DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202012036

Bloch 常数的下界估计

王朝祥

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 建立单位圆盘上一类规范化的全纯函数实部的积分估计,推广 CHEN Huaihui 和 GAUTHIER P M 研究的相应结果.利用这些结果,改进 Bloch 常数 B 的下界估计,得到 $B\geqslant\sqrt{3}/4+3\times10^{-4}$.

关键词: 解析函数;单叶圆盘;Bloch 常数;Schwarz 引理;Schwarz-Pick 引理

中图分类号: O 174.5　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1000-5013(2022)03-0416-09

Estimation of Lower Bound for Bloch Constant

WANG Chaoxiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, the real part of integral estimations for one class normalized holomorphic functions on the unit disk are established, and the corresponding results made by CHEN Huaihui and P M Gauthier are generalized. Using these results, we improve the lower bound estimation for Bloch constant B. In fact, we prove that $B\geqslant\sqrt{3}/4+3\times10^{-4}$.

Keywords: analytic function; univalent disk; Bloch constant; Schwarz lemma; Schwarz-Pick lemma

1　预备知识

单位圆盘 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 内的解析函数类记作 $H(D)$,对给定的 $F\in H(D)$,设 B_F 表示 $F(D)$ 包含的所有单叶圆盘的半径的上确界. Bloch 常数 B 定义为 $B=\inf\{B_F\,|\,F\in H(D)$,且 $F'(0)=1\}$.

确定 Bloch 常数 B 的值是单复变函数的经典问题. Bloch[1] 指出 $B>0$;Ahlfors 等[2] 证明了 B 的一个上界为 $\dfrac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/4)\sqrt{1+\sqrt{3}}}=0.471\ 9\cdots$,并猜测此为 B 的确切值,但这个猜想至今尚未获得肯定或否定的证明.为了探求 Bloch 常数 B 的精确值,Ahlfors[3] 于 1938 年证明了 $B\geqslant\sqrt{3}/4$. 这个结果在此后的半个世纪未再获进展.其间,Heins[4],Pommerenke[5] 和 Minda[6] 分别用不同方法证得相同的结果.直到 1990 年,Bonk[7] 给出了改进,得到 $B>\sqrt{3}/4+10^{-14}$.之后,Chen 等[8] 证明了 7 个引理,并改进了 Bonk 的结论,得到 $B>\sqrt{3}/4+2\times10^{-4}$.本文首先改进文[8]的引理 2 和引理 7,通过对计算过程的一些特别处理,得到一些结论.

2　主要结果

定理 1　Bloch 常数记作 B,则 $B\geqslant\sqrt{3}/4+3\times10^{-4}$.

收稿日期: 2020-12-09
通信作者: 王朝祥(1966-),男,副教授,主要从事函数论的研究. E-mail:wchaox@hqu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11971182);福建省自然科学基金资助项目(2019J01066)

为了证明该定理，做如下准备. 记 $B(D)=\{F\mid F\in H(D),F(0)=0,\sup\limits_{z\in D}|F'(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1\}$，Landau[9] 证明了 $B=\inf\{B_F\mid F\in B(D)$，且 $F'(0)=1\}$.

设 $F(z)\in B(D)$，且 $F'(0)=1$，$F'(z)=f(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots$. 由文献[8]可知 $a_1=0$，$|a_2|\leqslant 1$，$|a_3|\leqslant 21/5$. 还需要用到如下的一些结论，即

命题 1[7]　设 $F\in B(D)$，且 $F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，则当 $|z|\leqslant 1/\sqrt{3}$ 时，$\mathrm{Re}\,F'(z)\geqslant\dfrac{1-\sqrt{3}|z|}{(1-\sqrt{1/3}|z|)^3}$.

命题 2[8]　设 $F\in B(D)$，且 $F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，并假设 $a_i\in\mathbf{R}(i=2,3,\cdots)$，则有

$$f(x\sqrt{2/3})\geqslant\frac{1-\beta x/(1+\alpha)+2\alpha x^2+3\beta x^3/(1+\alpha)-3x^4}{1-\beta x/(1+\alpha)-2\alpha x^2/3+\beta x^3/(3+3\alpha)-x^4/3}.$$

上式中：$0\leqslant x<1$，$\alpha=a_2/4$，$\beta=(\sqrt{2/3}/4)a_3$.

命题 3[8]　设 $F\in B(D)$，且 $F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，并设 $a_i\in\mathbf{R}(i=2,3,\cdots)$，则当 $a_3\geqslant 0$ 时，有

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+0.005\,.$$

2　引理及其证明

引入实函数 $p_1(x)=3x^3(2-3x^2)$，$p_2(x)=\dfrac{4-3x^2-27x^4}{4+x^2-3x^4}$，$p_3(x)=\dfrac{1-\sqrt{3}x}{(1-x/\sqrt{3})^3}$，$B(s)=\int_0^s p_1(x)\mathrm{d}x$，$C(s)=\int_0^s(p_2(x)-p_3(x))\mathrm{d}x$，$G(x,\alpha,\lambda)=\dfrac{1-\lambda x+2\alpha x^2+3\lambda x^3-3x^4}{1-\lambda x-2\alpha x^2/3+\lambda x^3/3-x^4/3}$，并注意到，$G(x\sqrt{3/2},-1/4,0)=p_2(x)$.

引理 1　设 $F(z)\in B(D)$，且 $F'(0)=1$，$F'(z)=f(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots$，则有

$$a_1=0,\ |a_2|\leqslant 1,\ |a_3|\leqslant 21/5-|a_2|^2/2.$$

证明：Bonk[7] 证明 $a_1=0$，$|a_2|\leqslant 1$ 及 $|a_3|\leqslant 5$. Chen 等[8] 进一步证明了 $|a_3|\leqslant 4.2$. 以下证明 $|a_3|\leqslant 21/5-|a_2|^2/2$.

取 $r=2/3$，当 $z\in D$ 时，有 $(1-r^2)|f(rz)|<(1-|rz|^2)|f(rz)|\leqslant 1$. 令 $g(z)=\dfrac{(1-r^2)f(rz)-(1-r^2)}{1-(1-r^2)^2f(rz)}=\dfrac{1-r^2}{2-r^2}(a_2z^2+ra_3z^3+\cdots)=c_2z^2+c_3z^3+\cdots$，则当 $z\in D$ 时，$|g(z)|<1$，由解析函数的系数关系得 $|c_3|\leqslant 1-|c_2|^2$，可得到 $\dfrac{r(1-r^2)}{2-r^2}|a_3|\leqslant 1-\left(\dfrac{1-r^2}{2-r^2}|a_2|\right)^2$. 即 $|a_3|\leqslant\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{2-r^2}{1-r^2}-\dfrac{1-r^2}{2-r^2}|a_2|^2\right)$，则有 $|a_3|\leqslant\dfrac{21}{5}-\dfrac{15}{28}|a_2|^2\leqslant\dfrac{21}{5}-\dfrac{1}{2}|a_2|^2$.

引理 2　设 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant 1/5$，令 $\sigma(\theta,x)=(1-x)^2(2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)-\theta)$，则

$$\int_0^1\sigma(\theta,x)\mathrm{d}x\geqslant k\theta. \tag{1}$$

式(1)中：$k=407/625-(149\ln 5)/5\,625=0.608\,5\cdots$.

证明：只需证明 $0<\theta\leqslant 1/5$ 的情形. 由于

$$\int_0^1(1-x)^2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^1(1-x)^2\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)\mathrm{d}x=$$
$$-\frac{1}{3}\mathrm{Im}((1-x)^3\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)|_0^1)-\frac{1}{3}\mathrm{Im}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{3}\theta-\frac{1}{3}\mathrm{Im}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\theta+\frac{\sin\theta}{3}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{3}\theta+\frac{\sin\theta}{3}\int_0^{\cos\theta}\frac{(\cos\theta-x)^3}{(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{3}\theta+\frac{\sin\theta}{3}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\ln\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=$$
$$\frac{1}{3}\theta+\frac{1}{6}\sin\theta(1-\sin^2\theta+\sin^2\theta\ln\sin^2\theta),$$

所以有

$$\int_0^1\sigma(\theta,x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^2(2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)-\theta)\mathrm{d}x=$$
$$2\int_0^1(1-x)^2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\theta\geqslant$$
$$\frac{1}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta+\sin^2\theta\ln\sin^2\theta)+\frac{1}{3}\theta.$$

由于 $0<\theta\leqslant\frac{1}{5}$,所以有 $0<\sin\theta\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{5}$,$\sin\theta\geqslant\left(1-\frac{1}{6}\theta^2\right)\theta\geqslant\frac{149}{150}\theta$,以及 $1-\sin^2\theta+\sin^2\theta\ln\sin^2\theta\geqslant(24-2\ln 5)/25$. 这是因为 $T(s)=1-s+s\ln s(0<s\leqslant 1/25)$为单调递减函数. 因此,有

$$\int_0^1\sigma(\theta,x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta+\sin^2\theta\ln\sin^2\theta)+\frac{1}{3}\theta\geqslant$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{149}{150}\theta\cdot\frac{24-2\ln 5}{25}+\frac{1}{3}\theta=k\theta.$$

上式中:$k=407/625-(149\ln 5)/5\,625=0.608\,5\cdots$.

引理3 设 $F\in B(D)$,且 $F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$,并假设 $a_i\in\mathbf{R}(i=2,3,\cdots)$,$a_3\leqslant 0$,则当 $0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$时,总有

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{6}B(s)a_3+C(s).\tag{2}$$

上式中:$B(s)=\int_0^s p_1(x)\mathrm{d}x$;$C(s)=\int_0^s(p_2(x)-p_3(x))\mathrm{d}x$.

文[8]中的引理7是本引理的特例. 取 $s=1/(2\sqrt{3})$,就得到文[8]中的引理7.

证明:由命题1,当 $0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{3}$时,$f(x)\geqslant\frac{1-\sqrt{3}x}{(1-x/\sqrt{3})^3}=p_3(x)$,故当 $0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$时,有

$$\int_s^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_s^{1/\sqrt{3}}p_3(x)\mathrm{d}x.$$

因此有

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^s f(x)\mathrm{d}x+\int_s^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^s f(x)\mathrm{d}x+\int_s^{1/\sqrt{3}}p_3(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^{1/\sqrt{3}}p_3(x)\mathrm{d}x+\int_0^s[f(x)-p_2(x)]\mathrm{d}x+\int_0^s[p_2(x)-p_3(x)]\mathrm{d}x=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\int_0^s[f(x)-p_2(x)]\mathrm{d}x+C(s).$$

要证明式(2),只要证明当 $a_3\leqslant 0,0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$ 时,$\int_0^s[f(x)-p_2(x)]\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{6}B(s)a_3$ 即可.

由命题2可知,当 $a_3\leqslant 0,0\leqslant t<1$ 时,有

$$f(t\sqrt{2/3})\geqslant\frac{1-\lambda t+2\alpha t^2+3\lambda t^3-3t^4}{1-\lambda t-2\alpha t^2/3+\lambda t^3/3-t^4/3}=G(t,\alpha,\lambda).\tag{3}$$

上式中:$\alpha=a_2/4$,$\beta=(\sqrt{2/3}/4)a_3$;$\lambda=\frac{\beta}{1+\alpha}=\frac{\sqrt{6}a_3}{3(4+a_2)}$,且$|\alpha|\leqslant 1/4$,$-\frac{7\sqrt{6}}{15}\leqslant\lambda\leqslant 0$.

因此,当 $0\leqslant x<\sqrt{2/3}$ 时,$f(x)\geqslant G(x\sqrt{3/2},\alpha,\lambda)$. 由于有 $\frac{\partial}{\partial\alpha}G(t,\alpha,\lambda)=\frac{24t^2(1-t^2)(1+t^2-\lambda t)}{(3-3\lambda t-2\alpha t^2+\lambda t^3-t^4)^2}$,$\frac{\partial}{\partial\lambda}G(t,\alpha,\lambda)=\frac{24(1+\alpha)(1-t^2)t^3}{(3-3\lambda t-2\alpha t^2+\lambda t^3-t^4)^2}$,注意到 $\lambda\leqslant 0$,所以有$\frac{\partial G}{\partial\alpha}\geqslant 0$,以及$\frac{\partial G}{\partial\lambda}\geqslant 0$.

如果 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\alpha=-\frac{1}{4}$，$\lambda\leqslant 0$，则有

$$3-3\lambda t-2\alpha t^2+\lambda t^3-t^4=3-\lambda(3-t^2)t+(\frac{1}{2}-t^2)t^2\geqslant 3,$$

于是有

$$0\leqslant\frac{\partial}{\partial\lambda}G(t,-\frac{1}{4},\lambda)=\frac{18(1-t^2)t^3}{(3-3\lambda t+t^2/2+\lambda t^3-t^4)^2}\leqslant 2t^3(1-t^2).$$

从而，当 $0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{3}$ 时有

$$0\leqslant\frac{\partial}{\partial\lambda}G(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},\lambda)\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot 3x^3(2-3x^2)=\frac{\sqrt{6}}{4}p_1(x).$$

因此，当 $0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$ 时有

$$0\leqslant\int_0^s\frac{\partial}{\partial\lambda}G\left(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},\lambda\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{6}}{4}\int_0^s p_1(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

现在记 $\alpha_0=\frac{1}{4}a_2$，$\lambda_0=\frac{\sqrt{6}a_3}{3(4+a_2)}$. 从上面的证明中知道，$\frac{\partial}{\partial\alpha}G(t,\alpha,\lambda)\geqslant 0$，可得

$$f(x)\geqslant G(x\sqrt{3/2},\alpha_0,\lambda_0)\geqslant G(x\sqrt{3/2},-1/4,\lambda_0),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{3}. \tag{5}$$

当 $0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$ 时，由式(4)，(5)并注意到 $p_2(x)=G(x\sqrt{3/2},-1/4,0)$，$\lambda_0\leqslant 0$，可得到

$$\begin{aligned}\int_0^s[f(x)-p_2(x)]\mathrm{d}x\geqslant\int_0^s\left(G(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},\lambda_0)-G(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},0)\right)\mathrm{d}x=\\ -\int_0^s\int_{\lambda_0}^0\frac{\partial}{\partial\lambda}G(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x=\\ -\int_{\lambda_0}^0\int_0^s\frac{\partial}{\partial\lambda}G(x\sqrt{3/2},-\frac{1}{4},\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\geqslant\\ \frac{1}{4}\sqrt{6}\lambda_0\int_0^s p_1(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}a_3}{3(4+a_2)}B(s)\geqslant\frac{1}{6}B(s)a_3.\end{aligned}$$

上式中：$a_3\leqslant 0$，$0\leqslant s\leqslant 1/\sqrt{3}$；$B(s)=\int_0^s p_1(x)\mathrm{d}x$. 引理 3 证毕.

引理 4　设 $F\in B(D)$，且 $F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，并假设 $a_i\in\mathbf{R}(i=2,3,\cdots)$，则有

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+A_0(1+a_2)^{\frac{3}{2}}. \tag{6}$$

上式中：$A_0=3\sqrt{3}/446=0.011\ 65\cdots$.

文[8]的引理 2 中估计式(6)得到的是 $A_0=0.01\ 09$，显然，文中的估计更优.

证明：设 $w\in D_{\sqrt{3}}=\{w\,\big|\,|w|<\sqrt{3}\}$，令

$$\begin{cases}\gamma(w)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1-w}{1-w/3},\\ G(w)=\dfrac{1}{4}w(3-w)^2,\\ H(w)=\dfrac{w}{(w-1)^2}\left(\dfrac{1}{G(w)}f(\gamma(w))-1\right),\end{cases}$$

则 $|\gamma(w)|<1$，$\gamma'(w)=\frac{-2\sqrt{3}}{(3-w)^2}$，$1-|\gamma(w)|^2=\frac{6-2|w|^2}{|3-w|^2}$，而且 $H(1)=\frac{3}{4}(1+a_2)$，$H'(1)=\frac{1}{8}(12a_2-3\sqrt{3}a_3+4)$.

Bonk[7]证明了，$H(w)$ 在 $\overline{D}$：$|w|\leqslant 1$ 上解析，$\mathrm{Re}(H(w))$ 是 $\overline{D}$：$|w|\leqslant 1$ 上的调和函数，当 $|w|<1$ 时，$\mathrm{Re}(H(w))\geqslant 0$. 从而当 $w\in\overline{D}$ 时，$\mathrm{Re}(H(w))\geqslant 0$. 特别地，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$H(x)=\mathrm{Re}(H(x))\geqslant 0$. 由 $H(w)$ 的定义可得，

$$f(\gamma(x))\gamma'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)^2H(x),0\leqslant x\leqslant 1. \tag{7}$$

经积分可得

$$\int_0^1 f(\gamma(x))\gamma'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x+(1-x)^2H(x))\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(1-x)^2H(x)\mathrm{d}x.$$

于是可得

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{1/\sqrt{3}} f(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(1-x)^2H(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

由此可得$\int_0^{1/\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$,因此对于 $a_2=-1$,引理 4 成立.

以下证明当 $-1<a_2\leqslant 1$ 时,引理 4 也成立.

首先证明当 $|w|\leqslant r$ 时,$|H(w)|<R$. 这里 r,R 是预先取定的两正数:$r=14/9$,$R=21r/2=49/3$. 对 $|w|\leqslant r<\sqrt{3}$,显然有 $|\gamma(w)|<1$,$1-|\gamma(w)|^2=\frac{2(3-|w|^2)}{|3-w|^2}$. 因此有

$$|f(\gamma(w))|\leqslant\frac{1}{1-|\gamma(w)|^2}=\frac{|3-w|^2}{2(3-|w|^2)},|w|\leqslant r.$$

当 $|w|=r$ 时,有

$$|H(w)|=\left|\frac{w}{(1-w)^2}\left(\frac{4f(\gamma(w))}{w(3-w)^2}-1\right)\right|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}\left(\frac{2}{3-r^2}+r\right)=\frac{19\ 044}{1\ 175}<R.$$

而由 $H(w)$ 的定义可知其在 $|w|\leqslant r$ 上解析,因此,当 $|w|\leqslant r$ 时,$|H(w)|<R$.

假设 $z\in D$,令 $w=w(z)=\frac{r-r^2z}{r-z}$,$\Phi(z)=\frac{1}{R}H(w(z))=\alpha+\beta z+\cdots$,$\varphi(z)=\frac{\Phi(z)-\alpha}{z(1-\alpha\Phi(z))}=\frac{1}{z}(\frac{\beta}{1-\alpha^2}z+\cdots)=\mu+\mu_1z+\cdots$. 其中:$\alpha=\Phi(0)$;$\beta=\Phi'(0)$;$\mu=\varphi(0)=\frac{\Phi'(0)}{1-\Phi^2(0)}=\frac{\beta}{1-\alpha^2}$.

由于 $\alpha=\frac{1}{R}H(1)=\frac{3}{4R}(1+a_2)$,故可得 $0<\alpha\leqslant\frac{3}{2R}$. 由 $\beta=\frac{1-r^2}{Rr}H'(1)=\frac{r^2-1}{8Rr}(3\sqrt{3}a_3-12a_2-4)$,根据引理 1,有

$$|3\sqrt{3}a_3-12a_2-4|\leqslant 3\sqrt{3}|a_3|+12|a_2|+4\leqslant-\frac{3}{2}\sqrt{3}a_2^2+12|a_2|+\frac{63}{5}\sqrt{3}+4\leqslant 16+\frac{111}{10}\sqrt{3}.$$

因此,$|\beta|\leqslant\frac{r^2-1}{8Rr}(16+\frac{111}{10}\sqrt{3})$,$|\mu|=\frac{|\beta|}{1-\alpha^2}<\frac{1}{4}$.

下面,寻求一个绝对常数 $k_1>0$,使得当 $|\theta|\leqslant k_1\sqrt{\alpha}$ 时,就有 $\mathrm{Re}(H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\geqslant R[\alpha-(\theta/k_1)^2]$. 然后,利用 Poisson 积分公式转化后对式(8)的积分进行估计,进而证得本引理.

当 $z\in D$ 时,$|w|<r=14/9$,故 $|\Phi(z)|=\frac{1}{R}|H(w)|<1$. 设 D 内的圆 Γ:$\left|z-\frac{r}{1+r^2}\right|=\frac{r}{1+r^2}$,它在映照 $w=\frac{r-r^2z}{r-z}$ 下的像是圆 C:$|w|=1$. 记 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\in\Gamma$,$|\tau|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 应用 Schwarz-Pick 引理得 $\left|\frac{\Phi(z)-\alpha}{1-\alpha\Phi(z)}\right|\leqslant|z|$,于是 $|\varphi(z)|\leqslant 1$. 再次应用 Schwarz-Pick 引理,得 $\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{1-\varphi(0)\varphi(z)}\right|=\left|\frac{\varphi(z)-\mu}{1-\mu\varphi(z)}\right|\leqslant|z|=\rho$. 故 $\varphi(z)$ 落在以$\left[\frac{\mu-\rho}{1-\mu\rho},\frac{\mu+\rho}{1+\mu\rho}\right]$为直径的闭圆盘上,从而 $z\varphi(z)$ 落在以$\frac{\mu-\rho}{1-\mu\rho}\cdot\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$,$\frac{\mu+\rho}{1+\mu\rho}\cdot\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$连线为直径的闭圆盘上. 注意到 $\cos\tau=\frac{1+r^2}{2r}\rho$,故当 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\in\Gamma$ 时,有

$$\mathrm{Re}(z\varphi(z))=\mathrm{Re}(\frac{\Phi(z)-\alpha}{1-\alpha\Phi(z)})\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\rho}{1-\mu\rho}+\frac{\mu+\rho}{1+\mu\rho}\right)\rho\cos\tau-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\rho}{1+\mu\rho}-\frac{\mu-\rho}{1-\mu\rho}\right)\rho=$$
$$\frac{\rho^2}{1-\mu^2\rho^2}\left(\mu^2+\frac{1+r^2}{2r}(1-\rho^2)\mu-1\right),$$

取绝对常数 $k_0=\sqrt{1.22}$,令 $K(\mu)=(1-\alpha)\mu^2+\frac{1+r^2}{2r}(1-\rho^2)\mu-1$,$|\mu|<\frac{1}{4}$. 则有

$$K(\mu)\geqslant(1-\alpha)\mu^2-\frac{1+r^2}{2r}|\mu|-1\geqslant\frac{89}{98}\mu^2-\frac{277}{252}|\mu|-1\geqslant-k_0^2.$$

对给定的 $t\in[0,1]$，令 $\rho_t=t\sqrt{\alpha}/k_0$，则当 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_t$ 时，就有

$$\rho^2\left[(1-t^2\alpha)\mu^2+\frac{1+r^2}{2r}(1-\rho^2)\mu-1\right]\geqslant\rho^2K(\mu)\geqslant-\rho^2k_0^2\geqslant-t^2\alpha,$$

由此可得到

$$\rho^2\left[\mu^2+\frac{1+r^2}{2r}(1-\rho^2)\mu-1\right]\geqslant-t^2\alpha(1-\mu^2\rho^2),$$

从而有

$$\frac{\rho^2}{1-\mu^2\rho^2}\left(\mu^2+\frac{1+r^2}{2r}(1-\rho^2)\mu-1\right)\geqslant-t^2\alpha,0\leqslant\rho\leqslant\rho_t.$$

因此，$\mathrm{Re}\left(\dfrac{\Phi(z)-\alpha}{1-\alpha\Phi(z)}\right)=\mathrm{Re}(z\varphi(z))\geqslant-t^2\alpha$，从而有 $\mathrm{Re}(\Phi(z))\geqslant(1-t^2)\alpha$.

这说明当 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\in\Gamma$ 且 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_t$ 时，总有 $\mathrm{Re}(\Phi(z))\geqslant(1-t^2)\alpha$ 成立.

由 $w=\dfrac{r-r^2z}{r-z}$，可得 $z=\dfrac{r(1-w)}{r^2-w}$，映照 $z=\dfrac{r(1-w)}{r^2-w}$ 与 $w=r\zeta(\zeta\in D)$ 复合得到单位圆到自身的 Möbius 变换：$z=-\dfrac{\zeta-1/r}{1-\zeta/r}$，此为自共形映照.

设 $z_t=\rho_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_t}\in\Gamma\left(|\tau_t|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\Gamma$ 上连接 0 与 $z_t=\rho_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_t}$ 的弧 γ_t，对应圆 C：$|w|=1$ 上连接 1 与 $w_t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_t}(|\theta_t|\leqslant\pi)$ 的弧 c_t，对应圆 C'：$|\zeta|=1/r$ 上连接 $1/r$ 与 $\zeta_t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_t}/r$ 的弧 c'_t. 由于弧 γ_t 和 c'_t 的双曲长度均为 $\displaystyle\int_{c'_t}\frac{2\,|\,\mathrm{d}\zeta\,|}{1-|\,\zeta\,|^2}=2\int_0^{|\theta_t|}\frac{(1/r)\mathrm{d}\theta}{1-1/r^2}=\frac{2r\,|\,\theta_t\,|}{r^2-1}$，两点 0 与 $z_t=\rho_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_t}$ 的双曲距离为 $\ln\left(\dfrac{1+\rho_t}{1-\rho_t}\right)$，因此 $\dfrac{2r\,|\,\theta_t\,|}{r^2-1}\geqslant\ln\left(\dfrac{1+\rho_t}{1-\rho_t}\right)$. 因为 $\rho_t=t\sqrt{\alpha}/k_0\leqslant\sqrt{\alpha}/k_0\leqslant1/(k_0\sqrt{7r})$，所以有

$$|\theta_t|\geqslant\frac{r^2-1}{2r}\ln\left(\frac{1+\rho_t}{1-\rho_t}\right)\geqslant\frac{r^2-1}{2r}\cdot\frac{2\rho_t}{1+\rho_t}\geqslant\frac{r^2-1}{r(1+\rho_t)}\cdot\rho_t\geqslant\frac{r^2-1}{r\left(k_0+1/\sqrt{7r}\right)}\cdot t\sqrt{\alpha}=k_1t\sqrt{\alpha}.$$

上式中：k_1 是一个绝对常数，$k_1=(r^2-1)/(rk_0+\sqrt{r/7})=0.648\,4\cdots$.

因为对于 $\forall z\in\gamma_t$，总有 $0\leqslant|z|\leqslant\rho_t$，且有 $\mathrm{Re}(\Phi(z))\geqslant(1-t^2)\alpha$，因此对于 $w\in c_t$ 总有 $\mathrm{Re}(H(w))=\mathrm{Re}(R\Phi(z))\geqslant R(1-t^2)\alpha$.

假设 $w\in C$，$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，且 $|\theta|\leqslant k_1\sqrt{\alpha}$. 对于每个给定的 θ：$|\theta|\leqslant k_1\sqrt{\alpha}$，令 $t=|\theta|/(k_1\sqrt{\alpha})$，则 $0\leqslant t\leqslant1$，且有 $|\theta|=k_1t\sqrt{\alpha}\leqslant|\theta_t|$. 这就意味着圆 C 上连接 w 与 $\overline{w}$ 的右弧上的点 w' 都有 $\mathrm{Re}(H(w'))\geqslant R(1-t^2)\alpha=R[\alpha-(\theta/k_1)^2]$.

定义 $\lambda=\lambda(\theta)=\alpha-(\theta/k_1)^2$，$|\theta|\leqslant k_1\sqrt{\alpha}$. 因此有

$$\mathrm{Re}(H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\geqslant R[\alpha-(\theta/k_1)^2]=R\lambda(\theta),|\theta|\leqslant k_1\sqrt{\alpha}.$$

上式中：$k_1=0.648\,4\cdots$是找到的一个绝对常数．下面将对式(8)的积分进行估计.

回顾之前所述，$\mathrm{Re}(H(x))\geqslant0(0\leqslant x\leqslant1)$，且 $\mathrm{Re}(H(w))$在$\overline{D}$：$|w|\leqslant1$ 上为调和函数. 根据 Poisson 积分公式，对于实数 x：$0\leqslant x\leqslant1$，有

$$(1-x)^2H(x)=(1-x)^2\mathrm{Re}\,H(x)=\frac{(1-x)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}\mathrm{d}\theta\geqslant$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{k_1\sqrt{\alpha}}R\lambda(\theta)\frac{(1-x)^2(1-x^2)}{1-2x\cos\theta+x^2}\mathrm{d}\theta.$$

因为 $0\leqslant\theta\leqslant k_1\sqrt{\alpha}\leqslant\dfrac{1}{5}$，$\displaystyle\int_0^{\theta}\frac{(1-x)^2(1-x^2)}{1-2x\cos t+x^2}\mathrm{d}t=(1-x)^2(2\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-x)-\theta)=\sigma(\theta,x)$，并且由引理 2 还知道有 $\displaystyle\int_0^1\sigma(\theta,x)\mathrm{d}x\geqslant k\theta$，$k=0.608\,5\cdots$. 所以有

$$(1-x)^2H(x)\geqslant\frac{R}{\pi}\int_0^{k_1\sqrt{\alpha}}\lambda(\theta)\mathrm{d}\sigma(\theta,x)=$$

$$\frac{R}{\pi}[\lambda(\theta)\sigma(\theta,x)]_0^{k_1\sqrt{\alpha}}-\frac{R}{\pi}\int_0^{k_1\sqrt{\alpha}}\sigma(\theta,x)\lambda'(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{R}{\pi}\int_0^{\alpha}\sigma(\theta(\lambda),x)\mathrm{d}\lambda. \tag{9}$$

上面的计算中,只须注意到 $\theta=k_1\sqrt{\alpha-\lambda}\geqslant 0$,利用分部积分公式即可得到. 于是根据式(8),(9),有

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(1-x)^2H(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}R}{2\pi}\int_0^1\int_0^{\alpha}\sigma(\theta,x)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}R}{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^1\sigma(\theta,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}R}{2\pi}\int_0^{\alpha}k\theta\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}R}{2\pi}\int_0^{\alpha}k_1k\sqrt{\alpha-\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}k_1kR}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}Rk_1k}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4R}(1+a_2)\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{56\pi}k_1k(1+a_2)^{\frac{3}{2}}>\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{446}(1+a_2)^{\frac{3}{2}}.$$

至此,引理4证毕.

引理5 设 $F\in B(D)$,$F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$,并假设 $a_3\geqslant 0$,$a_2=|a_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,$|\theta_0|\leqslant\pi/3$. 若 $0\leqslant r<1$,$\theta\in[-\pi,\pi]$,则有

1) 当 $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$,或 $\frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 时,$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+5\times10^{-3}$;

2) 当 $\frac{\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0$ 时,$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$;

3) 当 $\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}B_0a_3\cos\theta+C_0$;

4) 当 $\frac{5\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\pi$ 时,$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}A_0$.

上式中:$A_0=\frac{3\sqrt{3}}{446}$;$B_0=B(\frac{1}{3\sqrt{3}})=\int_0^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}p_1(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{6\,561}$;$C_0=C(\frac{1}{3\sqrt{3}})=\int_0^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}(p_2(x)-p_3(x))\mathrm{d}x=\frac{57\sqrt{3}}{64}+\frac{12\sqrt{3}}{7}\ln\frac{5}{7}-\frac{20}{7}\arctan\frac{\sqrt{3}}{9}$,$w_0=\frac{10}{21}\cdot\frac{C_0}{B_0}$. 以上常数的参考数值如下:$A_0=0.011\,65\cdots$;$B_0=0.001\,981\cdots$;$C_0=0.000\,328\,2\cdots$;$w_0=0.078\,89\cdots$.

证明:对于 $0\leqslant r<1$,$\theta\in[-\pi,\pi]$,定义 $F_\theta(z)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(\bar{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})})$,$z\in D$.

因为 $F(z)(z\in D)$ 解析,故 $F_\theta(z)(z\in D)$ 也解析. 记 $F'_\theta(z)=f_\theta(z)$,则有

$$f_\theta(z)=\frac{1}{2}(f(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\overline{f(\bar{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})})=1+|a_2|\cos(\theta_0+2\theta)z^2+a_3\cos3\theta z^3+\cdots=$$

$$1+A_2z^2+A_3z^3+\cdots+A_nz^n+\cdots.$$

上式中:$|\theta_0|\leqslant\pi/3$;$a_3\geqslant 0$;$A_2=|a_2|\cos(2\theta+\theta_0)$,$A_3=a_3\cos3\theta,\cdots,A_n=|a_n|\cos(n\theta+\arg a_n),\cdots$ 均为实数.

由 $F_\theta(z)$ 的定义可知

$$F_\theta(0)=0,\qquad F'_\theta(0)=f_\theta(0)=1,\qquad |F'_\theta(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1,\qquad z\in D.$$

因此有,$F_\theta(z)\in B(D)$,$F'_\theta(z)=f_\theta(z)=1+A_2z^2+A_3z^3+\cdots$. 其中:$A_i\in\mathbf{R}(i=2,3,\cdots)$,且有

$$\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\mathrm{Re}\,f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\overline{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})})=f_\theta(r).$$

1) 当 $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$,或 $\frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 时,因为 $\cos3\theta\geqslant 0$,$a_3\geqslant 0$,$A_3=a_3\cos3\theta\geqslant 0$,由命题3可知

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r=\int_0^{1/\sqrt{3}}f_\theta(r)\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+5\times10^{-3}.$$

2）当$\frac{\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0$ 时，$1+A_2=1+|a_2|\cos(2\theta+\theta_0)\geqslant 0$，由引理 4 可知

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r=\int_0^{1/\sqrt{3}}f_\theta(r)\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+A_0\sqrt{(1+A_2)^3}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

3）当$\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$0\geqslant\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\geqslant-3\cos\theta$，$a_3\geqslant 0$，$0\geqslant A_3=a_3\cos 3\theta\geqslant-3a_3\cos\theta$，由引理 3 可知

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r=\int_0^{1/\sqrt{3}}f_\theta(r)\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{6}B_0A_3+C_0\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}B_0a_3\cos\theta+C_0,$$

其中：$B_0=B(1/(3\sqrt{3}))=\int_0^{1/(3\sqrt{3})}p_1(x)\mathrm{d}x$；$C_0=C(1/(3\sqrt{3}))=\int_0^{1/(3\sqrt{3})}(p_2(x)-p_3(x))\mathrm{d}x$.

4）当$\frac{5\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\pi$ 时，$|\theta_0|\leqslant\pi/3$，$\frac{4\pi}{3}\leqslant|2\theta+\theta_0|\leqslant\frac{7\pi}{3}$，$\cos(2\theta+\theta_0)\geqslant-\frac{1}{2}$，$|a_2|\leqslant 1$，$1+A_2=1+|a_2|\cos(2\theta+\theta_0)\geqslant\frac{1}{2}$，由引理 4 可知

$$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r=\int_0^{1/\sqrt{3}}f_\theta(r)\mathrm{d}r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+A_0\sqrt{(1+A_2)^3}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}A_0.$$

3　定理 1 的证明

由于有 $B=\inf\{B_F\,|\,F\in B(D)$，且有 $F'(0)=1\}$，因此可设 $F(z)$为 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$上的解析函数，且 $F(0)=0$，$F'(0)=1$，$\sup\limits_{z\in D}|F'(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1$，$F'(z)=f(z)=1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$. 其中：$|a_2|\leqslant 1$；$|a_3|\leqslant 21/5$.

因 $T(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}z)$仍为 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$上的解析函数，且满足 $T(0)=0$，$T'(0)=1$，$\sup\limits_{z\in D}|T'(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1$. 因此，不失一般性地，可假设 $0\leqslant a_3\leqslant 21/5$，且 $a_2=|a_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 其中：$|\theta_0|\leqslant\pi/3$.

由命题 1 可知，当 $0\leqslant r<\frac{1}{\sqrt{3}}$时，$\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\mathrm{Re}\ f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\geqslant\frac{1-\sqrt{3}r}{(1-r/\sqrt{3})^3}$，因此，当 $0\leqslant|z|<1/\sqrt{3}$时 $\mathrm{Re}\ F'(z)>0$，故 $F(z)$在 $D_{1/\sqrt{3}}=\left\{z\,\middle|\,|z|<1/\sqrt{3}\right\}$内单叶解析.

取 $r_0=\frac{\sqrt{2}A_0}{4(1+w_0)}=0.003\,817\cdots$，$A_0$，$w_0$ 如引理 5 中所定义. 欲证明 $B_F\geqslant\sqrt{3}/4+3\times 10^{-4}$，只须证明，当 $z\in\partial D_{1/\sqrt{3}}=\left\{z\,\middle|\,|z|=1/\sqrt{3}\right\}$时，有

$$|F(\sqrt{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|>\sqrt{3}/4+3\times 10^{-4}\tag{10}$$

即可. 在式(10)中，有

$$|F(\sqrt{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|=|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}[F(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0]|\geqslant\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}r_0]=$$
$$\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r+r_0\cos\theta.$$

1）当$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$，或$\frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{5\pi}{6}$时，由引理 5 可知

$$|F(\sqrt{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|\geqslant\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r+r_0\cos\theta\geqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}+5\times 10^{-3}-r_0>\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 10^{-4}.$$

2）当$\frac{\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0$ 时，$w_0\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，由引理 5 可知

$$|F(\sqrt{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|\geqslant\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r+r_0\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+r_0w_0\geqslant$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+0.00381\times 0.0788>\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 10^{-4}.$$

3) 当$\frac{\pi}{2}-\arcsin w_0\leqslant|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$0\leqslant\cos\theta\leqslant w_0$,$0\leqslant a_3\leqslant 21/5$,$\frac{21}{10}B_0-r_0\geqslant 0$,由引理5可知

$$|F(\sqrt{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|\geqslant\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r+r_0\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}B_0a_3\cos\theta+C_0+r_0\cos\theta\geqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{21}{10}B_0\cos\theta+C_0+r_0\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}-(\frac{21}{10}B_0-r_0)\cos\theta+C_0\geqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}-\left(\frac{21}{10}B_0-r_0\right)w_0+C_0=\frac{\sqrt{3}}{4}+r_0w_0>\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 10^{-4}.$$

4) 当$\frac{5\pi}{6}\leqslant|\theta|\leqslant\pi$时,$-1\leqslant\cos\theta\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$,由引理5可知

$$|F(\sqrt{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|\geqslant\int_0^{1/\sqrt{3}}\mathrm{Re}\,F'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}r+r_0\cos\theta\geqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}A_0-r_0=\frac{\sqrt{3}}{4}+r_0w_0>\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 10^{-4}.$$

综上所述,$|F(\sqrt{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+r_0|>\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 10^{-4}$,这就是式(10).从而证得定理.

参考文献:

[1] BLOCH A. Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation[J]. Annales de la Faculté Des Sciences de Toulouse: Mathématiques,1925,17:1-22.

[2] AHLFORS L V,GRUNSKY H. Über die Blochsche Konstante[J]. Math Z,1937,42:671-673.

[3] AHLFORS L V. An extension of Schwarz's lemma[J]. Trans Amer Math Sot,1938,43:359-364. DOI:10.1090/s0002-9947-1938-1501949-6.

[4] HEINS M. On a class of conformal metrics[J]. Nagoya Math J,1962,21:1-60. DOI:10.1090/S0002-9904-1961-10643-5.

[5] POMMERENKE C H. On Bloch functions[J]. J London Math Soc,1970(2):689-695. DOI:10.1112/jlms/2.Part_4.689.

[6] MINDA C D. Bloch constants[J]. J Analyse Math,1982,41:54-84. DOI:10.1007/BF02803394.

[7] BONK M. On Bloch's constant[J]. Proc Amer Math Soc,1990,110:889-894. DOI:10.1090/s0002-9939-1990-0979048-8.

[8] CHEN Huaihui,GAUTHIER P M. On Bloch's constant[J]. J Anal Math,1996,69(2):275-291. DOI:10.1007/BF02787110.

[9] LANDAU E. Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten[J]. Math Z,1929,30:608-634. DOI:10.1007/BF01187791.

(责任编辑:黄仲一　　英文审校:黄心中)