

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202203073



# 三阶时滞多智能体系统二分一致性分析

李艳艳<sup>1</sup>, 李钟慎<sup>2</sup>

( 1. 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021;  
2. 华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 对带有相同输入时滞的,有竞争关系的三阶多智能体系统的二分一致性进行研究. 根据连通二部图的特征,提出一种基于竞争的三阶时滞多智能体系统控制算法. 基于奈奎斯特稳定判据,给出多智能体系统实现二分一致性的充要条件,提出多智能体系统实现二分一致性的最大时滞与系统的拉普拉斯矩阵特征值的代数关系,并进行数值仿真实验. 结果表明:通过文中算法,三阶时滞多智能体系统能够实现二分一致性.

**关键词:** 连通二部图; 多智能体系统; 三阶系统; 二分一致性

**中图分类号:** TP 273      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2022)05-0565-05

## Dichotomous Consistency Analysis on Third-Order Multi-Agents System With Time Delay

LI Yanyan<sup>1</sup>, LI Zhongshen<sup>2</sup>

( 1. College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;  
2. College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China )

**Abstract:** The dichotomous consistency of competitive third-order multi-agent system with the same input time delay was studied. According to the characteristics of connected bipartite graph, a control algorithm of competition-based third-order multi-agent system with time delay was designed. Based on the Nyquist stability criterion, the necessary and sufficient conditions for multi-agent system to achieve dichotomous consistency were given, the algebraic relationship between the maximum time delay of realizing dichotomous consistency in multi-agent system and the eigenvalue of the Laplace matrix of the system was proposed, and numerical simulation experiments were carried out. The results show that the third-order delay multi-agent system can achieve dichotomy consistency using the proposed algorithm.

**Keywords:** connected bipartite graph; multi-agent system; third-order system; dichotomous consistency

多智能体系统是分布式系统的一条重要分支,多智能体系统中的协调控制广泛地应用于电力系统<sup>[1]</sup>、电网群分布系统<sup>[2]</sup>、编队控制<sup>[3]</sup>等领域. 一致性问题是多智能体系统的研究热点之一,它是指多智能体系统在没有中央协调控制或者全局通信的情况下,随着时间的推移,智能体之间相互通信,最终使各智能体的状态趋于一致. 目前,关于多智能体系统的一致性问题已有较多的研究成果. 然而,在实际生活中,有时会要求多智能体系统收敛于多个状态值. 因此,许多学者对多智能体系统分组一致性问题进行研究<sup>[4-12]</sup>. 分组一致性是指随着时间的推移,智能体之间相互通信,最终使各智能体的状态趋于多个平衡点(状态值). 在多智能体分组一致性问题中,时滞是一个不可忽视的因素. 多智能体之间进行通讯的过程中,当智能体无法及时对接收到的数据做出反应时,就会存在输入时滞. 由于许多物理因素及导

**收稿日期:** 2021-03-29

**通信作者:** 李钟慎(1971-),男,教授,博士,主要从事先进控制理论和控制工程的研究. E-mail: lzcycw@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 福建省自然科学基金资助项目(2019J01060)

致时延的其他因素难以避免,因此,研究时滞对多智能体系统稳定性的影响十分必要.

在现实生活中,相互联系的多智能体之间不仅存在合作关系,也存在竞争关系.二分一致性是指在连通二部图下,将多智能体系统分成两组,不同组的多智能体系统收敛于不同平衡点,同组多智能体系统收敛于同一平衡点.二分一致性是一种特殊的分组一致性问题<sup>[13]</sup>,根据连通二部图的特征,针对有无时滞的情况,提出一种基于竞争的控制协议.基于竞争的多智能体系统的研究大多集中于一阶、二阶的多智能体系统<sup>[14-16]</sup>,而关于三阶及高阶多智能体系统的研究尚不多见.基于此,本文提出一种基于竞争的三阶时滞多智能体系统控制算法.

1 预备知识与问题描述

考虑  $n$  个多智能体系统,智能体之间的关系为拓扑结构图  $G=(V,E,A)$ . 其中,  $V$  为顶点的集合,即智能体的个数,  $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$ ;  $E$  为拓扑结构图的边的集合,即多智能体之间进行信息交换的关系,  $E=V\times V,(V_i,V_j)\in E(i,j \text{ 取值范围为 } 1\sim n),(V_i,V_j)$  为智能体  $V_j$  能够接收智能体  $V_i$  传递的信息;  $A$  为系统的邻接矩阵,  $A=a_{i,j}\in\mathbf{R}^{n\times n},a_{i,j}$  为智能体  $V_i,V_j$  之间的连接权重. 若智能体  $V_j$  是智能体  $V_i$  的邻居,则  $a_{i,j}>0$ , 否则,  $a_{i,j}=0$ .  $N_i$  为智能体  $V_i$  的邻居集合. 对于无向连通二部图,  $a_{i,j}=a_{j,i}$ . 文中不考虑自环拓扑结构度矩阵  $D=[d_{i,j}]_{n\times n}$ .  $d_{i,j}$  的计算公式为

$$d_{i,j}=\begin{cases}\sum_{k\in N_i}d_{i,k}, & i=j, \\ 0, & i\neq j.\end{cases}\tag{1}$$

以连续的三阶多智能体系统为研究对象,各智能体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t)=v_i(t),\quad \dot{v}_i(t)=a_i(t),\quad \dot{a}_i(t)=u_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{2}$$

式(2)中:  $x_i(t),v_i(t),a_i(t),u_i(t)$  分别为智能体  $i$  在  $t$  时刻的位移、速度、加速度及控制输入.

对于系统(2),在连通二部图下,将多智能体系统分为两组  $l_1,l_2$ . 当智能体  $i$  和智能体  $j$  在同一组时,  $\lim_{t\rightarrow\infty}|x_i(t)-x_j(t)|=0,\lim_{t\rightarrow\infty}|v_i(t)-v_j(t)|=0,\lim_{t\rightarrow\infty}|a_i(t)-a_j(t)|=0$ ; 当智能体  $i$  和智能体  $j$  不在同一组时,  $\lim_{t\rightarrow\infty}|x_i(t)-x_j(t)|\neq 0,\lim_{t\rightarrow\infty}|v_i(t)-v_j(t)|\neq 0,\lim_{t\rightarrow\infty}|a_i(t)-a_j(t)|\neq 0$ , 则称系统(2)实现二分一致性. 对于带有相同输入时滞的三阶多智能体,基于竞争的二分一致性协议为

$$u_i=-\sum_{j\in N_i}a_{i,j}[(x_j(t-\tau)+x_i(t-\tau))+\gamma(v_j(t-\tau)+v_i(t-\tau))+\beta(a_j(t-\tau)+a_i(t-\tau))].\tag{3}$$

式(3)中:  $\gamma,\beta$  均为耦合系数,  $\gamma>0,\beta>0$ ;  $\tau$  为输入时滞.

将式(3)带入式(2),可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=v_i(t), \\ \dot{v}_i(t)&=a_i(t), \\ \dot{a}_i(t)&=-\sum_{j\in N_i}a_{i,j}[(x_j(t-\tau)+x_i(t-\tau))+\gamma(v_j(t-\tau)+v_i(t-\tau))+\beta(a_j(t-\tau)+a_i(t-\tau))].\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式(4)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_i(t) \\ \dot{v}_i(t) \\ \dot{a}_i(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_n \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i(t) \\ v_i(t) \\ a_i(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{L} & -\mathbf{L}\gamma & -\mathbf{L}\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i(t-\tau) \\ v_i(t-\tau) \\ a_i(t-\tau)\end{bmatrix}.\tag{5}$$

式(5)中:  $\mathbf{L}$  为系统的拉普拉斯矩阵,  $\mathbf{L}=\mathbf{D}+\mathbf{A},\mathbf{D}$  为连通二部图对应的度矩阵;  $\mathbf{I}_n$  为单位矩阵.

2 主要结果及其证明

对系统(2)的二分一致性问题进行研究,给出引理 1,2.

引理 1<sup>[15]</sup> 如果拓扑结构图  $G$  的拓扑结构为连通二部图,则在适当排序下,拓扑结构图  $G$  对应的

邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & B^T \\ B & 0\end{bmatrix}. \tag{6}$$

**引理 2**<sup>[13]</sup> 如果拓扑结构图  $G$  的拓扑结构为连通二部图,则系统的拉普拉斯矩阵  $L$  的秩为  $n-1$ ,  $L$  的非零特征值为正实数.

**定理 1** 对于连通二部图下的三阶时滞多智能体系统,当  $\gamma>0, \beta>0$  时,在协议(3)下,系统(5)能够实现分组一致性的充要条件为  $\frac{\omega^2\lambda_i\beta\sin\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\cos\tau\omega-\lambda_i\sin\tau\omega}{\omega^3}<1, -\omega^2\lambda_i\beta\cos\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\sin\tau\omega+\lambda_i\cos\tau\omega=0, \lambda_i$  为系统的拉普拉斯矩阵特征值;  $\omega$  为频率.

证明:系统(5)表示的特征方程式为

$$\det(sI_{3n}-\boldsymbol{\Gamma}-\boldsymbol{H}e^{-s\tau})=0. \tag{7}$$

式(7)中:  $\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -L & -L\gamma & -L\beta\end{bmatrix}; s=j\omega; I_{3n}$  为  $3n$  维的单位矩阵.

式(7)可转化为

$$\det(sI_{3n}-\begin{bmatrix}0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -L & -L\gamma & -L\beta\end{bmatrix}e^{-s\tau})=0, \tag{8}$$

等效于

$$\det(s^3+s^2L\beta e^{-s\tau}+sL\gamma e^{-s\tau}+Le^{-s\tau})=\det(s^3+s^2\lambda_i\beta e^{-s\tau}+s\lambda_i\gamma e^{-s\tau}+\lambda_i e^{-s\tau})=0. \tag{9}$$

由式(9)可得

$$\prod_{i=1}^n (s^3+s^2\lambda_i\beta e^{-s\tau}+s\lambda_i\gamma e^{-s\tau}+\lambda_i e^{-s\tau})=0. \tag{10}$$

令

$$Y(s)=s^3+s^2\lambda_i\beta e^{-s\tau}+s\lambda_i\gamma e^{-s\tau}+\lambda_i e^{-s\tau}=0. \tag{11}$$

当  $\lambda_i=0$  时,式(11)的 3 个零解  $s_1\sim s_3$  均为 0. 当  $\lambda_i\neq 0$  时,式(11)为

$$1+\frac{s^2\lambda_i\beta e^{-s\tau}+s\lambda_i\gamma e^{-s\tau}+\lambda_i e^{-s\tau}}{s^3}=0. \tag{12}$$

将  $s=j\omega$  代入式(12),可得

$$g(\omega)=\frac{-\omega^2\lambda_i\beta e^{-j\tau\omega}+j\omega\lambda_i\gamma e^{-j\tau\omega}+\lambda_i e^{-j\tau\omega}}{-j\omega^3}, \tag{13}$$

$$g(\omega)=\frac{\omega^2\lambda_i\beta\sin\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\cos\tau\omega-\lambda_i\sin\tau\omega}{-\omega^3}+j\frac{-\omega^2\lambda_i\beta\cos\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\sin\tau\omega+\lambda_i\cos\tau\omega}{\omega^3}. \tag{14}$$

根据奈奎斯特稳定判据,式(12)的特征值位于复平面左半平面的条件是式(13)不包含  $(-1,j0)$  点.

式(14)满足条件

$$\frac{\omega^2\lambda_i\beta\sin\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\cos\tau\omega-\lambda_i\sin\tau\omega}{\omega^3}<1-\omega^2\lambda_i\beta\cos\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\sin\tau\omega+\lambda_i\cos\tau\omega=0. \tag{15}$$

因此,当满足式(15)的条件时,系统稳定. 由此可知,满足式(15)的条件是系统问题的充分性条件.

证明:当系统稳定时,系统特征方程的非零特征值位于复平面的左半平面,证明过程与充分性证明过程相似. 由此可知,根据奈奎斯特稳定判据,式(12)的特征值位于复平面的左半平面的条件为

$$\frac{\omega^2\lambda_i\beta\sin\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\cos\tau\omega-\lambda_i\sin\tau\omega}{\omega^3}<1-\omega^2\lambda_i\beta\cos\tau\omega+\omega\lambda_i\gamma\sin\tau\omega+\lambda_i\cos\tau\omega=0. \tag{16}$$

由此可知,系统稳定的必要条件是满足式(16),且式(15)与式(16)相同.

由上述的充分性和必要性证明可知,式(15)是多智能体系统实现一致性的充要条件.

**推论 1** 假设基于协议(3),三阶时滞多智能体系统能够实现分组一致,那么多智能体系统能够实现分组一致满足的最大输入时滞条件为  $0<\tau<\tau^*$ . 其中,  $\tau^*$  为时滞上界,  $\tau^*=\arccos\left(\frac{\gamma\lambda_{\max}}{\omega^2}\right)/\omega, \omega^6-\omega^4$

$|\lambda_{\max}|^2\beta^2-\omega^2|\lambda_{\max}|^2(\gamma^2-2\beta)-|\lambda_{\max}|^2=0$ ,  $\lambda_{\max}$  为  $\lambda_i$  的最大值.

证明:由引理 2 可知,当  $\lambda_i\neq 0$  时,  $\lambda_i$  为正实数. 由式(15)可得

$$\tau<\arccos\left(\frac{\gamma\lambda_i}{\omega^2}\right)/\omega. \tag{17}$$

式(17)中:  $\omega$  满足

$$\omega^6-\omega^4|\lambda_i|^2\beta^2-\omega^2|\lambda_i|^2(\gamma^2-2\beta)-|\lambda_i|^2=0. \tag{18}$$

由式(17)可知:  $\omega$  随  $\lambda_i$  的增大而增大,  $\tau$  随  $\omega$  的增大而减小,故  $\tau$  有最大值,即

$$\max \tau=\arccos\left(\frac{\gamma\lambda_{\max}}{\omega^2}\right)/\omega. \tag{19}$$

3 仿真实验

8 个多智能体的连通二部图,如图 1 所示. 图 1 中:  $\{1,2,3,4\}$  为一组智能体,  $\{5,6,7,8\}$  为一组智能体,智能体之间的权重为 1. 8 个智能体的位移( $x$ )初始值分别为  $-8,21,36,45,70,60,0,55\text{ m}$ , 8 个智能体的速度( $v$ )初始值分别为  $-3,10,6,-2,0,9,-5,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 8 个智能体的加速度( $a$ )初始值分别为  $-1,-1,3,-4,6,-2,3,-4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . 由图 1 可得系统的拉普拉斯矩阵为

$$L=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
(20)

当  $\gamma=1,\beta=2$  时,  $\tau^*=0.141\ 2$ . 当  $\tau<0.141\ 2$ ,  $\tau=0.141\ 2$ ,  $\tau>0.141\ 2$  时,多智能体系统的状态响应分别如图 2~4 所示.

由图 2~4 可知:当满足定理 1 的条件时,系统可以实现二分一致性;当刚好达到定理 1 的条件时,系统处于临界稳定状态;当不满足定理 1 的条件时,系统无法实现二分一致性.

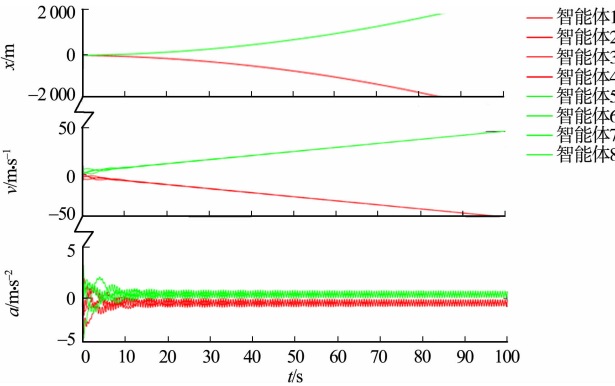


图 3 多智能体系统的状态响应( $\tau=0.141\ 2$ )  
Fig. 3 State responses of multi-agent system( $\tau=0.141\ 2$ )

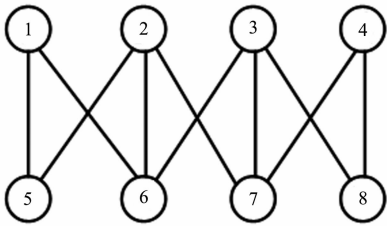


图 1 8 个多智能体的连通二部图  
Fig. 1 Connected bipartite graph of eight multi-agents

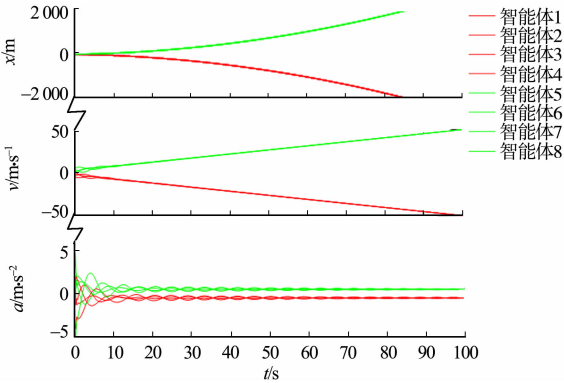


图 2 多智能体系统的状态响应( $\tau<0.141\ 2$ )  
Fig. 2 State responses of multi-agent system( $\tau<0.141\ 2$ )

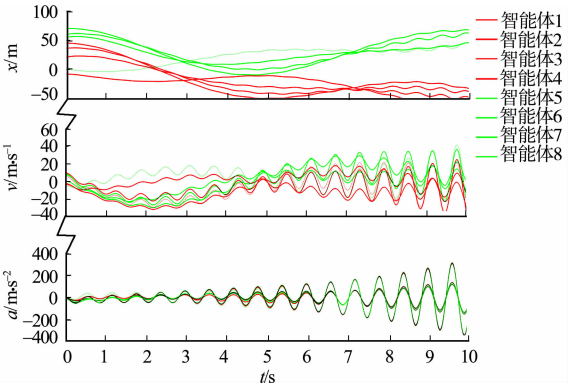


图 4 多智能体系统的状态响应( $\tau>0.141\ 2$ )  
Fig. 4 State responses of multi-agent system( $\tau>0.141\ 2$ )

## 4 结束语

提出一种基于竞争的三阶时滞多智能体系统控制算法,得到多智能体系统实现二分一致性的充要条件,同时给出多智能体实现二分一致性允许的最大输入时滞. 文中研究仅针对带有相同输入时滞的三阶多智能体系统,而带有不同通信时滞和不同输入时滞的三阶多智能体系统的二分一致性问题将是今后研究的方向.

## 参考文献:

[1] 宋天华. 多智能体系统分布式协调控制在电力系统中的应用[J]. 机电信息, 2020(32):133-134. DOI:10. 19514/j. cnki. cn32-1628/tm. 2020. 32. 071.

[2] MO Shuangye, CHEN Wuhua, LU Xiaomei. Distributed hybrid secondary control strategy for DC microgrid group based on multi-agent system[J]. Applied Sciences, 2021, 11(5):482-487. DOI:10. 3390/AP11052030.

[3] HE Bo, GAO Feng. Influence analysis of leader information with application to formation control of multi-agent systems[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2020, 18(1):1-11. DOI:10. 1007/s12555-019-0361-5

[4] YU Xinyi, YANG Fan, ZOU Chao, *et al.* Stabilization parametric region of distributed PID controllers for general first-order multi-agent systems with time delay[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 7(6):1555-1564. DOI:10. 1109/JAS. 2019. 1911627.

[5] HUANG Jun, HUANG Mingliang. Cluster-delay consensus for the second-order nonlinear multi-agent systems with random noises[C]//Proceedings of the 39th Chinese Control Conference. Shenyang:[s. n. ], 2020:723-728.

[6] ZHANG Bojun, HUANG Hanqiao, XU Xinpeng, *et al.*  $H_\infty$  consensus for discrete-time multi-agent systems subject to distributed delay and switching topologies[C]//Proceedings of the 40th Chinese Control Conference. Shanghai:[s. n. ], 2021:273-278. DOI:10. 26914/c. cnkihy. 2021. 031122.

[7] LIU Huwei, CHEN Xin, GUO Liuxiao, *et al.* Generalized consensus of discrete-time multi-agent systems with directed topology and communication delay[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2020, 33(6):1903-1913.

[8] HUANG Chi, ZHAI Guisheng, XU Gesheng. Necessary and sufficient conditions for consensus in third order multi-agent systems[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(6):1044-1053. DOI:10. 1109/JAS. 2018. 7511222.

[9] LIU Jin, AN Baoran, WU Huai. Consensus of third-order multi-agent systems with communication delay[C]//The 30th Chinese Control and Decision Conference. Shenyang:IEEE Press, 2018:1428-1432.

[10] GUO Shaopan, MENG Xiaoyu, SUN Xinmiao. Consensus control of high-order multi-agent systems with delayed feedback and matched disturbances[C]//American Control Conference. New Orleans:IEEE Press, 2021:4729-4734. DOI:10. 23919/ACC50511. 2021. 9483050.

[11] HAN Guangsong, HE Dingxin, GUAN Zhihong. Multi-consensus of multi-agent systems with various intelligences using switched impulsive protocols[J]. Information Sciences, 2016, 349/350:188-198. DOI:10. 1016/j. ins. 2016. 02. 038.

[12] 司马嘉欢. 高阶多智能体系统的分组一致性[D]. 洛阳:河南科技大学, 2018.

[13] 王强, 王玉振, 杨仁明. 一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(3):369-373, 378.

[14] 王玉振, 杜英雪, 王强. 多智能体时滞和无线网络的加权分组一致性分析[J]. 控制与决策, 2015, 30(11):1993-1998.

[15] 林瑜阳, 李钟慎. 基于连通二部图的二阶多智能体系统分组一致性分析[J]. 信息与控制, 2017, 46(1):7-12. DOI:10. 13976/j. cnki. xk. 2017. 0007.

[16] YANG Ruitian, PENG Li, YANG Yongqing, *et al.* Scaled bipartite consensus controller design for second-order multi-agent systems with mixed time-delays[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2022, 35(3):888-908.

(责任编辑: 钱筠      英文审校: 吴逢铁)