DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202010045

次立方平面图的单射边染色

李艳怡,陈莉莉

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 如果3条边 e_1,e_2,e_3 按照此顺序形成一条长为3的路或者圈,则称这3条边是连续的. k-单射边染色是对图 G 的边进行染色,使得如果3条边 e_1,e_2,e_3 是连续的,那么,e_1 和 e_3 染不同的颜色.图 G 的单射边色数为所有单射边染色中所用颜色最少的颜色数.文中考虑在限制围长条件下,次立方平面图 G 的单射边色数.

关键词: 次立方图;平面图;围长;单射边染色

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2022)03-0412-04

Injective Edge Coloring of Planar Subcubic Graphs

LI Yanyi, CHEN Lili

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: If three edges e_1, e_2, e_3 form a path or cycle of length three in this order, they are called consecutive. A k-injective edge coloring is a coloring of the edges of G, such that if e_1, e_2, e_3 are consecutive, then e_1 and e_3 receive distinct colors. The injective edge coloring number is the smallest number of colors used in all injective edge colorings of G. In this paper, we consider the injective edge coloring numbers of the planar subcubic graphs in terms of the girth of G.

Keywords: subcubic graph; planar graph; girth; injective edge coloring

1 预备知识

图 G 的单射点染色是对顶点的染色 $f:V(G)\to C=\{1,2,3,\cdots,k\}$,使得如果两个顶点有一个共同的邻点,那么这两个顶点染不同的颜色.单射点色数 $\chi_i(G)=\min\{k:$图 G 有 k-单射点染色$\}$.单射点染色的概念由Hahn等[1]提出,用于编码理论和电脑网络[2]的设计.Hahn等[1]证明,当 $k\geqslant 3$ 时,确定 $\chi_i(G)$ 是否不超过 k 是NP完全的.为了解决分组无线网络的问题,Cardoso等[3]提出了单射边染色的概念.如果3条边 e_1,e_2,e_3 按照此顺序形成一条长为3的路或者圈,则称这3条边是连续的.图 G 的 k-单射边染色是一个映射 $f:E(G)\to C=\{1,2,3,\cdots,k\}$,使得如果边 e_1,e_2,e_3 是连续的,则 $f(e_1)\neq f(e_3)$.单射边色数 $\chi'_i(G)=\min\{k:$图 G 有 k-单射边染色$\}$.Cardoso等[3]证明了确定 $\chi'_i(G)$ 是否不超过 k 是NP困难的.由此可得,确定一般图的单射点色数和单射边色数的精确值是非常困难的,因此,学者们通常从特殊图的角度进行研究.

平面图是一类重要的特殊图,关于平面图的单射点染色已经得到较多结果.文献[4-6]研究了平面图的单射点色数与最大度、围长之间的关系及围长至少为7,5时平面图的单射点色数;Dong等[7]在围长为6的条件下研究平面图的单射点色数;朱海洋等[8]考虑最大度 $\Delta(G)\leqslant 6$ 且不含4,5,6,7-圈的平面

收稿日期: 2020-10-30

通信作者: 陈莉莉(1986-),女,副教授,博士,主要从事图染色的研究.E-mail:lily60612@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701195);福建省自然科学基金资助项目(2020J05058)

图的单射点色数的上界. 除此之外，学者们还考虑了平面图的单射可选性，即对图 G 的每个点 v 分配一个列表 $L(v)$，要求单射染色 f 需满足 $f(v)\in L(v)$，这样的染色称为列表单射染色. 文献[9-12]在围长限制下研究平面图的列表单射色数的界；Brimkov 等[13]考虑了围长为 6 的次立方平面图的单射可选性；卜月华等[14]考虑了 5^--圈和 5^--圈不交的平面图的列表单射染色. 对于单射边染色，Bu 等[15]在限制最大度及最大平均度条件下，给出了稀疏图单射边色数的上界；卜月华等[16]研究了围长至少为 6 且 6-圈与 7^--圈不相交的平面图 G 的单射边色数.

讨论简单次立方平面图的单射边色数. 设 $G=(V,E)$ 是简单平面图，$\Delta=\Delta(G)$ 为 G 的最大度，如果 $\Delta(G)\leqslant 3$，则称 G 是次立方图. 围长 g 表示 G 中最短圈的长度. 得到以下 2 个定理.

定理 1　设 G 是围长至少为 8 的次立方平面图，则 $\chi'_i(G)\leqslant 6$.

定理 2　设 G 是围长至少为 6 的次立方平面图，则 $\chi'_i(G)\leqslant 7$.

使用权转移的方法进行定理的证明. 权转移的主要思想是对图 G 的点和面进行赋权，使得初始权值之和为负数. 研究图内部的结构性质并且给定权转移规则，进行点点之间，面面之间及点面之间的权值转移，最终得到新的权值之和为非负数. 由于权转移过程是在图内部进行的，所以总权值应当不会变化，这就导出了矛盾.

在下面的证明中，对于图 G 的一个染色 f，任意 $e\in E(G)$，用 $F(e)$ 表示在染色过程中边 e 不能使用的颜色集合.

2　定理 1 的证明

假设图 G 是定理 1 的极小反例，即 G 是围长至少为 8 的次立方平面图，$\chi'_i(G)>6$，但对于图 G 的任意一个子图 G'，$\chi'_i(G')\leqslant 6$，则得到 G 的如下性质. 用 $C=\{1,2,3,4,5,6\}$ 表示颜色集.

引理 1　图 G 不存在 1 度点.

证明：假设图 G 存在 1 度点 u，v 是它唯一的邻点. 令 $G'=G-u$，由 G 的极小性，存在 G' 的用 6 种颜色的单射边染色 f'. 因为 $|F(uv)|\leqslant 4$，所以令 $f(uv)\in C\backslash F(uv)$，而对 $e\in E(G)\backslash\{uv\}$，有 $f(e)=f'(e)$. 这样就得到 G 的用 6 种颜色的单射边染色 f，与假设矛盾.

引理 2　图 G 中 2 度点只能和 3 度点相邻.

证明：假设 u，v 是 G 中 2 个相邻的 2 度点，w 是 v 的另一个邻点. 令 $G'=G-v$，由 G 的极小性，存在 G' 的用 6 种颜色的单射边染色 f'. 因为 $|F(uv)|\leqslant 4$，$|F(vw)|\leqslant 5$，所以可以先对边 vw 染色，再对边 uv 染色，此外，对于 $e\in E(G)\backslash\{uv,vw\}$，有 $f(e)=f'(e)$. 这样就得到 G 的用 6 种颜色的单射边染色 f，与假设矛盾.

引理 3　G 中 3 度点最多和 1 个 2 度点相邻.

证明：假设 u 是 G 中 1 个 3 度点，u 与 2 个 2 度点 v 和 w 相邻，u 的另一个邻点为 u_1，w 的另一个邻点为 w_1. 令 $G'=G-u$，由 G 的极小性，存在 G' 的用 6 种颜色的单射边染色 f'. 删去边 ww_1 上的颜色，此时，$|F(uv)|\leqslant 4$，$|F(uw)|\leqslant 5$，$|F(uu_1)|\leqslant 5$，$|F(ww_1)|\leqslant 4$，所以先对边 uu_1 进行染色，再染边 ww_1，最后分别对边 uv，uw 进行染色. 此外，对于 $e\in E(G)\backslash\{uv,uw,uu_1,ww_1\}$，有 $f(e)=f'(e)$. 这样就得到 G 的用 6 种颜色的单射边染色 f，与假设矛盾.

引理 4　在 C_n 上，最多有 $\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ 个 2 度点.

证明：由引理 2，3 可知，任意 2 个 2 度点之间至少有 2 个 3 度点，所以，C_n 上最多有 $\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ 个 2 度点.

根据平面图的欧拉公式

$$V-E+F=2,$$

以及握手定理

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2E,\qquad \sum_{f\in F(G)} d(f)=2E,$$

可以得到

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-6)=-12.$$

分别对图 G 的顶点和面进行初始赋权,$\forall v\in V(G)$,令 $\omega(v)=2d(v)-6$,$\forall f\in F(G)$,则令 $\omega(f)=d(f)-6$,那么可以得到初始总权值为

$$\sum_{v\in V(G)}\omega(v)+\sum_{f\in F(G)}\omega(f)=-12.$$

给定权转移规则 R:每个面给该面上的每个 2 度点权值 1.

如果 v 是 2 度点,则初始权值 $\omega(v)=-2$.因为 2 度点存在 2 个面上,且从每一个面得到 1 的权值,所以得到新的权值 $\omega'(v)=-2+1+1=0$.

如果 v 是 3 度点,则初始权值 $\omega(v)=0$.由于 3 度点没有进行权转移,所以新权值 $\omega'(v)=0$.

对于面 f,初始权值 $\omega(f)=d(f)-6$.根据 R,面要给其上的每一个 2 度点 1 的权值.又根据引理 4,面上最多存在 $\left\lfloor\frac{d(f)}{3}\right\rfloor$ 个 2 度点,所以新权值

$$\omega'(f)=d(f)-6-1\times\left\lfloor\frac{d(f)}{3}\right\rfloor,$$

由于 $g\geqslant 8$,即 $d(f)\geqslant 8$,所以 $\omega'(f)\geqslant 0$ 恒成立.

由于权转移是在图内部进行,所以总权值不会变化,也就是

$$-12=\sum_{v\in V(G)}\omega(v)+\sum_{f\in F(G)}\omega(f)=\sum_{v\in V(G)}\omega'(v)+\sum_{f\in F(G)}\omega'(f)\geqslant 0$$

出现矛盾,所以极小反例 G 不存在,定理 1 得证.

3 定理 2 的证明

假设图 G 是定理 2 的极小反例,即 G 是围长至少为 6 的次立方平面图,$\chi'_i(G)>7$,但对于图 G 的任意一个子图 G',$\chi'_i(G')\leqslant 7$,则得到 G 的如下性质.用 $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 表示颜色集.

引理 5 图 G 不存在 1 度点.

证明:假设 G 中存在 1 度点 u,v 是它唯一的邻点.令 $G'=G-u$,由 G 的极小性,存在 G' 的用 7 种颜色的单射边染色 f'.因为 $|F(uv)|\leqslant 4$,所以令 $f(uv)\in C\backslash F(uv)$,而对 $e\in E(G)\backslash\{uv\}$,$f(e)=f'(e)$.这样得到 G 的用 7 种颜色的单射边染色 f,与假设矛盾.

引理 6 图 G 不存在 2 度点.

证明:假设 u 是 G 中的 2 度点,w 和 v 是它的两个邻点,令 $G'=G-u$,由 G 的极小性,存在 G' 的用 7 种颜色的单射边染色 f'.因为 $|F(uv)|\leqslant 6$,$|F(uw)|\leqslant 6$,且边 uw 和 uv 可以染相同的颜色,因此,可以得到 G 的用 7 种颜色的单射边染色 f,与假设矛盾.

给定点的初始权值为 $\forall v\in V(G)$,$\omega(v)=2d(v)-6$,面的初始权值为 $\forall f\in F(G)$,$\omega(f)=d(f)-6$,根据欧拉公式,初始总权值为

$$\sum_{v\in V(G)}\omega(v)+\sum_{f\in F(G)}\omega(f)=-12.$$

根据以上所得性质,G 中只存在 3 度点,因此,所有点的总权值为

$$\sum_{v\in V(G)}\omega(v)=0.$$

对于面,由于 $g\geqslant 6$,即 $d(f)\geqslant 6$,所以得到所有面的总权值为

$$\sum_{f\in F(G)}\omega(f)\geqslant 0.$$

最终可以得到

$$-12=\sum_{v\in V(G)}\omega(v)+\sum_{f\in F(G)}\omega(f)\geqslant 0$$

出现矛盾,也就是极小反例 G 不存在,定理 2 得证.

4 结束语

通过极小反例及权转移的方法,研究次立方平面图的结构性质,最终得到其在限制围长条件下的单射边色数的上界.

参考文献：

[1] HAHN G, KRATOCHVÍL J, SIRÁN J, *et al*. On the injective chromatic number of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2002, 256: 179-192. DOI: 10.1016/S0012-365X(01)00466-6.

[2] BERTOSSI A A, BONUCCELLI M A. Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1995, 3(4): 441-449. DOI: 10.1109/90.413218.

[3] CARDOSO D M, CERDEIRA J O, CRUZ J P, *et al*. Injective edge coloring of graphs[J]. Filomat, 2019, 33(19): 6411-6423. DOI: 10.2298/FIL1919411C.

[4] BU Yuehua, CHEN Dong, RASPAUD A, *et al*. Injective coloring of planar graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(4): 663-672. DOI: 10.1016/j.dam.2008.08.016.

[5] BU Yuehua, LU Kai. Injective coloring of planar graphs with girth 7[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2012, 4(2): 1250034. DOI: 10.1142/S1793830912500346.

[6] 卜月华，叶飘飘. 围长至少为 5 的平面图的 injective 染色[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版)，2017，40(1)：1-8. DOI：10.16218/j.issn.1001-5051.2017.01.00.

[7] DONG Wei, LIN Wensong. Injective coloring of planar graphs with girth 6[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313: 1302-1311. DOI: 10.1016/j.disc.2013.02.014.

[8] 朱海洋，王淑玲，刘嫚，等. 平面图的单射染色[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(4)：7-13. DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2017.04.002.

[9] BORODIN O V, IVANOVA A O. List injective colorings of planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2011, 311: 154-165. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.008.

[10] BU Yuehua, LU Kai. List injective coloring of planar graphs with girth 5, 6, 8[J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(10/11): 1367-1377. DOI: 10.1016/j.dam.2012.12.017.

[11] BU Yuehua, YANG Sheng. List injective coloring of planar graphs with girth $g\geqslant 5$[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2014, 6(1): 145006. DOI: 10.1142/S1793830914500062.

[12] CHEN Hongyu, WU Jianliang. List injective coloring of planar graphs with girth $g\geqslant 6$[J]. Discrete Mathematics, 2016, 339(12): 3043-3052. DOI: 10.1016/j.disc.2016.06.017.

[13] BRIMKOV B, EDMOND J, LAZAR R, *et al*. Injective choosability of subcubic planar graphs with girth 6[J]. Discrete Mathematics, 2017, 340(10): 2538-2549. DOI: 10.1016/j.disc.2017.05.014.

[14] 卜月华，黄超媛. 5^--圈和 5^--圈不交的平面图的 injective-列表染色[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版)，2020，43(3)：241-250. DOI：10.16218/j.issn.1001-5051.2020.03.001.

[15] BU Yuehua, QI Chentao. Injective edge coloring of sparse graphs[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2018, 10(2): 1850022. DOI: 10.1142/S1793830918500222.

[16] 卜月华，陈雯雯. 围长至少是 6 的平面图的 injective-边染色[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版)，2020，43(1)：19-25. DOI：10.16218/j.issn.1001-5051.2020.01.004.

（**责任编辑：**黄晓楠　　**英文审校：**黄心中）