

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202104060



时间分数阶 Allen-Cahn 方程的 重心插值配点法

黄蓉, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用 Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数, 将分数阶方程转换成整数阶方程; 然后, 在时-空方向均采用重心插值配点法离散, 非线性项采用 Newton 迭代格式求解, 并给出配点格式的相容性误差分析. 数值实验表明: 该配点法格式具有较高精度, 能满足能量递减规律.

关键词: Caputo 型分数阶; Allen-Cahn 方程; Laplace 变换; 重心插值配点法; 误差分析; 能量递减

中图分类号: O 241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2022)04-0553-08

Barycentric Interpolation Collocation Method for Time-Fractional Allen-Cahn Equation

HUANG Rong, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The Laplace transform is used to approximate the Caputo-type fractional derivative and transform the time-fractional Allen-Cahn equation into the integer order case. Then, the barycentric interpolation collocation method is used to discretize integer order Allen-Cahn equation in both time and space directions, the non-linear term is solved by Newton iteration method. Moreover, error estimates of the collocation scheme are also presented. Numerical experiments are presented to verify the high accuracy and satisfying the law of energy decline for the collocation scheme.

Keywords: Caputo-type fractional; Allen-Cahn equation; Laplace transform; barycentric interpolation collocation method; error analysis; energy decline

基于自由能的概念来描述界面且已经被应用于许多带有界面问题的多相流系统中. 最初的 Allen-Cahn 方程是以自由能的积分表示, 是一种求解界面问题的数学模型, 被广泛应用于平均曲率-流量^[1]、晶体生长^[2]、图像处理^[3]、人群扩散现象^[4]和材料科学^[5]等研究中. 近年来, 分数阶算子的发展促进了非局部问题的迅速发展, 将整数阶 Allen-Cahn 方程扩展到分数阶 Allen-Cahn 方程, 已经引起众多学者的关注. 汤涛等^[7]首次证明了时间分数阶梯度流的能量耗散性和数值稳定性的分析; 王宏等^[8]采用快速 Caputo 算法结合傅里叶谱方法求解时间分数阶 Allen-Cahn 方程; 杜强等^[9]提出分数阶 Allen-Cahn 方程的凸分裂数值格式; 刘欢等^[10]基于 SOE 思想近似 Caputo 分数阶导数, 提出时间分数阶 Allen-Cahn 的一种有限差分高效格式; 张楠等^[11]分别运用稳定化方法和 SAV 策略结合向后微分公式 (backward differentiation formula, BDF) 构造了时间分数阶 Allen-Cahn 方程和 Cahn-Hilliard 方程的高阶算法. 任金城等^[12]基于 Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数, 从而求解偏微分方程; 汪精英等^[15]利用

收稿日期: 2021-04-29

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 博士, 副教授, 主要从事偏微分方程数值计算的研究. E-mail: zfwmath@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(ZQN-702)

Laplace 变换与算子分裂法、差分法求解分数阶 Allen-Cahn 方程. 采用 Laplace 变换近似分数阶导数, 可有效地减少由于分数阶导数的历史记忆性所引起的储存量.

近年来, 重心插值配点法作为一种新型的无网格计算方法, 被广泛应用于求解各类微分方程. 重心插值配点法成功地应用于求解平面弹性问题^[17]、Fredholm 方程^[18]、整数阶 Allen-Cahn 方程^[19-20]. 重心插值公式具有良好的数值稳定性, 它能以机器精度任意逼近光滑函数, 将 Lagrange 插值公式改进, 并定义重心权, 可得到重心 Lagrange 公式. 重心插值公式具有计算量小、操作方便、易于编程、高精度、稳定性好等优点. 重心插值配点格式求解微分方程的理论分析相对少. 最近, 文献[13-14]用重点插值配点法分别求解分数阶电报方程和热传导方程, 并给出理论分析.

基于此, 本文将分数阶 Allen-Cahn 方程通过 Laplace 变换近似为整数阶方程, 在时间与空间方向均采用重心插值配点法求解整数阶方程, 非线性项选取 Newton 迭代格式求解, 并给出相容性误差分析.

1 分数阶 Allen-Cahn 方程的数值解

1.1 一维分数阶 Allen-Cahn 方程

考虑 Caputo 类型的时间分数阶 Allen-Cahn 方程, 即

$$\left. \begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon^2} u(u^2 - 1) &= 0, & (x,t) \in [a,b] \times [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in [a,b], \\ u(a,t) &= f(t), & u(b,t) = g(t), t \in [0,T]. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中, ${}^C_0 D_t^\alpha u(x,t)$ 指 Caputo 类型的分数阶导数, 其定义为

$${}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_\sigma u(x,\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma, & 0 < \alpha < 1, \\ \partial_t u(x,t), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数.

Allen-Cahn 方程的基本能量泛函 $E(u)$ 为

$$E(u) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} W(u) \right] dx, \tag{3}$$

式(3)中, $W(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$.

$E(u)$ 关于时间 t 求 Caputo 型分数阶导数, 即

$${}^C_0 D_t^\alpha E(u) = \int_a^b \left[\nabla u \cdot \nabla {}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) + \frac{1}{\epsilon^2} F'(u) {}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) \right] dx = - \int_a^b [{}^C_0 D_t^\alpha u(x,t)]^2 dx \leq 0. \tag{4}$$

显然, $E(u)$ 关于时间 t 具有非增长性, 该方程满足能量耗散定律.

1.2 将分数阶方程通过 Laplace 变换转变为整数阶方程

一维 Allen-Cahn 方程中的分数阶导数可利用 Laplace 变换逼近, 即

$$L\{{}^C_0 D_t^\alpha u(x,t)\} = q^\alpha \bar{u}(x,q) - q^{\alpha-1} u(x,0) = q^\alpha [\bar{u}(x,q) - q^{-1} u(x,0)], \tag{5}$$

式(5)中, $u(x,t)$ 经 Laplace 变换得到 $\bar{u}(x,q)$.

将 q^α 在区间 $(0,1]$ 作线性插值, 并代入式(5), 即

$$L\{{}^C_0 D_t^\alpha u(x,t)\} \approx \alpha q [\bar{u}(x,q) - q^{-1} u(x,0)] + (1-\alpha) [\bar{u}(x,q) - q^{-1} u(x,0)]. \tag{6}$$

对式(6)采用 Laplace 逆变换, 并代入式(1), 推出整数阶方程, 即

$${}^C_0 D_t^\alpha u(x,t) \approx \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (1-\alpha) [u(x,t) - u(x,0)], \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha} [u(x,t) - u(x,0)] + \frac{1}{\alpha \cdot \epsilon^2} u(u^2 - 1) = 0. \tag{8}$$

1.3 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程

1.3.1 重心 Lagrange 插值 选取互异的插值节点 $x_i, i=1,2,\cdots,n$, 其对应的函数值为 u_i , 多项式插值

$p(x)$ 满足 $p(x_i) = u_i$, 则 $p(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) u_i$. 其中, $\beta_i(x)$ 是 Lagrange 插值基函数. 其表达式为

$$\beta_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n (x - x_k) / \prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

令 $\gamma(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 定义重心权 $\omega_i = \frac{1}{\prod_{i \neq k} (x_i - x_k)}$, 则 Lagrange 插值的基函数

为 $\beta_i(x) = \frac{\gamma(x)\omega_i}{x - x_i}, k = 1, 2, \dots, n$. 推出 Lagrange 插值的另一形式为

$$p(x) = \gamma(x) \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x - x_i} u_i. \quad (10)$$

由插值常数 1, 有 $1 = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) = \gamma(x) \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x - x_i}$. 结合式(9), (10), 则重心 Lagrange 插值公式为

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x - x_i} u_i / \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{x - x_i}. \quad (11)$$

1.3.2 重心有理插值 考虑重心有理插值配点法的基函数. 给定 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, u(x_i) = u_i, i = 0, 1, \dots, n$. d 为选取的一整数 ($0 \leq d \leq n$), 令 $r(x)$ 为

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n-d} \phi_k(x) Z_k(x) / \sum_{k=0}^{n-d} \phi_k(x). \quad (12)$$

式(12)中: $\phi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x - x_k) \cdots (x - x_{k+d})}$, 多项式 $Z_k(x) = \sum_{i=k}^{k+d} \prod_{j=k, j \neq i}^{k+d} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} u_i$.

将 $Z_k(x)$ 以 Lagrange 公式改写, 即有

$$\sum_{k=0}^{n-d} \phi_k(x) Z_k(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{x - x_i} u_i. \quad (13)$$

式(13)中: $\omega_i = \sum_{k \in J_i} (-1)^k \prod_{j=k, j \neq i}^{k+d} \frac{1}{x_i - x_j}$, 指标集 $J_i = \{k \in J \mid i - d \leq k \leq i\}, J = \{0, 1, \dots, n - d\}$.

由插值常数恒为 1, 即有 $1 = \sum_{i=k}^{k+d} \prod_{j=k, j \neq i}^{k+d} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, 故有

$$\sum_{k=0}^{n-d} \phi_k(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{x - x_i}. \quad (14)$$

由式(12)~(14)可推出重心有理插值公式, 即

$$r(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} u_j / \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} = \sum_{j=0}^n r_j(x) u_j. \quad (15)$$

式(15)中: 重心有理插值公式的基函数 $r_j(x) = \frac{\omega_j}{x - x_j} / \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}$.

1.3.3 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程 考虑整数阶 Allen-Cahn 方程的重心插值配点法计算格式, 其方程变形为

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot u(x, t) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot u(x, 0) + \frac{1}{\alpha \cdot \epsilon^2} \cdot G(u) = 0. \quad (16)$$

式(16)中: $(x, t) \in [a, b] \times [0, T], G(u) = u(u^2 - 1)$.

区域 $\Omega = [a, b] \times [0, T]$, 在空间 $[a, b]$ 上取 $m+1$ 个节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 时间 $[0, T]$ 上取 $s+1$ 个节点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = T$, 故而形成 Ω 上的张量型节点 $(x_i, t_j), i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, s$. 令每个节点的函数值 $u_i(t_j) = u(x_i, t_j) = u_{i,j}$.

考虑上述热传导方程, 先固定 t , 考虑变量 x , 则 $u(x, t)$ 在节点 x_1, x_2, \dots, x_m 上的重心插值公式为

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j(t). \quad (17)$$

式(17)中: $\varphi_j(x) = \frac{\omega_j}{x - x_j} / \sum_{j=0}^m \frac{\omega_j}{x - x_j}$ 为 x 方向上的插值基函数. 重心权 ω_j 的选择跟不同的重心插值配点法有关.

类似,固定 x ,考虑变量 t ,则 $u(x,t)$ 在节点 t_1,t_2,\cdots,t_s 上的重心插值公式为

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^s\varphi_j(t)u_j(x). \tag{18}$$

式(18)中, $\varphi_j(t)$ 为 t 方向上的插值基函数.

由式(17),(18)可知, $u(x,t)$ 在节点 $\{(x_i,t_j),i=0,1,\cdots,m,j=0,1,\cdots,s\}$ 上的重心插值为

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i(x)\varphi_j(t)u_{i,j}. \tag{19}$$

考虑 $u(x,t)$ 对变量 x,t 求 $l+k$ 阶偏导数,即有

$$\frac{\partial^{l+k}u}{\partial x^l\partial t^k}=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i^{(l)}(x)\varphi_j^{(k)}(t)u_{i,j},\quad l,k=0,1,2,\cdots. \tag{20}$$

上述偏导数在节点 (x_r,t_p) 处的函数近似值为

$$u^{(l,k)}(x_r,t_p)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i^{(l)}(x_r)\varphi_j^{(k)}(t_p)u_{i,j},\quad r=0,1,\cdots,m;\quad p=0,1,\cdots,s. \tag{21}$$

因此,式(16)的重心插值配点法的计算格式为

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i^{(0)}(x_r)\varphi_j^{(1)}(t_p)-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i^{(2)}(x_r)\varphi_j^{(0)}(t_p)+\right. \\ &\left.\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^s\varphi_i(x_r)\varphi_j(t_p)\right]u_{i,j}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot u(x,0)+\frac{1}{\alpha\cdot \epsilon^2}\cdot G(u)=0. \end{aligned} \tag{22}$$

上式可改写成微分矩阵形式,即

$$[D^{(0,1)}-P\cdot D^{(2,0)}+Q\cdot I]U-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot u(x,0)+\frac{1}{\alpha\cdot \epsilon^2}\cdot G(u)=0, \tag{23}$$

式(23)中: $P=\text{diag}\left\{\frac{1}{\alpha}\right\};Q=\text{diag}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$.

1.4 相容性分析

设函数 $u(x,t)$ 运用重心 Lagrange 插值法逼近的数值解为 $p_{m,s}(x,t)$,定义误差函数 $e(x,t)=u(x,t)-p_{m,s}(x,t)$. 引用文献[13]中的重要定理.

引理 1 若 $u(x,t)\in C^{(n+1)}(\Xi),\Xi=[a,b]\times[0,T],n=\max\{m,s\}$,定义的 $e(x,t)$ 成立. 即

$$|e(x,t)|\leqslant\|u^{(n+1)}\|_{\infty}\left\{c_1\left(\frac{eL_x}{2m}\right)^m+c_2\left(\frac{eL_t}{2s}\right)^s\right\}. \tag{24}$$

式(24)中: c_1,c_2 为常数; e 为自然对数; $m+1,s+1$ 代表 x,t 方向的节点数; $L_x=\frac{b-a}{2},L_t=\frac{T}{2}$.

类似地,可推得

$$\left. \begin{aligned} |e_x(x,t)| &\leqslant \|u^{(n+1)}\|_{\infty}\left\{\tilde{c}_1\left(\frac{eL_x}{2(m-1)}\right)^{m-1}+c_2\left(\frac{eL_t}{2s}\right)^s\right\}, \\ |e_t(x,t)| &\leqslant \|u^{(n+1)}\|_{\infty}\left\{c_1\left(\frac{eL_x}{2m}\right)^m+c_2^*\left(\frac{eL_t}{2(s-1)}\right)^{s-1}\right\}, \\ |e_{xx}(x,t)| &\leqslant \|u^{(n+1)}\|_{\infty}\left\{c_1^*\left(\frac{eL_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}+c_2\left(\frac{eL_t}{2s}\right)^s\right\}. \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

根据引理 1 可推出定理 1.

定理 1 设 $u(x,t)\in C^{(n+1)}(\Xi),\Xi=[a,b]\times[0,T],n=\max\{m,s\}$. $u(x_m,t_s)$ 为 $u(x,t)$ 的数值解,成立 $Du(x_m,t_s)=0$,且 $\lim_{(m,s)\rightarrow\infty}Du(x_m,t_s)=0$. 非线性项 $G(u)$ 满足利普希茨条件,则有

$$|u(x,t)-u(x_m,t_s)|\leqslant C\|u^{(n+1)}\|_{\infty}\left\{c_1^*\cdot\left(\frac{eL_x}{2(m-2)}\right)^{m-2}+c_2^*\cdot\left(\frac{eL_t}{2(s-1)}\right)^{s-1}\right\}. \tag{26}$$

证明 非线性项 $G(u)$ 满足利普希茨条件,则存在常数 $K>0$,成立

$$|G(u(x,t))-G(u(x_m,t_s))|\leqslant K|u(x,t)-u(x_m,t_s)|. \tag{27}$$

由式(1),(8)可知

$$\begin{aligned} Du(x, t) - Du(x_m, t_s) &= u_t(x, t) - u_t(x_m, t_s) - \frac{1}{\alpha} [u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x_m, t_s)] + \\ &\frac{1-\alpha}{\alpha} [u(x, t) - u(x_m, t_s)] - \frac{1-\alpha}{\alpha} [u(x, 0) - u(x_m, 0)] + \\ &\frac{1}{\alpha \cdot \epsilon^2} [G(u(x, t)) - G(u(x_m, t_s))] = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5. \end{aligned} \tag{28}$$

式(28)中: $R_1 = u_t(x, t) - u_t(x_m, t_s)$; $R_2 = -\frac{1}{\alpha} [u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x_m, t_s)]$; $R_3 = \frac{1-\alpha}{\alpha} [u(x, t) - u(x_m, t_s)]$,
 $R_4 = -\frac{1-\alpha}{\alpha} [u(x, 0) - u(x_m, 0)]$; $R_5 = \frac{1}{\alpha \cdot \epsilon^2} [G(u(x, t)) - G(u(x_m, t_s))]$.

由引理 1 可知: $R_1 = u_t(x, t) - u_t(x_m, t_s) = e_t(x, t_s) + e_t(x_m, t_s)$, 可推出

$$|R_1| \leq \|u^{(n+1)}\|_\infty \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2m} \right)^m + c_2^* \left(\frac{eL_t}{2(s-1)} \right)^{s-1} \right\}. \tag{29}$$

同理, 可得

$$\left. \begin{aligned} |R_2| &\leq \frac{1}{\alpha} \|u^{(n+1)}\|_\infty \left\{ c_1^* \left(\frac{eL_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} + c_2 \left(\frac{eL_t}{2s} \right)^s \right\}, \\ |R_3| &\leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \|u^{(n+1)}\|_\infty \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2m} \right)^m + c_2 \left(\frac{eL_t}{2s} \right)^s \right\}, \\ |R_4| &\leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \|u^{(n+1)}\|_\infty \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2m} \right)^m \right\}, \\ |R_5| &\leq \frac{K}{\alpha \cdot \epsilon^2} |R_3| = \frac{(1-\alpha)K}{(\alpha\epsilon)^2} \|u^{(n+1)}\|_\infty \left\{ c_1 \left(\frac{eL_x}{2m} \right)^m + c_2 \left(\frac{eL_t}{2s} \right)^s \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

令 $C = \max \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{(1-\alpha)K}{(\alpha\epsilon)^2} \right\}$, 由式(29)及(30)可得结论.

注 1 据文献[14]的重要定理, 类似定理 1 的推导, 易知采用重心有理配点法求解整数阶 Allen-Cahn 方程的误差分析如下.

定理 2 设 $u(x, t) \in C^{n+2}[a, b] \times C^{n+2}[0, T]$, $u(x_m, t_s)$ 是 $u(x, t)$ 运用重心有理配点法求解的数值解, 成立 $Du(x_m, t_s) = 0$, 非线性项 $G(u)$ 满足利普希茨条件, 则

$$|u(x, t) - u(x_m, t_s)| \leq C(h^{\mu_1-1} + \tau^{\mu_2}). \tag{31}$$

式(31)中: $C = c \cdot \max \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{(1-\alpha)K}{(\alpha\epsilon)^2} \right\}$; c 为自然常数. h 是空间步长; τ 是时间步长.

1.5 基于牛顿迭代的 Allen-Cahn 方程

考虑 Allen-Cahn 方程的非线性项 $G(u)$, 在 u_0 处泰勒展开, 可得

$$G(u) \approx G(u_0) + G'(u_0)(u - u_0) = -2u_0^3 + (3u_0^2 - 1)u. \tag{32}$$

从而, 式(23)的 Newton 迭代格式为

$$[D^{(0,1)} - P \cdot D^{(2,0)} + Q \cdot I]u_n + \frac{1}{\alpha \cdot \epsilon^2} \cdot [(3u_{n-1}^2 - 1)u_n - 2u_{n-1}^3] = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot u(x, 0). \tag{33}$$

1.6 一维 Allen-Cahn 方程在重心插值配点法下的计算格式

由节 1.3 和节 1.5 可知, 整数阶 Allen-Cahn 方程在重心插值配点法下的计算格式为

$$[D^{(0,1)} - P \cdot D^{(2,0)} + H \cdot I]u_n = \frac{2u_{n-1}^3}{\alpha \cdot \epsilon^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot u(x, 0). \tag{34}$$

式(34)中: $H = \text{diag} \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{3u_{n-1}^2 - 1}{\alpha \cdot \epsilon^2} \right\}$.

2 数值算例

为便于分析, 定义最大相对误差 E_r . 即 $E_r(M, N) = \frac{\|y_e - y_c\|_\infty}{\|y_e\|_\infty}$. 其中: y_e, y_c 分别为方程的解析解和数值解; $\|\cdot\|_\infty$ 是向量的无穷范数.

2.1 算例一

为了验证数值格式的准确性,选取如下一维 Allen-Cahn 方程. 即

$${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\epsilon^2}u(u^2-1)=B(x,t).$$

(35)

式(35)中:精确解 $u(x,t)=(1+t^3)\sin(1.5\pi x)$, (x,t) 的取值范围为 $[0,1]\times[0,1]$. 则有

$$B(x,t)=\frac{\sin(1.5\pi x)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{3}{1-\alpha}+\frac{3}{3-\alpha}-\frac{6}{2-\alpha}\right)t^{3-\alpha}+\frac{1}{\epsilon^2}[(1+t^3)\sin(1.5\pi x)]^3-\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{9}{4}\pi^2\right)(1+t^3)\sin(1.5\pi x).$$

(36)

取空间节点 $M=30$,时间节点 $N=20$,在 $\epsilon=0.3,\alpha=0.5$ 下方程的精确解与误差分布,分别如图 1, 2 所示. 由图 1,2 可知:两种重心插值配点法的数值解图像均与真解图像逼近,且具有较高的精度.

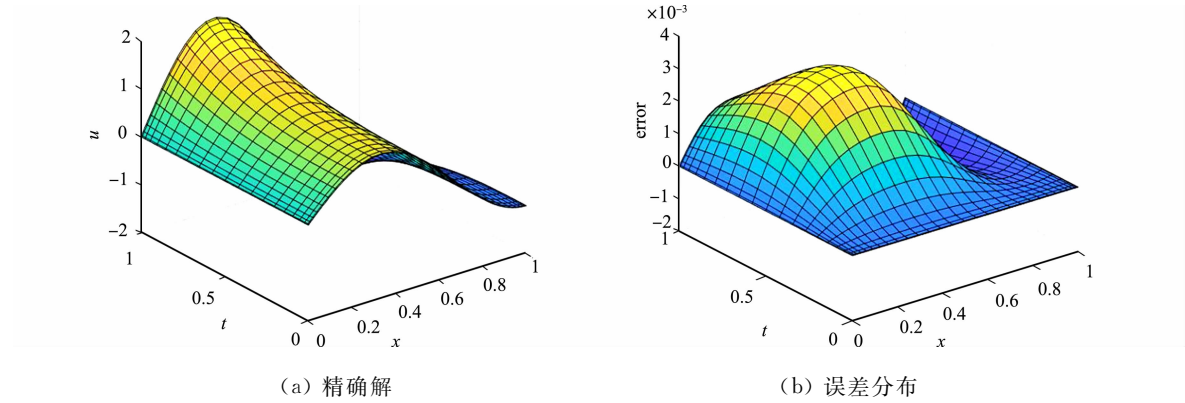


图 1 重心 Lagrange 插值配点法的数值解与误差分布图像($\alpha=0.5$)

Fig. 1 Numerical solution and error distribution images of barycentric lagrange collocation method ($\alpha=0.5$)

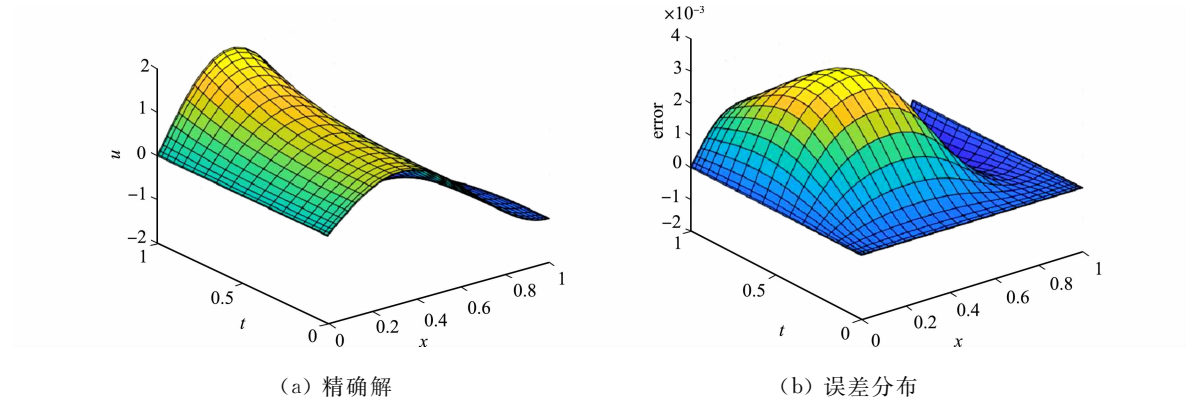


图 2 重心有理插值的数值解与误差分布图图像($\alpha=0.5$)

Fig. 2 Numerical solution and error distribution images of barycentric rational collocation method ($\alpha=0.5$)

在 $\epsilon=0.3$ 下,分别选取不同的剖分节点数和不同的 α ,利用两种重心插值配点法计算 $E_r(M,N)$,结果如表 1 所示.

表 1 两种重心插值配点法求解方程的最大相对误差($\epsilon=0.3$)

Tab. 1 Maximum relative error of solving equations by two barycentric interpolation collocation methods ($\epsilon=0.3$)

$E_r(M,N)\backslash\alpha$	重心 Lagrange 插值配点法			重心有理插值配点法		
	0.2	0.5	0.9	0.2	0.5	0.9
$E_r(4,4)$	$1.061\ 9\times10^{-2}$	$1.076\ 4\times10^{-2}$	$1.097\ 5\times10^{-2}$	$7.796\ 8\times10^{-3}$	$8.157\ 6\times10^{-3}$	$7.852\ 9\times10^{-3}$
$E_r(6,6)$	$4.239\ 2\times10^{-4}$	$7.393\ 7\times10^{-4}$	$3.347\ 0\times10^{-4}$	$8.164\ 3\times10^{-4}$	$1.151\ 7\times10^{-3}$	$6.860\ 9\times10^{-4}$
$E_r(8,8)$	$5.729\ 2\times10^{-4}$	$9.940\ 9\times10^{-4}$	$4.080\ 1\times10^{-4}$	$6.159\ 7\times10^{-4}$	$1.037\ 7\times10^{-3}$	$4.521\ 3\times10^{-4}$
$E_r(10,10)$	$5.907\ 1\times10^{-4}$	$1.028\ 7\times10^{-3}$	$4.239\ 2\times10^{-4}$	$5.898\ 5\times10^{-4}$	$1.028\ 2\times10^{-3}$	$4.229\ 3\times10^{-4}$
$E_r(12,12)$	$5.799\ 2\times10^{-4}$	$1.017\ 8\times10^{-3}$	$4.242\ 0\times10^{-4}$	$5.799\ 4\times10^{-4}$	$1.017\ 8\times10^{-3}$	$4.242\ 1\times10^{-4}$

由表 1 可知:当选取不同的 α 时,该配点格式采用较少的节点数,数值解可达到高精度;网格剖分越

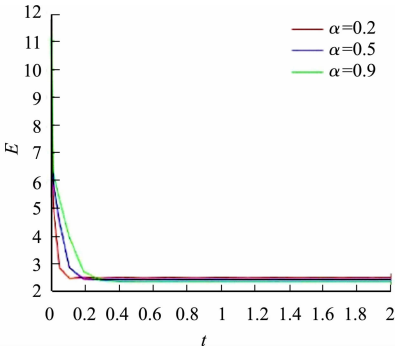
细,数值精度更高.与文献[15]中的经典差分法比较,当剖分节点数为 $M=50,N=2\,500$,最大相对误差可达到 10^{-3} 量级;文中提出的重心 Lagrange 配点法格式选取节点 $M=6,N=6$,最大相对误差就达到 10^{-4} 量级,重心有理配点法格式选取节点 $M=4,N=4$,最大相对误差可达到 10^{-3} 量级.数值算例表明,两种重心插值配点格式剖分较少的节点就能达到很高的精度.

2.2 算例二

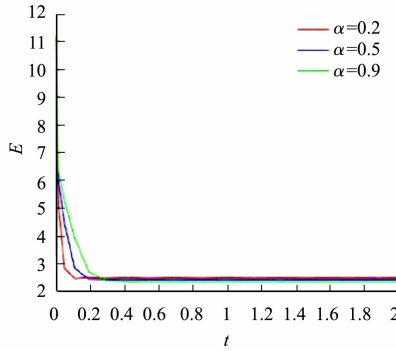
一维 Allen-Cahn 方程的离散能量函数如下

$$E^h(u^n) = \frac{h}{4\epsilon^2} \sum_{i=0}^M [(u_i^n)^2 - 1]^2 + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right]^2 \tag{37}$$

选定初值 $u(x,0)=\epsilon \cdot \sin(1.5\pi x)$,取 Dirichlet 的边界条件,左边界为 $u_0=1$,右边界为 $u_M=-1$, $t \in [0,2]$;结合式(37),令网格剖分为 $M=30,N=20$,固定 $\epsilon=0.3,\alpha$ 分别取 $0.2,0.5,0.9$,则两种重心插值配点法的能量递减,如图 3,4 所示.



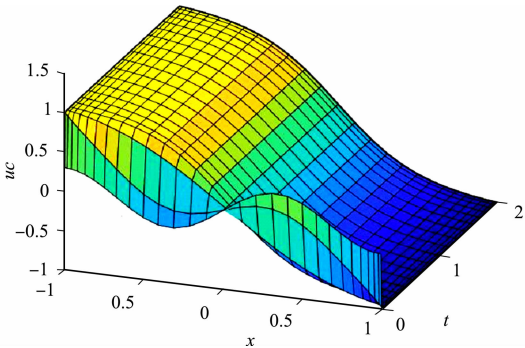
(a) 重心 Lagrange 插值配点法



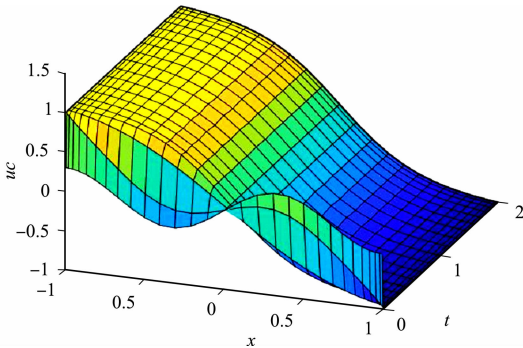
(b) 重心有理插值配点法

图 3 不同插值配点法的能量递减图

Fig. 3 Energy decline images of different interpolation collocation method



(a) 重心 Lagrange 插值配点法



(b) 重心有理插值配点

图 4 不同插值配点法的数值解图像($\alpha=0.2$)

Fig. 4 Numerical solution images of different interpolation collocation method ($\alpha=0.2$)

从图 3 可知:当 α 取不同值时,时间分数阶 Allen-Cahn 方程的能量耗散特性;当 t 增加时,能量泛函 $E(u)$ 随之递减,最终趋于稳定状态.系统的能量耗散速度随着分数阶阶数 α 不同而变化, α 越小,能量衰减越快.此外, $E(u)$ 的曲线受剖分细密程度影响,剖分变细,图像更光滑.从图 4 可知:两种重心插值配点法的数值解图像均与真解图像逼近.

3 结束语

利用 Laplace 变换近似 Caputo 型分数阶导数,将分数阶 Allen-Cahn 方程转化为整数阶问题;在时空方向均利用重心插值配点法离散求解整数阶 Allen-Cahn 方程,并给出配点法格式的相容性误差分析.数值算例结果表明,与文献[15]中的有限差分格式比较,该重心配点格式剖分少量节点数即可达到格式的高精度,并满足能量耗散规律.该方法可以广泛推广到求解其他时间分数阶微分方程.

参考文献:

- [1] FENG Xiaobing, PROHL A. Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows[J]. *Numerische Mathematik*, 2003, 94(1): 33-65. DOI:10. 1007/s00211-002-0413-1.
- [2] WHEELER A A, BOETTINGER W J, MCFADDEN G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys[J]. *Physical Review A (Atomic Molecular & Optical Physics)*, 1992, 45(10): 7424. DOI:10. 1103/PhysRevA. 45. 7424.
- [3] BENNES M, CHALUPECKY V, MIKULA K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2004, 51(2/3): 187-205. DOI:10. 1016/j. apnum. 2004. 05. 001.
- [4] COHEN D S, MURRAY J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1981, 12(2): 237-249. DOI:10. 1007/BF00276132.
- [5] FENG Xinlong, SONG Huailing, TANG Tao, *et al.* Nonlinear stability of the implicit-explicit methods for the Allen-Cahn equation[J]. *Inverse Probl Imaging*, 2013, 7(3): 679-695. DOI:10. 3934/ipi. 2013. 7. 679.
- [6] ZHANG Jian, DU Qiang. Numerical studies of discrete approximations to the Allen-Cahn equation in the sharp interface limit[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(4): 3042-3063. DOI:10. 1137/080738398. DOI:10. 1137/080738398.
- [7] TANG Tao, YU Haijun, ZHOU Tao. On energy dissipation theory and numerical stability for time-fractional phase-field equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2019, 41(6): A3757-A3778. DOI:10. 1137/18M1203560.
- [8] LIU Huan, CHENG Aijie, WANG Hong, *et al.* Time-fractional Allen - Cahn and Cahn - Hilliard phase-field models and their numerical investigation[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2018, 76(8): 1876-1892.
- [9] DU Qiang, YANG Jiang, ZHOU Zhi. Time-fractional Allen - Cahn equations: analysis and numerical methods[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2020, 85(2): 1-30. DOI:10. 1007/s10915-020-01351-5.
- [10] 刘欢. 几类分数阶偏微分方程及近场动力学模型的高效数值算法及应用研究[D]. 济南: 山东大学, 2019. DOI:10. 27272/d. cnki. gshdu. 2019. 000794.
- [11] 张楠. 时间分数阶 Allen-Cahn 和 Cahn-Hilliard 方程的高阶算法[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2020. DOI:10. 27426/d. cnki. gxtdu. 2020. 000111.
- [12] REN Jincheng, SUN Zhizhong, DAI Weizhong. New approximations for solving the Caputo-type fractional partial differential equations[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(4): 2625-2636. DOI:10. 1016/j. apm. 2015. 10. 011.
- [13] YI Shichao, YAO Linquan. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher order time fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2019, 35(5): 1694-1716. DOI:10. 1002/num. 22371.
- [14] LI Jin, CHENG Yongling. Linear barycentric rational collocation method for solving heat conduction equation[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, 37(1): 533-545. DOI:10. 1002/num. 22539.
- [15] 汪精英, 邓杨芳, 翟术英. 利用 Laplace 变换求解分数阶 Allen-Cahn 方程[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2020, 41(4): 549-554. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201910013.
- [16] HIGHAM N J. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2004, 24(4): 547-556. DOI:10. 1093/imanum/24. 4. 547.
- [17] 王兆清, 徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. *计算物理*, 2018, 35(1): 77-86. DOI:10. 19596/j. cnki. 1001-246x. 7585.
- [18] 虎晓燕, 韩惠丽. 重心插值配点法求解分数阶 Fredholm 积分方程[J]. *郑州大学学报(理学版)*, 2017(01): 17-23. DOI:10. 13705/j. issn. 1671-6841. 2016203.
- [19] 邓杨芳, 姚泽丰, 汪精英. 二维 Allen-Cahn 方程的有限差分法/配点法求解[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2020, 41(5): 690-694. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 202001001.
- [20] 翁智峰, 姚泽丰, 赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(1): 133-140. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201806043.

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 黄心中)