

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202112014



采用刚体运动学的结构几何 构造分析解析方法

李霞, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 提出一种基于刚体运动学方法描述刚体的位置, 用线性代数方法分析结构体系的多余约束和自由度的结构几何构造分析解析方法. 结果表明: 文中方法可以计算系统多余约束和自由度的数量, 还可以具体确定多余的约束和缺少必要约束的自由度; 文中方法与几何方法具有明确的对应关系, 概念简单, 应用范围不受限制, 更具有一般性, 可以直接应用于空间问题.

关键词: 结构力学; 几何构造分析; 刚体运动学; 线性代数; 解析方法

中图分类号: O 342 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2022)03-0297-06

Analytic Method of Structural Geometrical Construction Analysis Based on Kinematics

LI Xia, ZHOU Kemin

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The position of rigid body is described based on rigid body kinematics, the redundant constraints and degrees of freedom of structural system are analyzed by linear algebraic method. The results show that the proposed method can calculate the numbers of redundant constraints and degrees of freedom, and can also specifically determine the redundant constraints and degrees of freedom without necessary constraints; the proposed method has a clear corresponding relationship with the geometric method, simple concept, unlimited application scope and more generality, it can be directly applied to space problems.

Keywords: structural mechanics; geometrical construction analysis; rigid body kinematics; linear algebra; analytic method

结构几何构造分析是结构分析和优化的重要基础^[1-5], 特别是桁架^[3-5]、张弦结构^[6]、网架结构^[7]及折叠结构^[8]等工程结构设计经常需要进行几何构造分析. 目前, 几何构造分析以几何方法为主, 静力法等作为补充. 对于简单结构, 几何方法较为直观且容易理解和操作. 然而, 几何方法无法解决许多实际复杂结构, 仅限于平面结构体系^[9-10]. 文献^[11-14]从矩阵位移法出发, 提出的解析方法更具一般性, 但其仅适用于桁架和刚架等杆系结构, 任意形状的刚体则需要转化为没有多余约束的几何不变的等效桁架结构, 但对于形状复杂或与周围连接较复杂的刚体, 这种转化并不容易. 张速等^[15]提出几何作图法. 舒开鸥等^[16]根据运动学推导了一些性质, 对几何分析有一定的帮助. 徐子善^[17]提出用齐次坐标分析平行链杆约束. 然而, 以上方法都无法扩展应用的范围.

收稿日期: 2021-12-29

通信作者: 周克民(1962-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事结构优化设计的研究. E-mail: zhoukm@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572131); 福建省科技计划引导性项目(2019H0012)

必要约束和多余约束可以有許多組合. 對於含有多餘約束的結構系統, 認定多餘約束的方法並不唯一. 對於缺少必要約束的結構系統, 補充必要約束的方法也不唯一. 目前, 各種分析方法都無法找出所有可能的多餘約束, 也不能確定所有可以補充必要約束的約束形式. 基於此, 本文提出一種基於運動學的結構幾何構造分析解析方法.

1 位置和約束分析

1.1 位置的表示方法

與幾何方法一樣, 可以選取點或剛體作為研究對象. 剛體 b 上點 j 的位移 \mathbf{V}_j^b (假設位移無限小, 即當前位置瞬時運動狀態) 可以用隨基點 o 平動 \mathbf{V}_o^b 和相對於基點的轉動 $\boldsymbol{\theta}^b$ 表示, 即

$$\mathbf{V}_j^b = \mathbf{V}_o^b + \boldsymbol{\theta}^b \times \mathbf{r}_j^b. \tag{1}$$

式(1)中: \mathbf{r}_j^b 為剛體 b 的基點到點 j 的向量.

1.2 約束的向量表達式

約束包括鏈杆約束和鉸約束. 連接剛體 1 上的點 i 和剛體 2 上的點 j 的鏈杆約束為

$$(\mathbf{V}_i^1 - \mathbf{V}_j^2) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2}$$

式(2)中: \mathbf{n} 為點 i, j 之間的鏈杆方向向量.

剛體 1, 2 在點 j 的鉸約束為

$$\mathbf{V}_j^1 = \mathbf{V}_j^2. \tag{3}$$

如果剛體 2 上的點 j 沿 \mathbf{n} 方向有另一點 k , 在一個剛體上兩點之間的長度不變, 則有

$$(\mathbf{V}_j^2 - \mathbf{V}_k^2) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4}$$

聯立式(2), (4), 可得

$$(\mathbf{V}_i^1 - \mathbf{V}_k^2) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{5}$$

比較式(2), (5)可知, 鏈杆約束可以在剛體上沿約束向量方向等效移動, 該移動必須在一個剛體上(式(4)成立的條件), 這類似於力在剛體上沿力的作用線方向靜力等效移動的性質, 故將此性質稱為“鏈杆約束在剛體上的等效移動”.

1.3 約束的矩陣表達式

假設系統有 N 個自由度, 用向量 \mathbf{X} 表示; 系統有 M 個約束, 用約束方程表示為

$$\mathbf{q}_j \mathbf{X} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \tag{6}$$

式(6)中: \mathbf{q}_j 為約束向量, 約束向量與約束嚴格一一对應.

定義約束方程係數矩陣 \mathbf{Q} 為

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_M^T]^T. \tag{7}$$

將所有約束統一寫成約束方程, 即

$$\mathbf{QX} = 0. \tag{8}$$

1.4 約束方程係數矩陣的性質

對於幾何不變體系, 所有位移為零. 因此, 幾何不變體系的式(8)僅有零解. 約束方程係數矩陣的秩 $R = \text{rank}(\mathbf{Q})$ 為必要約束數量, $L = M - R > 0$, L 為多餘約束的數量. 根據線性代數理論, 式(8)僅有零解的充要條件是 $R = N$. 如果 $F = N - R > 0$, 則系統有 F 個未約束的自由度.

如果需要具體明確系統缺少哪些必要的自由度, 以及哪些約束是多餘的, 則需進一步分析. 根據線性方程組理論, 採用求解線性方程組的消元法, 通過行初等變換, 將約束方程係數矩陣轉換為對角矩陣. 為了記錄行變換過程, 將單位矩陣 \mathbf{I} 放在約束矩陣右側, 採用行初等變換消去 \mathbf{Q} 的非對角元成為 $\overline{\mathbf{Q}}$ (行向量記作 $\overline{\mathbf{q}}_j$), 單位矩陣 \mathbf{I} 成為 \mathbf{P} , 即 $\mathbf{PQ} = \overline{\mathbf{Q}}$. 如果集合 $S_b = \{j | \overline{\mathbf{q}}_j = 0\}$ 不為空, $\overline{\mathbf{Q}}$ 中存在零向量 $\overline{\mathbf{q}}_i = 0$, 即

$$\sum_{j \in S_b} p_{i,j} \mathbf{q}_j = 0. \tag{9}$$

式(9)中: $p_{i,j}$ 是矩陣 \mathbf{P} 的分量, 即約束 $\{\mathbf{q}_j, j \in S_b\}$ 線性相關, 所以必然含有多餘約束.

這些性質同樣適用於平面問題和空間問題. 簡單起見, 以平面問題為例進行敘述.

上述是基於體系瞬時狀態的無限小位移運動分析, 無法區分幾何瞬變體和幾何常變體, 研究常變狀

态需要建立一般位置的运动方程.

2 应用算例

例 1 分析桁架结构几何构造.

解法 1: 例 1 结构(解法 1), 如图 1 所示. 图 1 中: 1~3 为研究对象(此处表示结点); x, y 为坐标系; 括号中的数字为约束编号; 图中尺寸均无量纲, 下同.

以结点为研究对象, 共 3 个结点, 作为平面问题, 共 6 个自由度($N=6$), 6 个约束($M=6$).

约束方程为

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0, & u_2 &= 0, & 4u_3 - 3v_3 &= 0, \\ u_1 - u_3 &= 0, & 4u_2 - 3v_2 &= 4u_3 - 3v_3, & v_1 - v_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)中: $v_1 \sim v_3$ 为位移的竖直分量; $u_1 \sim u_3$ 为位移的水平分量.

约束方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

约束方程系数矩阵的秩 $R=5$, 系统有 1 个多余约束($M-R=1$), 1 个未约束的自由度($N-R=1$).

约束方程系数矩阵经行初等变换后, 可得

$$PQ = \bar{Q}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

式(12)第 6 行为

$$3q_1 - 4q_2 + q_3 + q_5 - 3q_6 = 0, \quad (13)$$

即约束(1), (2), (3), (5), (6)中任意 1 个约束都可以作为多余约束, 因为 q_4 与其他变量线性无关, 所以约束(4)是必要约束.

由 $\bar{Q}X=0$ 的第 1 行和第 5 行, 可得 $4u_1=4u_3=3v_3$, 说明 u_1, u_3, v_3 这 3 个自由度中缺少 1 个必要约束, 增加其中 1 个约束即可得到几何不变体系.

解法 2: 例 1 结构(解法 2), 如图 2 所示.

以结点 1~3 构成的三角桁架(1 个刚体)为研究对象, 系统有 3 个自由度($N=3$), 3 个约束($M=3$).

以结点 1 为基点, 约束方程为

$$v_1 = 0, \quad u_1 - 3\theta = 0, \quad 4u_1 - 3(v_1 + 4\theta) = 0. \quad (14)$$

约束方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

经计算可得 $R=2, M-R=1, N-R=1$, 故有 1 个多余约束, 1 个自由度.

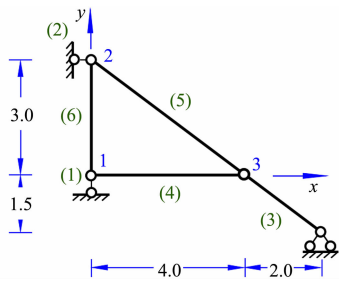


图 1 例 1 结构(解法 1)

Fig. 1 Structure of example 1 (solution 1)

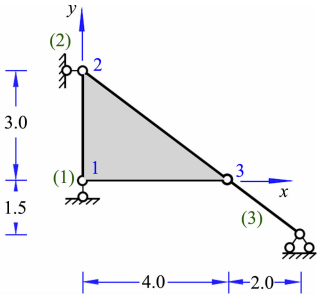


图 2 例 1 结构(解法 2)

Fig. 2 Structure of example 1 (solution 2)

约束方程系数矩阵经行初等变换后,可得

$$PQ=\overline{Q}, \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(16)

由式(16)第 3 行可知, $3q_1-4q_2+q_3=0$, 即约束向量线性相关, 这说明约束(1)~(3)中存在 1 个多余约束. 由式(16)可知, $v_1=0, u_1=3\theta$, 即 $u_1=3\theta$ 缺少 1 个必要约束. 显然, 解法 2(以刚体为研究对象)比解法 1(以每个结点为研究对象)的自变量和约束方程少很多.

例 2 3 个刚片两两通过 1 对平行链杆连接, 分析其结构几何构造.

这是 3 刚片规则的 1 个特例, 因为这个结构不能采用常规的几何构造分析方法, 只能采用“无限远”的概念^[1-2], 该概念在欧氏几何中并未定义, 是一个很模糊的概念, 缺乏理论依据.

采用解析方法, 以第 3 个刚片为基础, 结构如图 3 所示. 图 3 中: 1, 2 为研究对象(此处表示刚片). 3 对平行链杆方向分别记作 $n_1=n_2, n_3=n_4$ 和 $n_5=n_6$, 并假设铰的位置不重合. 由于两对平行链杆(1)-(2), (3)-(4)导致两个刚片都只能平动, 分别记作 V^1, V^2 , 共 2 个自由度.

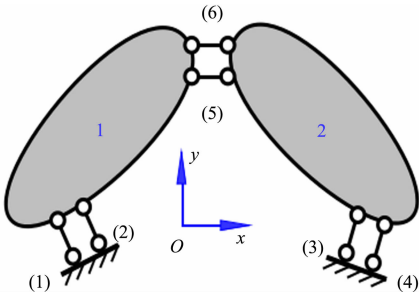


图 3 例 2 结构
Fig. 3 Structure of example 2

平行链杆约束(5)-(6)为

$$(V^1-V^2) \cdot n_5=0.$$

(17)

由于刚片 1, 2 瞬时平动, 所以每个刚片上任意位置的速度各自相同, 而约束(5)-(6)的两个链杆平行, 约束向量也相同, 故两个平行链杆的约束表达式一样, 完全等价, 有 1 个多余约束, 1 个必要约束. 因此, 还存在 1 个自由度, 该体系是有 1 个多余约束, 1 个自由度的几何可变体系.

上述分析也可用解析形式表达, 两对平行链杆约束(1)-(2), (3)-(4)为

$$V_j^b \cdot n_j=(V_0^b+\theta^b \times r_j^b) \cdot n_j=0, \quad b=1, \quad j=1, 2; b=2, \quad j=3, 4.$$

(18)

平行链杆约束(5)-(6)为

$$(V_j^1-V_j^2) \cdot n_j=0, \quad j=5, 6.$$

(19)

记 $n_j=[l_j \quad m_j]^T, r_j^b=[x_j^b \quad y_j^b]^T$, 式(18), (19)可写为分量形式, 即

$$u_0^b l_j+v_0^b m_j+\theta^b(x_j^b m_j-y_j^b l_j)=0, \quad b=1, \quad j=1, 2; b=2, \quad j=3, 4,$$

(20)

$$(u_0^1-\theta^1 y_j^1-u_0^2+\theta^2 y_j^2) l_j+(v_0^1+\theta^1 x_j^1-v_0^2-\theta^2 x_j^2) m_j=0, \quad j=5, 6.$$

(21)

6 个约束可写成线性方程组形式, 即

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & x_1^1 m_1-y_1^1 l_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & x_2^1 m_2-y_2^1 l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & x_3^2 m_3-y_3^2 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 & m_4 & x_4^2 m_4-y_4^2 l_4 \\ l_5 & m_5 & x_5^1 m_5-y_5^1 l_5 & l_5 & m_5 & -x_5^2 m_5+y_5^2 l_5 \\ l_6 & m_6 & x_6^1 m_6-y_6^1 l_6 & l_6 & m_6 & -x_6^2 m_6+y_6^2 l_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ \theta^1 \\ u_0^2 \\ v_0^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix}=0.$$

(22)

若

$$l_j(y_{j+1}^b-y_j^b) \neq m_j(x_{j+1}^b-x_j^b), \quad b=1, 2, \quad j=2b-1,$$

(23)

约束方程系数矩阵经行初等变换后,可得

$$\overline{Q}=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_5 & m_5 & 0 & l_5 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(24)

式(23)表示当平行链杆不重合, 当且仅当约束不相互平行($n_1 \neq n_3 \neq n_5$)时, 约束方程系数矩阵的秩 $R=5, M-R=1, N-R=1$, 体系有 1 个多余约束, 1 个未约束的自由度. 当 3 对平行链杆相互平行($n_1 = n_3 = n_5$)时, 约束方程系数矩阵会增加 1 个线性相关的关系, 因此, 会多 1 个多余约束, 少 1 个必要约束, $R=3, M-3=2, N-R=2$, 体系有 2 个多余约束, 2 个未约束的自由度.

例 3 例 3 结构及分析过程, 如图 4 所示.

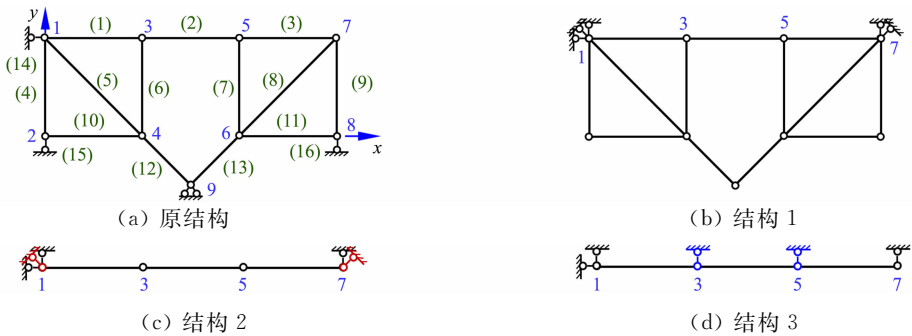


图 4 例 3 结构及分析过程

Fig. 4 Structure and analysis procedure of examples 3

解法 1: 例 3 结构用常规方法分析较为复杂, 采用解析方法(链杆在刚体上等效移动)则非常简单. 约束(12), (13), (15), (16)在支座方向分别沿杆件 4-1, 6-7, 2-1 和 8-7 移动到结点 1, 7, 形成结构 1(图 4 (b)); 依次去除二元体, 形成结构 2(图 4(c)). 显然, 结点 1, 7 各有 1 个多余约束, 结点 3, 5 在竖直方向各有 1 个自由度. 去除 2 个多余约束, 在 2 个自由度方向施加 2 个约束, 形成结构 3(图 4(d)), 这是没有多余约束的几何不变体系. 因此, 原结构是有 2 个多余约束, 2 个自由度的几何可变体系.

采用刚体运动学的代数方法进行分析. 约束方程系数矩阵 Q 的秩为 $R=14, N=M=16, M-R=2, N-R=2$, 故有 2 个多余约束, 2 个自由度.

经行初等变换后, 可得 \bar{Q} 中 $\bar{q}_8 = \bar{q}_{15} = 0$, 对应地, 有

$$\begin{bmatrix} p_8 \\ p_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

由 $PQ = \bar{Q}$, 可得

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_8 - q_9 + q_{13} - q_{14} - q_{16} = 0, \quad q_4 - q_5 + q_{12} - q_{14} + q_{15} = 0, \tag{26}$$

即约束(式(1), (2), (3), (8), (9), (13), (14)和(16))及(式(4), (5), (12), (14)和(15))每组约束中各有 1 个多余约束.

约束方程经行初等变换后, 可分解为

$$u_1 = v_1 = v_2 = u_3 = u_5 = u_7 = v_7 = v_8 = 0, \tag{27}$$

$$u_2 = v_3 = u_4 = v_4, \quad -v_5 = u_6 = -v_6 = u_8. \tag{28}$$

式(27), (28)中: 式(27)各项对应约束自由度; $(u_2, v_3, u_4, v_4), (v_5, u_6, v_6, u_8)$ 两组位移中各有 1 个自由度, 即这两组位移中对应各施加 1 个约束, 成为几何不变体系(式(28)也同时表示了几何可变体系的变形形态).

解法 2: 以结点 1~4 和结点 5~8 分别围成的部分各构成 2 个刚片, 以其为研究对象, 结构如图 5 所示. 以每个刚片的左下角结点 2, 6 为基点, 约束方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta^1 \\ u_6 \\ v_6 \\ \theta^2 \end{bmatrix} = 0. \tag{29}$$

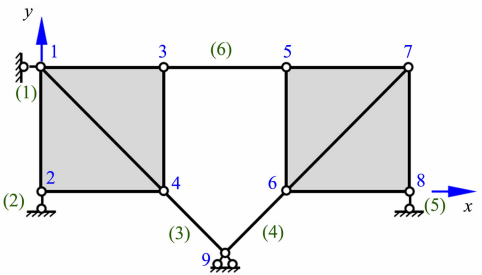


图 5 例 3 结构(解法 2)

Fig. 5 Structure of example 3 (solution 2)

约束方程经行初等变换后,可得

$$u_2=\theta^1,\quad v_2=0,\quad u_6=-v_6=\theta^2,\tag{30}$$

$$-q_1+q_2+q_3=0,\quad -q_1+q_4-q_5+q_6=0.\tag{31}$$

由式(30),(31)可知: $(u_2,\theta^1),(u_6,v_6,\theta^2)$ 两组位移中各有 1 个自由度,各缺少 1 个必要约束;两组约束(式(1),(2)和(3)),(式(1),(4),(5)和(6)) 中各有 1 个多余约束.

3 结 束 语

基于运动学的解析方法为结构几何构造分析提供了有效的方法,特别是对采用几何方法分析有困难的问题,其效果更为显著.该方法可以得到更多的结构信息,还可以直接应用于空间结构的几何组成分析,无需补充更多规则和技巧.

参 考 文 献:

[1] CHEN Yao,SAREH P,FENG Jian. Effective insights into the geometric stability of symmetric skeletal structures under symmetric variations[J]. International Journal of Solids and Structures,2015,69/70:277-290. DOI:10. 1016/j. ijsolstr. 2015. 05. 023

[2] 袁行飞,董石麟. 多自应力模态索穹顶结构的几何构造分析[J]. 计算力学学报,2001,18(4):483-487. DOI:10. 3969/j. issn. 1007-4708. 2001. 04. 019.

[3] OHSAKI M,KATOH N. Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,2005,29(3):190-197. DOI:10. 1007/s00158-004-0480-2.

[4] CERVEIRA A,AGRA A,BASTOS F,*et al.* A new branch and bound method for a discrete truss topology design problem[J]. Computational Optimization and Applications,2013,54(1):163-187. DOI:10. 1007/s10589-012-9487-6.

[5] 郝宝新,周志成,曲广吉,等. 桁架拓扑优化几何稳定性判定法和约束方案比较[J]. 北京航空航天大学学报,2019,45(8):1663-1673. DOI:10. 13700/j. bh. 1001-5965. 2018. 0624.

[6] 罗尧治. 索杆张力结构几何稳定性分析[J]. 浙江大学学报(理学版),2000,27(6):608-611. DOI:10. 3321/j. issn: 1008-9497. 2000. 06. 005

[7] 罗尧治,陆金钰. 斜放四角锥网架可动性判定研究[C]//第十一届空间结构学术会议论文集. 南京:[出版者不详], 2005:133-139.

[8] 赵洪斌,卢成江,吴知丰,等. 杆系可展开结构静动定特性及几何稳定性探讨[J]. 哈尔滨工业大学学报,2007,39(6):857-860. DOI:10. 3321/j. issn:0367-6234. 2007. 06. 005.

[9] 龙驭球,包世华,袁驷. 结构力学(I): 基本教程[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2012.

[10] 朱慈勉,张伟平. 结构力学(上册)[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2016.

[11] PELLEGRINO S. Structure computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix[J]. International Journal of Solids and Structures,1993,30(21):3025-3035.

[12] 袁驷. 程序结构力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2008.

[13] 叶康生,袁驷. 空间几何构造分析的有限单元法[J]. 力学与实践,2003,25(1):23-26. DOI:10. 6052/1000-0992-2001-342.

[14] 吴耀鹏,吴耀欢. 平面体系几何组成分析的解析法研究[J]. 力学与实践,2012,34(6):62-64. DOI:10. 6052/1000-0879-11-304.

[15] 张速,王媛. 平面几何构造分析的无极速度图法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2005,28(10):1325-1329. DOI:10. 3969/j. issn. 1003-5060. 2005. 10. 023.

[16] 舒开鹂,郭子涛,陈彬,等. 平面杆件体系几何组成分析的运动学方法[J]. 力学与实践,2021,43(3):435-438. DOI: 10. 6052/1000-0879-20-511.

[17] 徐子善. 齐次坐标在结构几何组成分析中的应用[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),1996,28(2):183-185.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 方德平)