第 43 卷　第 4 期
2022 年 7 月

华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 43　No. 4
Jul.　2022

DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202105047

关于多分结构极小集的一些性质

骆道忠[1]，王波[1]，李进金[1,2]

(1. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021；
2. 闽南师范大学 数学与统计学院，福建 漳州 363000)

摘要： 针对在多分情形下，知识状态不能表示成原子的并，给出多分结构极小集的定义，将原子的概念推广为极小集. 在多分结构下，任何知识状态都能表示成极小集元素的并，同时讨论极小集的相关性质.

关键词： 多分结构；极小集；知识状态；拟序多分空间

中图分类号： O 29；TP 182　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2022)04-0561-04

Some Properties of Minimal Sets Under Polytomous Structure

LUO Daozhong[1]，WANG Bo[1]，LI Jinjin[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematical Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 36300, China)

Abstract: In the polytomous case, the state of knowledge cannot be represented as the union of atoms. In this paper, the definition of minimal set under polytomous structure is given, and the concept of atom is generalized to minimal set. In the case of polytomous structure, we show that any knowledge state can be expressed as the union of minimal set elements, the related properties of minimal set are also discussed.

Keywords: polytomous structure; minimal sets; knowledge state; quasi-order polytomous space

1　预备知识

知识空间理论 (knowledge space theory，简称 KST) 是由美国数学心理学家 Falmagne 和比利时数学心理学家 Doignon 于 1985 年首先提出的数学心理模型[1]. KST 建立了一套数学理论来反映教育规律，它通过分析学生对不同水平的一系列有关问题的解答情况，来确定学生在不同知识中的认知水平，从而为教育评价提供了一种有效的科学方法，也是一种测试学生知识水平和构建学生知识结构的理论[2-4]. 经过几十年的发展，该理论已经成为了自适应教学和测试系统中最有效的知识表示理论[5]，已广泛运用于辅助学习与自适应测评领域[6-11].

在 KST 中，假设某个领域的知识都能通过一些问题来反应，将这些问题组成的集合称为问题域，KST 理论的一个核心假设是个体对问题的反应只有正确与错误、同意与不同意之分. 然而，实际上很多情况并非如此，个体对问题的反应有多种可能. 1997 年，Schrepp[12] 首次尝试将 KST 的主要概念推广到具有两个以上回答备选方案（比如同意、部分同意和不同意）的问题集上. 2020 年，Stefanutti 等[13] 在 Schrepp 的工作基础上将二分知识空间理论推广到多分情形，引入多分知识状态和多分知识结构，从而扩展了 KST 的理论与方法.

收稿日期： 2021-05-18

通信作者： 骆道忠(1976-)，男，讲师，主要从事知识空间理论的研究. E-mail: ldzblue@163. com.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11871259)；福建省自然科学基金重点资助项目(2020J02043)；福建省自然科学基金资助项目(2019J01748)

设 Q 是一个项目(问题)集,$(L,\leqslant)$ 是一个完备格(下文若无说明,L 均指完备格),称映射 $K:Q\to L$ 为一个知识状态.$(Q,L,\mathscr{K})$ 为一个多分结构,其中 $\mathscr{K}$ 是非空的知识状态集.Q 到 L 上的全体映射记为 L^Q.定义 L^Q 上的偏序关系为

$$\forall K_1,K_2\in L^Q,\qquad K_1\sqsubseteq K_2\Leftrightarrow\forall q\in Q,\qquad K_1(q)\leqslant K_2(q).$$

基是经典知识空间理论极其重要的概念,可张成知识空间.它蕴含了知识空间的所有信息,反应了学生能掌握的最基本的问题集族,为刻画整个知识空间及寻找学习路径都提供了依据[2].在二分知识空间框架下,若知识空间存在基,则任何一个知识状态都可表示成原子的并.Stefanutti 等[13]定义了多分结构下 q 处的 l-原子的概念,但要求反应水平 l 为不可约元,即 l 满足:对于任意的 $G\subseteq L$,$\sup G=l$,则 $l\in G$.当 l 为可约元时,原子的概念就没有意义了,而且在多分知识空间下,知识状态不能表示成原子的并.于是,Stefanutti 将多分知识空间加强为粒状多分知识空间,这样由基(原子)可扩张成整个多分空间,与经典二分知识空间的情况多少有些不同.在二分知识空间中,并不一定需要粒状性,只需其基存在,就可以由其基(原子)扩张成整个知识空间.

本文将原子的概念推广到极小集上,去掉了不可约元条件,从而证明了在多分结构下,任何状态都能表示成极小集元素的并.

2 基本定义及例子

定义 1[13] 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构,对任意 $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{K}$,分别定义映射 $\sqcup\mathscr{G}:Q\to L$ 和 $\sqcup\mathscr{G}:Q\to L$ 为

$$\begin{cases}\forall q\in Q,\qquad (\sqcup G)(q)=\sup\{K(q):K\in\mathscr{G}\},\\ \forall q\in Q,\qquad (\sqcap G)(q)=\inf\{K(q):K\in\mathscr{G}\}.\end{cases}$$

若对任意 $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{K}$,都有 $\sqcup\mathscr{G}\in\mathscr{K}$,则称 $\mathscr{K}$ 是 $\sqcup$-封闭的,相应的多分结构$(Q,L,\mathscr{K})$称为多分知识空间.

定义 2 假设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构,$q\in Q$,$l\in L$,称 $\mathscr{B}$ 为 q 处的 l-覆盖,如果 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{K}$,且满足:1)$(\sqcup\mathscr{B})(q)=l$;2) 对于任意的 $K'\in\mathscr{K}$,$K'(q)=l$,若 $\exists K\in\mathscr{B}$,使得 $K'\sqsubseteq K$,则 $K'\in\mathscr{B}$.

定义 3 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构,$\mathscr{B}_q^l$ 为 q 处的 l-覆盖,如果对于任意的 q 处的 l-覆盖 $\mathscr{F}$,都有 $\mathscr{B}_q^l\cap\mathscr{F}=\mathscr{B}_q^l$ 或者 $\mathscr{B}_q^l\cap\mathscr{F}=\varnothing$,那么称 $\mathscr{B}_q^l$ 为 q 处的 l-极小集.下文 $\mathscr{B}_q^l$ 均表示 q 处的 l-极小集.

注 1 由于 q 处的 l-覆盖 $\mathscr{B}$ 有两种可能:1) $\exists K\in\mathscr{B}$,$K(q)=l$;2) $\forall K\in\mathscr{B}$,$K(q)<l$.所以,q 处的 l-极小集 $\mathscr{B}_q^l$ 就是元素个数最少的上述这两种可能的 q 处的 l-覆盖.

例 1 设 $Q=\{p,q\}$,$(L,\leqslant)$是一个完备格,$L=\{a,b,c,d\}$,$a\leqslant b\leqslant d$,$a\leqslant c\leqslant d$,若状态 $K:Q\to L$ 定义为 $K(p)=a$,$K(q)=b$,习惯上简记为 ab.给定一个多分结构为 $\mathscr{K}=\{aa,ab,ba,bb,ca,cc,da,dc,dd\}$,则 $\mathscr{B}_p^a=\mathscr{B}_q^a=\{aa\}$,$\mathscr{B}_p^b=\{ba\}$,$\mathscr{B}_q^b=\{ab\}$,$\mathscr{B}_p^c=\{ca\}$,$\mathscr{B}_q^c=\{cc\}$,$\mathscr{B}_p^d=\{ba,ca\}$ 或 $\mathscr{B}_p^d=\{da\}$,$\mathscr{B}_q^d=\{ab,cc\}$ 或 $\mathscr{B}_q^d=\{dd\}$,若取 $\mathscr{H}=\{aa,ba,ab,ca,cc\}$,即部分极小集的并,则对 $\mathscr{K}$ 中的任意状态,都可表示成 $\mathscr{H}$ 中元素的并,这样的状态集 $\mathscr{H}$ 就不含可约元 d.注意到 $\mathscr{H}$ 中的元素除了 aa 就是全体原子,因此极小集推广了原子的概念.

例 2 设 $Q=\{p,q\}$,$L=\left[0,\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{2}{3},1\right]$,$\mathscr{K}=\{K\in L^2\mid K(p)\geqslant K(q)\}$,对任意的 $l\in L$,取 $\mathscr{B}_p^l=\{(l,0)\}$,$\mathscr{B}_q^l=\{(l,l)\}$,令 $\mathscr{H}=\bigcup\limits_{l\in L}(\mathscr{B}_p^l\cup\mathscr{B}_q^l)$,则对 $\mathscr{K}$ 中的任意状态,都可表示成 $\mathscr{H}$ 中元素的并.

另外,注意到只有 $l=\dfrac{2}{3}$是不可约元,因此,原子只有$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$与$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,其张成的空间为

$$\mathscr{K}_1=\left\{(0,0),\left(\frac{2}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}\neq\mathscr{K}.$$

3 主要结果及其证明

性质 1 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构,若 $\exists K\in\mathscr{B}_q^l$,使得 $K(q)=l$,则 $\mathscr{B}_q^l=\{K\}$.

证明:考虑 $\mathscr{F}=\{K'\mid K'(q)=l,K''\sqsubseteq K,K'\in\mathscr{K}\}$,则 $K\in\mathscr{F}\subseteq\mathscr{B}_q^l$.显然,$\mathscr{F}$ 是 q 处的 l-覆盖.于是$\mathscr{B}_q^l\cap\mathscr{F}=\mathscr{B}_q^l$,故 $\mathscr{B}_q^l\subseteq\mathscr{F}\subseteq\mathscr{B}_q^l$,即 $\mathscr{B}_q^l=\{K'\mid K'(q)=l,K'\sqsubseteq K,K'\in\mathscr{K}\}$.假设 $\exists K_1\in\mathscr{B}_q^l$,$K_1\sqsubseteq K$ 且 $K_1\neq K$.考虑 $\mathscr{F}_1=\{K'\mid K'(q)=l,K'\sqsubseteq K_1,K'\in\mathscr{K}\}$,则 $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{B}_q^l$,且 $\mathscr{F}_1$ 也是 q 处的 l-覆盖.于是,$\mathscr{B}_q^l\cap\mathscr{F}_1=\mathscr{B}_q^l$,但 $K\in$

$\mathscr{B}_q^l$，$K\notin\mathscr{F}_1$，矛盾，故 $\mathscr{B}_q^l=\{K\}$.

注 2 q 处的 l-极小集 $\mathscr{B}_q^l$ 要么是单点集，要么 $\forall K\in\mathscr{B}_q^l$，都有 $K(q)<l$，此时，l 必为可约元. 当 l 为不可约元时，若 $\exists K\in\mathscr{B}_q^l$，$K(q)=l$，则 $\mathscr{B}_q^l=\{K\}$. 此时，K 就是 Stefanutti 定义的 q 处的 l-原子，所以极小集的定义推广了原子的概念.

另外，由上面的例 2 可以看到全体原子张不成 $\mathscr{K}$，但全体集小集却可张成 $\mathscr{K}$.

定义 4[13] 设$\leqslant$是项目集 Q 上的拟序关系，一个状态 K：$Q\to L$ 称为与$\leqslant$相容的，如果 $\forall p,q\in Q$，$p\leqslant q\Rightarrow K(q)\leqslant K(p)$. 所有的与$\leqslant$相容的状态构成的集合 $\mathscr{K}$，称为拟序多分空间.

注 3 设$(Q,L,\mathscr{K})$为拟序多分空间，任取 $q\in Q$，令 $\beta(q)=\{r\in Q\mid \forall K\in\mathscr{K},K(q)\leqslant K(r)\}$，对任意的 $l\in L$，定义映射 A_q：$Q\to L$，使得 $A_q(r)=\begin{cases} l, & r\in\beta(q)\\ 0, & r\notin\beta(q)\end{cases}$，则与文献[13]完全类似，容易证明$A_q\in\mathscr{K}$. 因此，对于拟序多分空间 $\mathscr{K}$ 而言，q 处的 l-极小集 $\mathscr{B}_q^l$ 可取为 $\mathscr{B}_q^l=\{A_q\}$. 拟序多分空间 $\mathscr{K}$ 的这类 l-极小集的并记为 $\mathscr{A}_l$，即 $\mathscr{A}_l=\{A_q\mid q\in Q\}$.

定理 1 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构，$\mathscr{B}=\{K\mid K\in\mathscr{B}_q^l,q\in Q,l\in L\}$，则 $\forall K\in\mathscr{K}$，都有 $K=\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B},B\sqsubseteq K\}$.

证明：设 $K(q)=l$，若 $K\in\mathscr{B}$，结论显然成立，若 $\exists K_1\in\mathscr{B}_q^l$，$K_1(q)=l$，则 $K_1\sqsubseteq K$，从而 $l=K_1(q)\leqslant(\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B},B\sqsubseteq K\})(q)\leqslant K(q)=l$，结论成立.

定义 5[14] 设$(L,\leqslant)$是一个偏序集，如果对 L 中的任意的降链 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots$，都存在 k，使得 $x_k=x_{k+1}=\cdots$，则称 L 满足降链条件(记为 DCC). 对偶的降链条件，称为升链条件(记为 ACC).

推论 1 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个拟序多分空间，其中 L 满足 DCC，L 的所有不可约元构成的集合记为 L_1，$\mathscr{B}_1=\{K\mid q\in Q,l\in L_1,K\in\mathscr{B}_q^l\}$，则对任意的 $K\in\mathscr{K}$，都有 $K=\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B}_1,B\sqsubseteq K\}$.

证明：只须证明当 $K(q)=l\in L\setminus L_1$ 时成立即可. 注意 L 满足 DCC，故 $l=\sup\{l_i\mid l_i\in L_1\}$，而 $\mathscr{K}$ 是拟序多分空间，所以有 $\forall l_i\in L_1$，均存在 $K_i\in\mathscr{B}_q^{l_i}$，$K_i(q)=l_i$. 于是有

$$l_i=K_i(q)<(\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B}_1,B\sqsubseteq K\})(q)\leqslant K(q)=l.$$

故 $l=\sup\{K_i(q)\}\leqslant(\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B}_1,B\sqsubseteq K\})(q)\leqslant K(q)=l$.

注 4 由于有限格满足 DCC，因此，若 L 为有限格，上述推论亦成立.

定理 2 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分知识空间，$\mathscr{B}=\{K\mid K\in\mathscr{B}_q^l,q\in Q,l\in L\}$，$M\in\mathscr{K}$，$N\in L^Q$，则下列两个条件等价：

ⅰ) $\forall G\in\mathscr{K}$：$M\sqcup N=G\sqcup N\Rightarrow G\sqsubseteq M$；

ⅱ) $\forall D\in\mathscr{B}$：$D\sqsubseteq(M\sqcup N)\Rightarrow D\sqsubseteq M$.

证明：条件ⅰ)$\Rightarrow$条件ⅱ). $\forall D\in\mathscr{B}$：$D\sqsubseteq(M\sqcup N)$，则 $M\sqcup N=(M\sqcup D)\sqcup N$，注意 $M\sqcup D\in\mathscr{K}$，由(i)可得，$M\sqcup D\sqsubseteq M$，故 $D\sqsubseteq M$.

条件ⅱ)$\Rightarrow$条件ⅰ). $\forall G\in\mathscr{K}$：$M\sqcup N=G\sqcup N$，由定理 1 可得，$G=\sqcup\{B\mid B\in\mathscr{B},B\sqsubseteq G\}$. 于是，对于 $B\in\{B\mid B\in\mathscr{K},B\sqsubseteq G\}$，都有 $B\sqsubseteq(M\sqcup N)$，由条件ⅱ)知，$B\sqsubseteq M$，从而 $G\sqsubseteq M$.

注 5 定理 2 给出了由极小集构建多分知识空间的算法，详细过程同二分情形下由基构建知识空间的算法，参考文献[15].

定理 3 设$(Q,L,\mathscr{K})$为一个多分结构，$K\in\mathscr{K}$，$\mathscr{B}=\{K\mid K\in\mathscr{B}_q^l,q\in Q,l\in L\}$，如果对于任意的 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{K}$，$K=\sqcup\mathscr{F}$，都有 $K\in\mathscr{F}$，则 $K\in\mathscr{B}$.

证明：假设 $K\notin\mathscr{B}$，对于任意的 $q\in Q$，记 $K(q)=l$，则必有下列两种情况 .

情况 1 $\exists K_q\in\mathscr{B}_q^l$，$K_q(q)=l$，$K_q\sqsubseteq K$.

情况 2 $\forall K_q^i\in\mathscr{B}_q^l$，$K_q^i(q)<l$，$\sup\{K_q^i(q)\}=l$.

令 $\mathscr{F}=\{T_q\mid T_q=K_q$ 或 $T_q=K_q^i,q\in Q\}$，则 $K=\sqcup\mathscr{F}$，但 $K\notin\mathscr{F}$，矛盾，故 $K\in\mathscr{B}$.

注 6 注意到上述证明的情况 2，定理 3 的逆不成立. 另外，由于极小集的定义是原子概念的推广，因此，拟序多分空间的很多关于原子的性质都能推广到极小集上，证明方法同文献[13]完全类似，如下面的定理 4，但此处给出了一个简单的证明.

定理 4 设 $\mathscr{A}_l=\{A_q\mid q\in Q\}$($A_q$ 的定义见注 2)是拟序多分空间$(Q,L,\mathscr{K})$的 l-极小集的全体，对任

意的 $A_q, A_r \in \mathscr{A}_l$，则 $A_q \sqsubseteq A_r \Leftrightarrow$ 对任意的 $K \in \mathscr{K}$，都有 $K(r) \leqslant K(q)$.

证明：$\Leftarrow$) 设对任意的 $K \in \mathscr{K}$，都有 $K(r) \leqslant K(q)$，则有 $A_r(r) \leqslant A_r(q)$，注意 $A_q(q) = A_r(r) = l$，故 $A_q(q) \leqslant A_r(q)$，从而有 $(A_r \sqcap A_q)(q) = l$，而 $A_q \sqcap A_r \in K$，据注1，必有 $A_q \sqcap A_r = A_q$，所以 $A_q \sqsubseteq A_r$.

$\Rightarrow$) 设 $A_q \sqsubseteq A_r$，由注2可得，$A_r(q) = l$，于是 $q \in \beta(r)$，所以对任意的 $K \in \mathscr{K}$，都有 $K(r) \leqslant K(q)$.

4 结束语

在二分知识空间中，原子的概念扮演了相当重要的角色，而在多分结构下，由于存在可约元，如何更好地、恰当地定义多分结构下的原子便成为研究的一个重要课题．将原子推广为极小集，能将多分知识状态表示成极小集元素的并，但在二分情形下，与原子相关的理论还很多．今后的工作，将进一步用极小集来研究基于多分结构下的与原子相关的理论与应用.

参考文献：

[1] DOIGNON J P，FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Manmachine Studies，1985，23(2)：175-196. DOI：10.1016/S0020-7373(85)80031-6.

[2] 李进金，孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版)，2019，49(4)：517-526. DOI：10.16152/j.cnki.xdxbzr.2019-04-004.

[3] 谢小贤，李进金，陈东晓，等. 知识基的布尔矩阵求解方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2021，42(3)：410-420. DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.202008033.

[4] STEFANUTTI L，DE CHIUSOLE D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory [J]. Journal of Mathematical Psychology，2017，80：22 - 32. DOI：10.1016/j.jmp.2017.08.003.

[5] FALMAGNE J C，DOIGNON J P. Knowledge spaces[M]. New York：Springer-Verlag，1999. DOI：10.1007/978-3-642-58625-5.

[6] DOBLE C，MATAYOSHI J，COSYN E，*et al*. A data-based simulation study of reliability for an adaptive assessment based on knowledge space theory[J]. International Journal of Artificial Intelligence in Education，2019，29(2)：258-282. DOI：10.1007/s40593-019-00176-0.

[7] COSYN E，DOBLE C，FALMAGNE J C，*et al*. Assessing mathematical knowledge in a learning space[M]. New York：Spriger，2013：27-50. DOI：10.1007/978-3-642-35329-1.

[8] 麦裕华，何庆辉，肖信. 基于知识空间理论的高中生科学原理学习分析：以氧化还原反应为例[J]. 化学教育(中英文)，2018，39(19)：34-40. DOI：10.13884/ j.1003-3807hxjy.201709006.

[9] 何庆辉，麦裕华. 基于知识空间理论的高一学生离子反应关键学习路径[J]. 化学教育，2018(7)：12-17. DOI：10.3969/j.issn.1005-6629.2018.07.004.

[10] ALBERT D，LUKAS J. Knowledge spaces：Theories，empirical resarch，and applications[M]. London：Psychology Press，1999. DOI：10.4324/9781410602077.

[11] 周弦，谢深泉. 基于知识空间理论的自适应测试过程[J]. 计算机应用，2007，27(增刊1)：68-72. DOI：JournalArticle/5aead4fcc095d70944f525aa.

[12] SCHREPP M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives[J]. Journal of Mathematical Psychology，1997，41：237-243. DOI：10.1006/jmps.1997.1169.

[13] STEFANUTTI L，ANSELMI P，DE CHIUSOLE D，*et al*. On the polytomous generalization of knowledge space theory[J]. Journal of Mathematical Psychology，2020，94. DOI：10.1016/j.jmp.2019.102306.

[14] DAVEY B A，PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order[M]. 2nd ed. Cambridge：Cambridge University Press，2002：30-56. DOI：10.1017/CBO980511809088.

[15] FALMAGNE J C，DOIGNON J P. Learning spaces：Interdisciplinary applied mathematics[M]. Heidelberg：Springer，2011：50-52. DOI：10.1007/978-3-642-01039-2.

（**责任编辑：**黄仲一 **英文审校：**黄心中）