u_i^m - (J * u)_i^m, \quad (6)$$

式(6)中:  $(J * 1)_i = \int_{-L}^L J(x_i - y) dy; (J * u)_i = \int_{-L}^L J(x_i - y) u(y) dy$ . 则有

$$\begin{aligned} (J * u)_i &= \int_{-L}^L J(x_i - y) u(y) dy = \int_{y_0}^{y_1} J(x_i - y) u(y) dy + \\ &= \int_{y_1}^{y_2} J(x_i - y) u(y) dy + \dots + \int_{y_{N-1}}^{y_N} J(x_i - y) u(y) dy = \\ &= \frac{h}{2} [J(x_i - y_0) u_0 + J(x_i - y_1) u_1] + \frac{h}{2} [J(x_i - y_1) u_1 + \end{aligned}$$

$$J(x_i - y_2)u_2] + \cdots + \frac{h}{2}[J(x_i - y_{N-1})u_{N-1} + J(x_i - y_N)u_N] =$$
$$\frac{h}{2}J(x_i - y_0)u_0 + h\sum_{j=1}^{N-1}J(x_i - y_j)u_j + \frac{h}{2}J(x_i - y_N)u_N, \tag{7}$$

$$(J * 1)_i u_i^m = \left[ \frac{h}{2}J(x_i - y_0) + h\sum_{j=1}^{N-1}J(x_i - y_j) + \frac{h}{2}J(x_i - y_N) \right] u_i^m. \tag{8}$$

因此,针对任意的  $N+1$  阶向量  $\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_{N-1},u_N)^T$ , 有

$$\mathcal{L}_\delta \boldsymbol{u} = -h \times$$
$$\begin{pmatrix} * _1 & J(h) & J(2h) & \cdots & J((N-1)h) & \frac{1}{2}J(Nh) \\ \frac{1}{2}J(h) & * _2 & J(h) & \cdots & J((N-2)h) & \frac{1}{2}J((N-1)h) \\ \frac{1}{2}J(2h) & J(h) & * _3 & \cdots & J((N-3)h) & \frac{1}{2}J((N-2)h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}J((N-1)h) & J((N-2)h) & J((N-3)h) & \cdots & * _N & \frac{1}{2}J(h) \\ \frac{1}{2}J(Nh) & J((N-1)h) & J((N-2)h) & \cdots & J(h) & * _{N+1} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{9}$$

式(9)中:  $* _i$  的值为所在行其余值和的相反数.

2.2 算子分裂法求解非局部 Allen-Cahn 方程

采用算子分裂方法求解问题(1), 可将一个较为复杂的算子分裂为几个简单的子算子之积. 采用一阶精度的 Lie-Trotter 算子分裂格式, 将原始方程分裂成非线性方程  $S^A: u_t = -f(u)$ 、非局部方程  $S^B: u_t = -\epsilon^2 L_\delta u(x)$  和拉格朗日乘子方程  $S^C: u_t = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(u) dx$  等 3 个部分, 其解算子分别记为  $S^A, S^B$  和  $S^C$ . 因此, 问题(1)在时间方向可通过以下 3 步求解, 即

$$u(t+\tau) = S^A(t)S^B(t)S^C(t)u(t) + O(\tau). \tag{10}$$

式(10)中: 非线性方程解析求解, 非局部方程利用 C-N 格式求解, 拉格朗日乘子方程利用数值积分求解, 从而得到简单高效的数值格式.

非线性方程  $S^A$  可通过解析式得到, 即

$$\boldsymbol{u}^{m+1,1} = \frac{\boldsymbol{u}^m}{\sqrt{\exp(-2\tau/\epsilon^2) + (\boldsymbol{u}^m)^2(1 - \exp(-2\tau/\epsilon^2))}}. \tag{11}$$

式(11)中:  $\boldsymbol{u}^m$  表示第  $m$  层数值解.

利用 C-N 格式求解非局部方程  $S^B$  的数值解  $u_i^{m+1,2}$ , 则有

$$\frac{u_i^{m+1,2} - u_i^{m+1,1}}{\tau} = -\frac{1}{2}\epsilon^2 (\mathcal{L}_\delta u_i^{m+1,2} + \mathcal{L}_\delta u_i^{m+1,1}). \tag{12}$$

对上述等式进行整理, 并写成矩阵形式有

$$\boldsymbol{u}^{m+1,2} = \left( \boldsymbol{I} + \frac{\tau}{2}\epsilon^2 \mathcal{L}_\delta \right)^{-1} \left( \boldsymbol{I} - \frac{\tau}{2}\epsilon^2 \mathcal{L}_\delta \right) \boldsymbol{u}^{m+1,1}. \tag{13}$$

式(13)中:  $\boldsymbol{I}$  表示单位矩阵.

拉格朗日乘子方程  $S^C$  可通过数值积分离散为

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^{m+1,2}}{\tau} = \frac{1}{|\Omega|} C_F^{m+1}(u), \tag{14}$$

式(14)中:  $C_F^{m+1}(u) = \frac{h}{2}f(u_0^{m+1}) + h\sum_{i=1}^{N-1}f(u_i^{m+1}) + \frac{h}{2}f(u_N^{m+1})$ . 将式(14)两边对  $i$  求和可得

$$C_F^{m+1}(u) = \frac{h}{\tau} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1} - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right], \tag{15}$$

再运用质量守恒  $\sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1}$  的性质, 有

$$C_F^{m+1}(u) = \frac{h}{\tau} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right]. \tag{16}$$

将式(16)代入式(14), 可得

$$u_i^{m+1} = u_i^{m+1,2} + \frac{h}{|\Omega|} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right]. \tag{17}$$

结合等式(11), (13), (17), 可获得算子分裂格式为

$$\left. \begin{aligned} u^{m+1,1} &= \frac{u^m}{\sqrt{\exp(-2\tau/\epsilon^2) + (u^m)^2(1 - \exp(-2\tau/\epsilon^2))}}, \\ u^{m+1,2} &= (I + \frac{\tau}{2}\epsilon^2 \mathcal{L}_\delta)^{-1} \left( I - \frac{\tau}{2}\epsilon^2 \mathcal{L}_\delta \right) u^{m+1,1}, \\ u^{m+1} &= u^{m+1,2} + \frac{h}{|\Omega|} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

另外, 定义离散的内积  $(f, g) := h \sum_{i=0}^{N-1} f_i g_i$ , 可证明如下的质量守恒定理.

**定理 1** 格式(18)满足离散的质量守恒定理,  $u^k = u^0, k=1, 2, \dots, M$ . 这里,  $u^k = h \sum_{i=0}^{N-1} u_i^m$ .

证明: 方程(18)的第 3 个式子与  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  作内积, 并对  $i$  求和, 可得

$$\begin{aligned} (u^{m+1}, e) &= (u^{m+1,2}, e) + \left( \frac{h}{|\Omega|} \left( \sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right), e \right) = \\ &= (u^{m+1,2}, e) + h \left( \sum_{i=0}^{N-1} u_i^0 - \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{m+1,2} \right) = \\ &= (u^{m+1,2}, e) + (u^0, e) - (u^{m+1,2}, e) = (u^0, e). \end{aligned} \tag{19}$$

3 数值算例

通过数值算例来验证理论分析的正确性, 包括数值格式的收敛性、能量稳定性、质量守恒等. 所有的算例均选择空间区域  $\Omega = [-1, 1]$ , 高斯核  $J$  由下列等式给出<sup>[20]</sup>, 即

$$J(x) = \frac{4}{\pi^{1/2} \delta^3} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{\delta^2}\right), \quad \delta > 0. \tag{20}$$

为方便分析, 定义  $e_i^k = u_i^k - \hat{u}_i^k$ , 其中,  $e_i^k$  表示空间剖分为  $N$  时, 对应位置上函数  $u$  的值;  $\hat{e}_i^k$  表示空间剖分为  $2N$  时对应位置上函数  $u$  的值, 定义最大误差  $E_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_i^k|$ ,  $L_2$  误差  $E_2 = h \sqrt{\sum_{i=1}^N (e_i^k)^2}$ .

3.1 算例 1

取初值  $u_0(x) = 0.1 \cos(2\pi x), x \in [-1, 1]$ . 为验证空间收敛阶, 将时间剖分固定为  $M=3000$ . 计算当  $\epsilon=0.1, \delta=0.5, T=1$  时, 不同  $N$  值的空间收敛阶, 如表 1 所示. 由表 1 可知: 随着网格剖分变细,  $E_2$  及  $E_\infty$  变得越来越小, 且收敛精度逐渐接近预期的二阶收敛.

表 1 空间收敛阶( $\epsilon=0.1, \delta=0.5, T=1, M=3\ 000$ )

Tab. 1 Spatial convergence order of different schemes ( $\epsilon=0.1, \delta=0.5, T=1, M=3\ 000$ )

N	$E_2$	Rate	$E_\infty$	Rate
10	$2.875 \times 10^{-4}$	—	$3.559 \times 10^{-4}$	—
20	$6.483 \times 10^{-5}$	2.149	$8.148 \times 10^{-5}$	2.127
40	$1.601 \times 10^{-5}$	2.017	$2.032 \times 10^{-5}$	2.004
80	$3.992 \times 10^{-6}$	2.004	$5.093 \times 10^{-6}$	1.996
160	$9.972 \times 10^{-7}$	2.001	$1.272 \times 10^{-6}$	2.001

将空间剖分固定为  $N=3000$ , 计算当  $\epsilon=0.1, \delta=0.50, T=1$  时, 不同  $M$  值的时间收敛阶, 如表 2 所示. 由表 2 可知: 随着网格剖分变细,  $E_2$  与  $E_\infty$  均变得越来越小, 且此方法在时间上达到一阶精度.

表 2 时间收敛阶( $\epsilon=0.1, \delta=0.50, T=1, N=3\ 000$ )

Tab. 2 Spatial convergence order of different schemes ( $\epsilon=0.1, \delta=0.5, T=1, N=3\ 000$ )

M	$E_2$	Rate	$E_\infty$	Rate
10	$1.200 \times 10^{-3}$	—	$4.515 \times 10^{-5}$	—
20	$5.852 \times 10^{-4}$	1.046	$2.186 \times 10^{-5}$	1.046
40	$2.878 \times 10^{-4}$	1.023	$1.075 \times 10^{-5}$	1.024
80	$1.428 \times 10^{-4}$	1.012	$5.334 \times 10^{-6}$	1.012
160	$7.111 \times 10^{-5}$	1.006	$2.656 \times 10^{-6}$	1.006

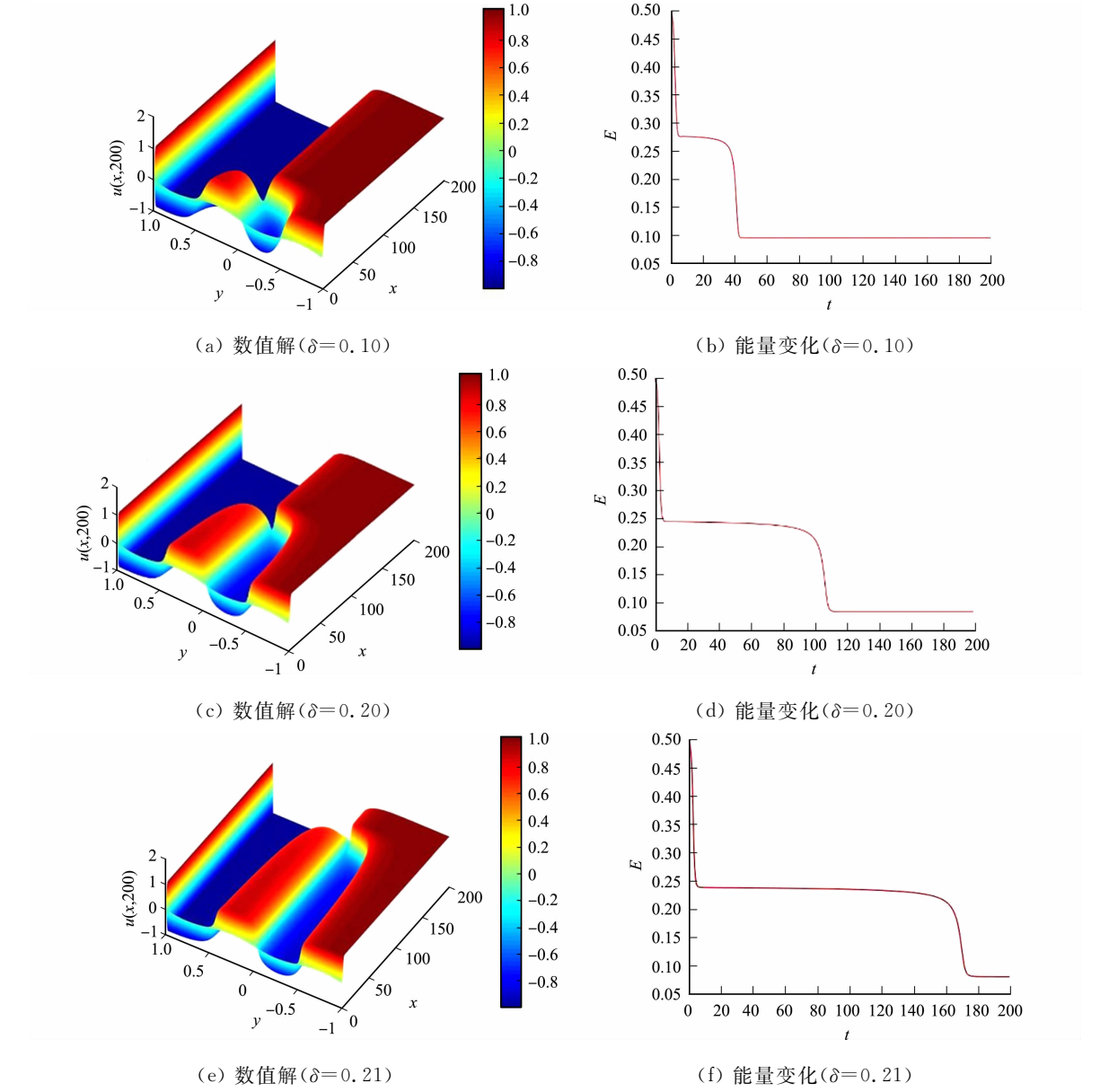
3.2 算例 2

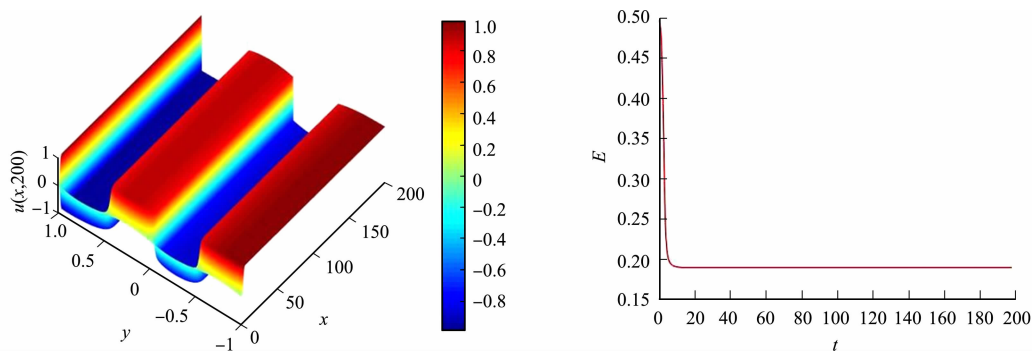
将能量函数  $E(u)$  进行离散, 可得

$$E(u^k) = \frac{h}{4} \sum_{i=0}^M ((u_i^k)^2 - 1)^2 + \frac{h}{2} \epsilon^2 \sum_{i=0}^M u_i^k \mathcal{L}_\delta u_i^k. \tag{21}$$

取初值  $u_0(x)=0.2\sin(\pi x)\cos(\pi x), x\in[-1,1]$ , 其相应的参数为  $\epsilon=0.1, T=200, N=500, M=1\ 000$ . 分别取  $\delta=0.10, 0.20, 0.21, 0.30$ , 得到不同  $\delta$  值的数值解、能量变化及质量图像, 分别如图 1~2 所示.

由图 1 可知: 能量函数  $E(u)$  随着时间  $t$  的增加而减小, 满足能量递减规律, 且能量耗散与  $\delta$  的大小

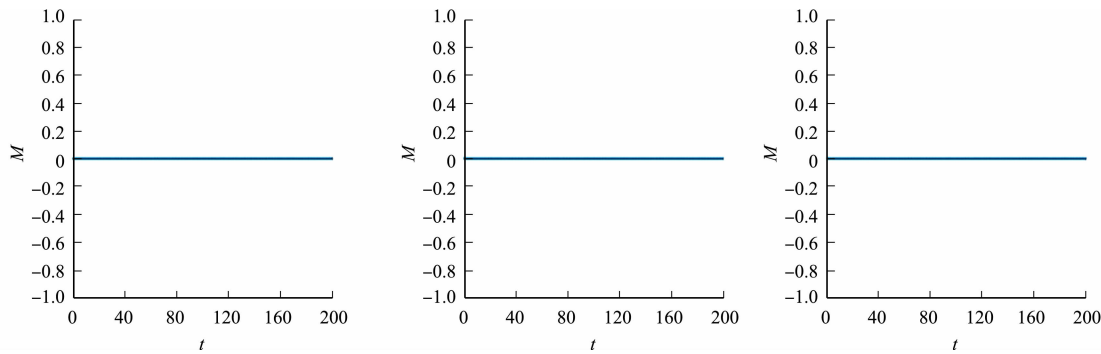




(g) 数值解( $\delta=0.30$ ) (h) 能量变化( $\delta=0.30$ )

图 1 算例 2 不同  $\delta$  值的数值解和能量变化图

Fig. 1 Numerical solution and energy change diagram of different  $\delta$  values of example 2



(a)  $\delta=0.10$  (b)  $\delta=0.20$  (c)  $\delta=0.30$

图 2 算例 2 不同  $\delta$  值的质量图

Fig. 2 Quality map of different  $\delta$  values of example 2

有关,  $\delta$  越大, 方程达到稳态所需时间越长. 从图 2 可知: 对于不同  $\delta$  值, 所给出格式均满足质量守恒的性质.

4 结束语

文中研究了守恒型非局部 Allen-Cahn 方程. 首先利用算子分裂方法将原方程分解为 3 个子问题, 并构造相应数值求解格式. 理论分析表明, 格式满足质量守恒. 最后, 通过数值算例验证了所给格式的有效性.

参考文献:

[1] DIPIERRO S, SERRA J, VALDINOCI E. Improvement of flatness for nonlocal phase transitions[J]. Am J Math, 2020, 142(4): 1083-1160. DOI: 10. 1353/ajm. 2020. 0032.

[2] BIE Yehui, LI She, HU Xin, *et al.* An implicit dual-based approach to couple peridynamics with classical continuum mechanics[J]. Inter J Numer Methods Eng, 2019, 120(12): 1349-1379. DOI: 10. 1002/nme. 6182.

[3] QIAO Yuanyang, ZHAI Shuying, FENG Xinlong. An operator splitting method for image inpainting based on the Allen-Cahn equation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2018, 35(6): 722-732. DOI: 10. 3969/j. issn. 1005-3085. 2018. 06. 011

[4] ZHAO Teng, SHEN Yongxing. An embedded discontinuity peridynamic model for nonlocal heat conduction with interfacial thermal resistance[J]. Int J Heat Mass Transfer, 2021, 175: 121195. DOI: 10. 1016/j. ijheatmasstransfer. 2021. 121195.

[5] BENEŠ M. Mathematical and computational aspects of solidification of pure crystalline materials[J]. Acta Math Univ Comen, 2001, 70(1): 123-151.

[6] CHEN Xinfu, HILHORST D, LOGAK E. Mass conserving Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow[J]. Interfaces Free Bound, 2011, 12(4): 527-549. DOI: 10. 4171/IFB/244.

- [7] DU Qiang, GUNZBURGER M, LEHOUCQ R B, *et al.* A nonlocal vector calculus, nonlocal volume constrained constrained problems, and nonlocal balance laws[J]. *Appl Math Model Sci*, 2013, 23(3): 493-540. DOI: 10.1142/S0218202512500546.
- [8] DU Qiang, YANG Jiang. Asymptotically compatible Fourier spectral approximations of nonlocal Allen-Cahn equations[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2016, 54(3): 1899-1919. DOI: 10.1137/15M1039857.
- [9] ZHAI Shuying, FENG Xinlong, HE Yinnian. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by the high-order compact ADI method[J]. *Comput Phys Commun*, 2014, 185(10): 2449-2455. DOI: 10.1016/j.cpc.2014.05.017.
- [10] 吴龙渊, 汪精英, 翟术英. 求解二维 Allen-Cahn 方程的两种 ADI 格式[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(3): 412-420. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201810014.
- [11] WENG Zhifeng, TANG Longkun. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *Numerical Heat Transfer(Part B): Fundamentals*, 2016, 70(5): 472-483. DOI: 10.1080/10407790.2016.1215714.
- [12] 汪精英, 邓杨芳, 翟术英. 利用 Laplace 变换求解分数阶 Allen-Cahn 方程[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2020, 41(4): 549-554. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201910013.
- [13] DU Qiang, YANG Jiang. Fast and accurate implementation of Fourier spectral approximations of nonlocal diffusion operators and its applications[J]. *J Comput Phys*, 2017, 332: 118-134. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.11.028.
- [14] ZHAI Shuying, WENG Zhifeng, FENG Xinlong. Fast explicit operator splitting method and time-step adaptivity for fractional non-local Allen-Cahn model[J]. *Appl Math Model*, 2016, 40(2): 1315-1324. DOI: 10.1016/j.apm.2015.07.021.
- [15] ZHAI Shuying, WENG Zhifeng, FENG Xinlong. Investigations on several numerical methods for the nonlocal Allen-Cahn equation[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2015, 87: 111-118. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.03.071.
- [16] WENG Zhifeng, ZHUANG Qingqu. Numerical approximation of the conservative Allen-Cahn equation by operator splitting method[J]. *Math Models Methods Appl Sci*, 2017, 40(12): 4462-4480. DOI: 10.1002/mma.4317.
- [17] 刘争光. 几类非局部问题及分数阶模型的数值分析及快速计算方法研究[D]. 济南: 山东大学, 2018.
- [18] GUAN Zhen, LOWENGRUB J S, WANG Cheng. Second order convex splitting schemes for periodic nonlocal Cahn-Hilliard and Allen-Cahn equations[J]. *J Comput Phys*, 2014, 277: 48-71. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.001.
- [19] TIAN Xiaochuan, DU Qiang. Analysis and comparison of different approximations to nonlocal diffusion and linear peridynamic equations[J]. *SIAM J Number Anal*, 2013, 51(6): 3458-3482. DOI: 10.1137/13091631X.
- [20] DU Qiang, JU Lili, LI Xiao, *et al.* Stabilized linear semi-implicit schemes for the nonlocal Cahn Hilliard equation[J]. *J Comput Phys*, 2018, 363: 39-54. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.02.023.

(责任编辑: 黄仲一      英文审校: 黄心中)