第 43 卷　第 5 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 43　No. 5
2022 年 9 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Sep.　2022

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202106014

半空间上的 Bohr 型不等式

陈铭新，李程鹏，王建飞

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究半空间 $P=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}\supset D$ 上的 Bohr 型不等式，建立无界单连通域 P 上解析函数族的 Bohr 半径. 将解析函数族的 Bohr 型不等式推广到调和映射的情形，得到调和映射上的 Bohr 型不等式.

关键词： 解析函数；调和映射；Bohr 半径；Bohr 型不等式

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2022)05-0693-05

Bohr Type Inequalities in Half Space

CHEN Mingxin, LI Chengpeng, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Bohr type inequalities defined on the half space $P=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}\supset D$ are stdudied, Bohr radius of the analytic functions class on the unbounded simply connected domain P are established. Also in this paper, Bohr type inequalities of analytic function class are extended to the case of harmonic mapping class, and Bohr type inequalities on harmonic maps are obtained.

Keywords: analytic function; harmonic mapping; Bohr radius; Bohr type inequalities

用 $\mathbb{C}$ 表示复平面，$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的单位开圆盘，$\overline{D}_r=\overline{D}(0,r)$ 表示以原点为圆心、r 为半径的闭圆盘，记 $\overline{D}=\overline{D}(0,1)$. 对任一给定的单连通域 $\Omega\supset D$，记 $H(\Omega)$ 为 Ω 上解析函数的全体，那么，$B(\Omega)=\{f\in H(\Omega):f(\Omega)\subset\overline{D}\}$.

1914 年，Bohr[1] 在研究 Dirichlet 级数绝对收敛问题时得到定理 A.

定理 A[1]　设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 D 内解析，且 $|f(z)|\leqslant 1$，则在 $\overline{D}_{1/3}$ 内，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant 1$，且 $\dfrac{1}{3}$ 是最佳半径，称为 Bohr 半径.

2010 年，Fournier 等[2] 考虑一般单连通域 $\Omega\supset D$ 上的解析函数，并定义了函数族 $B(\Omega)$ 的 Bohr 半径，记为 $B_\Omega\in(0,1)$，即

$$B_\Omega=\sup\left\{r\in(0,1):\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant 1,\forall f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(\Omega),z\in D\right\}.$$

显而易见，当 $\Omega=D$ 时，$B_\Omega=\dfrac{1}{3}$. 此外，还得到一类移动圆盘上的 Bohr 定理.

定理 B[2]　设 $\Omega_\gamma=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right|<\dfrac{1}{1-\gamma}\right\}$，$\gamma\in(0,1]$，则 $B_{\Omega_\gamma}=\rho_\gamma:=\dfrac{1+\gamma}{3+\gamma}$. 若对某一 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(\Omega_\gamma)$，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\rho_\gamma^n=1$，当且仅当 $f(z)=c$，$|c|=1$. Evdoridis 等[3] 得到定理 A，B

收稿日期： 2021-06-07
通信作者： 王建飞(1978-)，男，教授，博士，主要从事单复变和多复变函数论的研究. E-mail:jfwang@hqu.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(12071161)；福建省自然科学基金资助项目(2020J01073)；华侨大学高层次人才科研启动项目(19BS102)

的几个改进和推广结果.更多有关经典Bohr不等式的改进和推广可参考文献[4-8].基于文献[2-3],本文考虑半空间 $P=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\}\supset D$ 上的解析函数,得到函数族 $B(P)$ 的Bohr半径.

1　几个引理

设 f 和 g 是单连通域 $0\in\Omega$ 上的两个解析函数,若存在一个函数 φ,其中,φ 在 Ω 内解析,且 $\varphi(\Omega)\subset\Omega$,$\varphi(0)=0$,则在 Ω 上,$g=f\circ\varphi$,称 g 从属于 f,记为 $g\prec f$.

特别地,当 f 单叶时,g 从属于 f,等价于 $g(D)\subset f(D)$,$g(0)=f(0)$.当 $g\prec f$ 时,$|g'(0)|\leqslant|f'(0)|$.

为了给出主要结果,需引入引理1～3.

引理1　$g(z)=\dfrac{z}{2+z}$,将 P 共形映射成 D,且 $g(0)=0$.

证明:$g(z)=\dfrac{z}{2+z}=\dfrac{(1+z)-1}{1+(1+z)}$,$\mathrm{Re}(1+z)>0$.因为从右半平面到 D 的共形映射为 $\dfrac{w-1}{1+w}$,故将 $1+z$ 看成 w 即可.证明完毕.

引理2　设 $f\in B(P)$,$f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$\forall z\in D$,则

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2}(1-|a_0|^2),\qquad n\geqslant1.$$

证明:令 $h(z)=\dfrac{f(z)-a_0}{1-\bar{a}_0f(z)}$,则 $h(z)$ 为将 P 映射到 D 内的解析函数,且 $h(0)=0$.由引理1知,$h\prec g$,其中,$g(z)=\dfrac{z}{2+z}$,从而有 $|h'(0)|\leqslant|g'(0)|$.经计算有 $\dfrac{|f'(0)|}{1-|a_0|^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$,即

$$|a_1|\leqslant\frac{1}{2}(1-|a_0|^2).\tag{1}$$

再令 $F(z)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}f(\omega^jz)$,$z\in D$,其中,$\omega=\exp(\dfrac{2\pi i}{n})$.由于 D 是凸的,$F(z)$ 也是从 D 到 $\overline{D}$ 内的解析函数,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\exp(i\dfrac{2\pi j}{n}k)=\begin{cases}1, & k\mid n,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

由 $f(z)$ 的幂级数展开式和 $F(z)$ 的定义,有

$$F(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\omega^{jk}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega^{jk}\right)z^k=a_0+a_nz^n+a_{2n}z^{2n}+a_{3n}z^{3n}+\cdots.$$

令 $F_1(z)=F(z^{\frac{1}{n}})=a_0+a_nz+a_{2n}z^2+a_{3n}z^3+\cdots$,则 $F_1(z)$ 也是从 D 到 $\overline{D}$ 内的解析函数.又由式(1)可知 $|a_n|\leqslant\dfrac{1}{2}(1-|a_0|^2)$,$n\geqslant2$.

引理3[9]　设 $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 是 D 上的两个解析函数.若对某一 $k\in[0,1]$,有 $|g'(z)|\leqslant k|h'(z)|$,$z\in D$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|^2r^n\leqslant k^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^n$,$\forall|z|=r\leqslant1$.

2　主要结果及其证明

定理1　假设 $f\in B(P)$,$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$\forall z\in D$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant1$,$\forall|z|\leqslant\dfrac{1}{2}$.若对某一 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(P)$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=1$,当且仅当 $f(z)=c$,$|c|=1$,故 $\dfrac{1}{2}$ 是最佳的.

证明:由引理2,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n\leqslant|a_0|+\frac{1}{2}(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n=|a_0|+\frac{1}{2}(1-|a_0|^2)\frac{|z|}{1-|z|}\leqslant1.$$

经计算有 $|z|\leqslant\dfrac{2}{3+|a_0|}$，令 $|a_0|\to 1$，得 $|z|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

若对某一 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in B(P)$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\left(\frac{1}{2}\right)^n=1,$$

$$1\leqslant|a_0|+\frac{1}{2}(1-|a_0|^2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2-(|a_0|-1)^2}{2}.$$

解得 $|a_0|=1$，即 $|f(0)|=1$. 由解析函数的最大模原理有 $f(z)=c$，$|c|=1$，证明完毕.

对于 D 上的解析函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，记 $\|f_0\|_r=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$，其中，$f_0(z)=f(z)-f(0)$. Ponnusamy 等[10] 证明定理 A 的改进版本：若 $f\in B(D)$，则对所有 $r\leqslant\dfrac{1}{3}$，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\dfrac{1}{1+|a_0|}+\dfrac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r\leqslant 1$. 类似地，将这个改进版本推广到无界单连通区域 $B(P)$.

定理 2 设 $f\in B(P)$，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$\forall z\in D$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\dfrac{1}{1+|a_0|}+\dfrac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r\leqslant 1$，$\forall r\leqslant\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{1}{2}$ 是最佳的.

证明：令 $|a_0|=a\in[0,1]$，由引理 2，有

$$\begin{aligned}M_f(r)=&\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\|f_0\|_r\leqslant\\&a+\frac{1-a^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a^2)^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\\&a+\frac{1-a^2}{2}\frac{r}{1-r}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-a^2)^2}{4}\frac{r^2}{1-r^2}=:u(a).\end{aligned}$$

上式中：$u(a)=a+A(1-a^2)+B(1-a)(1-a^2)+C(1-a^2)^2$，$a\in[0,1]$，$A=\dfrac{1}{2}\dfrac{r}{1-r}$，$B=\dfrac{1}{4}\dfrac{r^2}{1-r^2}$，$C=\dfrac{1}{4}\dfrac{r^3}{(1-r)(1-r^2)}$.

$u'(a)=1-2Aa+B(3a^2-2a-1)+4C(a^3-a)$，$u''(a)=-2A+2B(3a-1)+4C(3a^2-1)$. 因为 B 和 C 都是非负的，所以 $u''(a)$ 在 $(0,1)$ 内是增函数，故 $u''(a)\leqslant u''(1)=-2A+4B+8C=\dfrac{r}{(1-r)(1-r^2)}(2r^2+r-1)$.

当 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$2r^2+r-1\leqslant 0$，即 $u''(a)\leqslant 0$. 因此，当 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$u'(a)$ 在 $(0,1)$ 内是减函数，于是 $u'(a)\geqslant u'(1)=1-2A=\dfrac{1-2r}{1-r}\geqslant 0$，从而有 $u(a)\leqslant u(1)=1$.

最佳性的证明. 将 P 映成 D 的共形映射 $g(z)=\dfrac{z}{2+z}$ 及 D 上的自同构映射 $\varphi_\alpha=\dfrac{\alpha-z}{1-\alpha z}$，$\alpha\in(-1,0)$. 令 $g_0(z)=\varphi_\alpha\circ g(z)=\dfrac{2\alpha+(\alpha-1)z}{2-(\alpha-1)z}=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nz^n$，其中，$A_0=\alpha$，$A_n=(\alpha+1)\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^n$，$n\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}M_{g_0}(r)=&\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|A_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\|h_0\|_r\leqslant\\&-\alpha+(1+\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^nr^n+\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{r}{1-r}\right)(1+\alpha)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{2n}r^{2n}=\\&1-(1+\alpha)\left[1-\frac{(1-\alpha)r}{2-(1-\alpha)r}-(1+\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-\alpha^2)r^2}{4-(1-\alpha^2)r^2}\right]=\\&1-(1+\alpha)\varphi(r).\end{aligned}$$

上式中：$\varphi(r)=1-\frac{(1-\alpha)r}{2-(1-\alpha)r}-(1+\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{r}{1-r}\right)\frac{(1-\alpha^2)r^2}{4-(1-\alpha^2)r^2}$.

易见，$\varphi(r)$ 在 $(0,1)$ 内严格递减. 当 $r>\frac{1}{2}$ 时，有 $\varphi(r)<\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1-\alpha}{3+\alpha}-(1+\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha}+1\right)\frac{(1-\alpha)^2}{16-(1-\alpha)^2}$. 当 $\alpha\to-1$ 时，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\to0$，有 $\varphi(r)<0$，即 $1-(1-\alpha)\varphi(r)>1$，$r>\frac{1}{2}$，证明完毕.

假设 $f=u+\mathrm{i}v$ 是复平面区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的二次连续可微的复值函数，若 f 满足 Laplace 方程 $\Delta f=4f_{z,\bar{z}}=0$，则称 f 为 Ω 上的调和映射. 特别地，若 Ω 为单连通域，则 f 可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中，函数 h 和 g 均是 Ω 上的解析函数，并分别称之为 f 的解析部分和共轭解析部分. 此时，其 Jacob 行列式为 $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$. Lewy[11] 证明了调和映射 f 在 Ω 上是局部单叶保向的，当且仅当，$J_f(z)>0$，$\forall z\in\Omega$. 若 $|h'|\neq0$，定义 $w_f=g'/h'$ 为 f 的第二伸缩商. 显而易见，$J_f(z)>0$ 等价于 $|w_f(z)|<1$. 有关多变量的 Bohr 半径可参考文献[12-15].

考虑 P 上的调和映射，并得到了一个限制在 D 上的 Bohr 型不等式，有定理 3.

定理 3 假设 $f=h+\bar{g}$ 是 P 上的调和映射，$|h(z)|\leqslant1$，$\forall z\in P$，如果 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$，$z\in D$，且对某一 $k\in[0,1]$，有 $|g'(z)|\leqslant k|h'(z)|$，$z\in D$，那么，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^n\leqslant1$，$\forall r\leqslant r_0:=\frac{1}{2+k}$，且半径 r_0 是最佳的.

证明：函数 $h(z)$ 在 P 内解析，$|h(z)|\leqslant1$，$z\in P$. 由引理 2，可得

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2}(1-|a_0|^2),\qquad n\geqslant1.$$

又由引理 3，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2r^n\leqslant k^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^n,\qquad \forall r\leqslant1.$$

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^n\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2r^n}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}r^n}\leqslant\sqrt{k^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^n}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}r^n}=\frac{k(1-|a_0|^2)}{2}\frac{r}{1-r}$.

令 $|a_0|=a\in[0,1]$，有 $N_f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^n\leqslant a+(1+k)\frac{1-a^2}{2}\frac{r}{1-r}=1-\frac{1-a}{2(1-r)}[2-r(3+a+k+ka)]\leqslant1$. 经计算有 $r\leqslant\frac{2}{3+a+k+ka}$，令 $a\to1$，得 $r\leqslant\frac{1}{2+k}$.

最佳性的证明. $f_0=h_0+\overline{g_0}$，$h_0(z)=\frac{2\alpha+(\alpha-1)z}{2-(\alpha-1)z}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_nz^n$，其中，$A_0=\alpha$，$A_n=(\alpha+1)\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^n$，$n\geqslant1$. 令 $g_0(z)=k\lambda[h_0(z)-A_0]$，$\lambda\in(0,1)$. 则

$$\begin{aligned}N_{f_0}(r)=&|A_0|+(1+k\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|r^n=-\alpha+(1+k\lambda)(1+\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^nr^n=\\&-\alpha+(1+k\lambda)(1+\alpha)\frac{(1-\alpha)r}{2-(1-\alpha)r}=1-(1+\alpha)\left[1-(1+k\lambda)\frac{(1-\alpha)r}{2-(1-\alpha)r}\right]=\\&1-(1+\alpha)\varphi(r).\end{aligned}$$

上式中：$\varphi(r)=1-(1+k\lambda)\frac{(1-\alpha)r}{2-(1-\alpha)r}$ 在 $(0,1)$ 内严格递减.

当 $r>\frac{1}{2+k}$ 时，有 $\varphi(r)<\varphi\left(\frac{1}{2+k}\right)=1-(1+k\lambda)\frac{1-\alpha}{2(2+k)-(1-\alpha)}$. 当 $\lambda\to1$，$\alpha\to-1$ 时，$\varphi\left(\frac{1}{2+k}\right)\to0$，从而有 $\varphi(r)<0$，即 $1-(1+\alpha)\varphi(r)>1$，$r>\frac{1}{2+k}$.

推论 1 假设 $f=h+\bar{g}$ 是 P 上的调和映射，$|h(z)|\leqslant1$，$\forall z\in P$，如果 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$，$z\in D$，且 $f=h+\overline{g}$ 在 D 内保向，则 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^n\leqslant 1$，$\forall r\leqslant\frac{1}{3}$，且半径$\frac{1}{3}$是最佳的.

参考文献：

[1] BOHR H. A theorem concerning power series[J]. Proceedings of the London Mathematical Society，1914，13(s2)：1-5. DOI：10.1112/plms/s2-13.1.1.

[2] FOURNIER R，RUSCHEWEYH S. On the Bohr radius for simply connected plane domains[J]. CRM Proceedings and Lecture Notes，2010，51：165-171. DOI：10.1090/crmp/051/12.

[3] EVDORIDIS S，PONNUSAMY S，RASILA A. An improved Bohr′s inequality for shifted disks[J]. Results in Mathematics，2021，76(14)：1-15. DOI：10.1007/s00025-020-01325-x.

[4] MUHANNAY A. Bohr′s phenomenon in subordination and bounded harmonic classes[J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2010，55(11)：1071-1078. DOI：10.1080/17476931003628190.

[5] ALKHALEEFAH S，KAYUMOV I R，PONNUSAMY S. On the Bohr inequality with a fixed zero coefficient[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2019，147：5263-5274. DOI：10.1090/proc/14634.

[6] AIZENBERG L. Generalization of results about the Bohr radius for power series[J]. Studia Mathematica，2007，180(2)：161-168. DOI：10.4064/sm180-2-5.

[7] KAYUMOV I R，PONNUSAMY S. Bohr′s inequality for analytic functions with lacunary series and harmonic functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，465(2)：857-871. DOI：10.1016/j.jmaa.2018.05.038.

[8] 李程鹏，李锦成. 一类解析函数的 Bohr 定理[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2021，42(4)：547-550. DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.202011005.

[9] KAYUMOV I R，PONNUSAMY S. Bohr radius for locally univalent harmonic mappings[J]. Mathematische Nachrichten，2018，291(11/12)：1757-1768. DOI：10.1002/mana.201700068.

[10] PONNUSAMY S，VIJAYAKUMAR R，WIRTHS K J. New inequalities for the coefficients of unimodular bounded functions[J]. Results in Mathematics，2020，75(3)：1-11. DOI：10.1007/s00025-020-01240-1.

[11] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society，1936，42：689-692. DOI：10.1090/S0002-9904-1936-06397-4.

[12] LIU Taishun，WANG Jianfei. An absolute estimate of the homogeneous expansions of holomorphic mappings[J]. Pacific Journal of Mathematics，2007，231(1)：155-166. DOI：10.2140/pjm.2007.231.155.

[13] AIZENBERG L. Generalization of results about the Bohr radius for power series[J]. Studia Mathematica，2007，180(2)：161-168. DOI：10.4064/sm180-2-5.

[14] WANG Jianfei，LIU Taishun. Bohr′s inequality on the unit Ball B^n[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2007，22(2)：159-165. DOI：1002-0462(2007)02-0159-07.

[15] LIU Xiaosong，LIU Taishun，ZHANG Wenjun. Refined Bohr′s theorem for holomorphic mappings in several complex variables[J]. Scientia Sinica Mathematica，2021，51(4)：591-604. DOI：10.1360/SCM-2019-0052.

（**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**黄心中）