

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202011023



调和映照与调和 K -拟共形映照 的边界 Schwarz 引理

李鸿萍

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 建立单位圆盘 D 上调和映照与调和 K -拟共形映照的边界 Schwarz 引理. 进一步地, 当 $K=1$ 时, 文中结果与解析函数经典的边界 Schwarz 引理相一致.

关键词: 调和映照; 拟共形映照; 边界 Schwarz 引理; Poisson 积分; 第一类椭圆积分

中图分类号: O 174.55

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2022)02-0279-06

Boundary Schwarz Lemma for Harmonic Mappings and Harmonic K -Quasiconformal Mappings

LI Hongping

(School of Mathematical Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We establish a variant of Schwarz lemma at the boundary for harmonic mappings and harmonic K -quasiconformal mappings of the unit disk D . Furthermore, if $K=1$, our result coincides with the classical boundary Schwarz lemma for analytic function.

Keywords: harmonic mappings; quasiconformal mappings; boundary Schwarz lemma; Poisson integral; first kind elliptic integral

1 预备知识

记 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 为复平面上的单位圆盘, $T=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 为单位圆周, \overline{D} 为 D 的闭包, 即 $\overline{D}=D\cup T$. 对于 $z\in D$, 定义复变量函数 f 的形式导数为

$$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y), \quad f_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y).$$

由文献[1]可知: f 在 D 上局部单叶、保向当且仅当其雅可比行列式 J_f 满足如下性质

$$J_f(z)=|f_z(z)|^2-|f_{\bar{z}}(z)|^2>0.$$

定义 f 的拉普拉斯算子为

$$\Delta f=4f_{\bar{z}z}.$$

一个复值且具有二阶连续可导的函数 f 如果满足 $\Delta f=0$, 则称它为调和映照. 由于单位圆盘是单连通区域, 由文献[2]可知: 若 f 为 D 上的调和映照, 则存在解析函数 h 和 g , 使得 $f=h+\overline{g}$. 调和映照的上述规范表示在 $g(0)=0$ 的假设下是唯一的. 进一步地, 假设 F 为 T 上的有界可积函数. 那么, f 具有如下的泊松积分表示

收稿日期: 2020-11-12

通信作者: 李鸿萍(1979-), 女, 讲师, 主要从事代数及函数论的研究. E-mail: lhp306@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金面上资助项目(11971182); 福建省自然科学基金面上资助项目(20191ZB032)

$$f(z) = P[F](z) = \int_0^{2\pi} P(r, t - \varphi) F(e^{it}) dt, \quad z = re^{i\varphi} \in D.$$

(1)

式(1)中: $P(r, t - \varphi)$ 为泊松核函数, $P(r, t - \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}$.

经典的 Schwarz 引理表明,对于 D 到自身内的解析函数 f ,若满足 $f(0) = 0$,那么,对于一切的 $z \in D$ 有 $|f(z)| \leq |z|$.

经典的边界 Schwarz 引理如下.

定理 A^[3] 假设 $f: D \rightarrow D$ 为解析函数,满足 $f(0) = 0$. 进一步地,若 f 在 $z = 1$ 处解析且 $f(1) = 1$,那么下面的结论成立:

- 1) $f'(1) \geq 1$;
- 2) $f'(1) = 1$ 当且仅当 $f(z) \equiv z$.

定理 A 有如下推广.

定理 B^[4] 假设 $f: D \rightarrow D$ 为解析函数,满足 $f(0) = 0$. 进一步地,若 f 在 $z = \alpha \in T$ 处解析且 $f(\alpha) = \beta \in T$,那么下面结论成立:

- 1) $\bar{\beta} f'(\alpha) \alpha \geq 1$;
- 2) $\bar{\beta} f'(\alpha) \alpha = 1$ 当且仅当 $f(z) \equiv e^{i\theta} z$, 其中, $e^{i\theta} = \beta \alpha^{-1}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

当 $\alpha = \beta = 1$ 时,定理 B 与定理 A 是一致的.

解析函数的 Schwarz 引理是复分析的一个基本定理,有着深刻的几何背景,其研究受到了国内外许多数学家的关注,得到了大量的结果^[1-17]. 调和映照作为解析函数的推广,如何将经典的 Schwarz 引理推广到调和映照上,近年来受到了国内外许多同行的关注,并得到了多种形式的估计,有些估计是精确的^[6,9,15,18-19]. 边界 Schwarz 引理在经典平面复分析和多复变函数论上有着重要的应用. 利用经典的边界 Schwarz 引理,文献[12],[13],[16]分别得到了规范的 \mathbf{R}^n 空间上的凸和拟凸双解析映照的边界 Schwarz 引理.

首先,建立调和映照的精确的边界 Schwarz 引理.

定理 1 假设 f 为 D 到自身内的调和映照. 若 f 在 $z = 1$ 处可微且满足 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$,那么,不等式

$$\operatorname{Re}[f_z(1) + f_{\bar{z}}(1)] \geq \frac{2}{\pi}$$

(2)

成立. 其中, $\operatorname{Re}[f_z(1) + f_{\bar{z}}(1)]$ 为 $f_z(1) + f_{\bar{z}}(1)$ 的实部. 该不等式是精确的.

定理 1 可以被推广如下.

定理 2 假设 f 为 D 到自身内的调和映照. 满足 $f(a) = 0$, 这里 $a \in D$. 若 f 在 $z = \alpha \in T$ 处可微且满足 $f(\alpha) = \beta \in T$,那么,不等式

$$\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)(\alpha - a) + f_{\bar{z}}(\alpha)(\bar{\alpha} - \bar{a}))] \geq \frac{2}{\pi}$$

(3)

成立.

特别地,当 $a = 0, \alpha = \beta = 1$ 时,定理 2 与定理 1 一致.

假设 $f(z)$ 为 D 到 $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ 上的单叶、保向调和映照,如果存在一个常数 $K \geq 1$,使得

$$K(f) := \sup_{z \in D} \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \leq K,$$

(4)

则称 $f(z)$ 为调和 K -拟共形映照.

调和拟共形映照是共形映照的推广,近年来围绕调和映照如何成为拟共形映照的问题吸引了许多同行的关注,得到了许多结果^[20-24]. 另一个结果是建立调和 K -拟共形映照的边界 Schwarz 引理,特别地,当 $K = 1$ 时,文中结果和定理 A 一致.

对于 $L > 0$,定义函数 $\Phi_L(s)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi_L(s) &:= \mu^{-1}(\mu(s)/L), \quad 0 < s < 1; \\ \Phi_L(0) &:= 0, \quad \Phi_L(1) := 1. \end{aligned}$$

上式中: $\mu(s)$ 为 Grötsch 极值区域 $D \setminus [0, s]$ 的模^[24-25]. 称这样的 $\Phi_L(s)$ 为 Hersch-Pfluger 偏差函数. 这里的函数 μ 也可以表示成第一类椭圆积分, 令

$$\chi(r) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}, \quad 0 < r < 1, \quad (5)$$

那么,

$$\mu(r) = \frac{\pi}{2} \frac{\chi(\sqrt{1-r^2})}{\chi(r)}, \quad 0 < r < 1. \quad (6)$$

定理 C^[24] 设 $K \geq 1$, 而 f 为 D 到自身上的 K -拟共形映照, 满足 $f(0)=0$. 那么,

$$|f(z)| \leq P[\Psi_K](|z|), \quad z \in D. \quad (7)$$

式(7)中:

$$\Psi_K(e^{it}) = \begin{cases} 2\Phi_K(\cos \frac{1}{2}t)^2 - 1, & 0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2\Phi_{1/K}(\cos \frac{1}{2}t)^2 + 4\Phi_K(1/\sqrt{2})^2 - 3, & \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi \end{cases} \quad (8)$$

为 f 的边界函数. 进一步地, 有

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - P[\Psi_K](r)}{1 - r} = L_K.$$

这里

$$L_K := \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d(\Phi_{1/K}(s)^2)}{s \sqrt{1-s^2}} \quad (9)$$

为 K 的单调递增函数, 满足

$$\lim_{K \rightarrow 1} L_K = L_1 = 1, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} L_K = 0. \quad (10)$$

利用定理 C 可以得到调和 K -拟共形映照的边界 Schwarz 引理如定理 3.

定理 3 设 f 为 D 到自身上的调和 K -拟共形映照. 若 f 在 $z=1$ 处可微且满足 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$, 那么,

$$\operatorname{Re}[f_z(1) + f_{\bar{z}}(1)] \geq M(K) := \max \left\{ \frac{2}{\pi}, L_K \right\}. \quad (11)$$

这里的 L_K 由式(9)给出.

注 1 由文献[26]中的定理 2.2 可知: 当 $1 \leq K \leq 1.104$ 时, $L_K \geq \frac{2}{\pi}$; 当 $L_K \geq \frac{2}{\pi}$ 时, $K \in [1, \log_2 \pi]$.

进一步地, 若 $K=1$, 那么 $f_{\bar{z}}=0$, 从而得到 f 为 D 上的共形映照. 后面可以证明 $f_z = \operatorname{Re} f_z \geq 1$. 说明当 $K=1$ 时, 定理 3 和定理 A 是一致的.

定理 4 设 f 为 D 到自身上的调和 K -拟共形映照, 满足 $f(a)=0$, 其中, $a \in D$. 若 f 在 $z=a \in T$ 上可微且 $f(\alpha)=\beta$, 那么,

$$\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)(\alpha-a) + f_{\bar{z}}(\alpha)(\bar{\alpha}-\bar{a}))] \geq M(K). \quad (12)$$

这里的 $M(K)$ 由式(11)给出.

特别地, 当 $a=0$ 且 $\alpha=\beta=1$ 时, 定理 4 与定理 3 一致.

2 主要定理的证明

定理 1 的证明: 由文献[7]得到精确的估计式为

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|, \quad z \in D. \quad (13)$$

根据假设 f 在 $z=1$ 处可微, 可知

$$f(z) = 1 + f_z(1)(z-1) + f_{\bar{z}}(1)(\bar{z}-1) + o(|z-1|). \quad (14)$$

利用式(13), 式(14)可以改写成

$$|1 + f_z(1)(z-1) + f_{\bar{z}}(1)(\bar{z}-1) + o(|z-1|)|^2 \leq \left(\frac{4}{\pi} \arctan |z| \right)^2.$$

于是有

$$2\operatorname{Re}[f_z(1)(1-z)+f_{\bar{z}}(1)(1-\bar{z})]\geqslant 1-\left(\frac{4}{\pi}\arctan|z|\right)^2+o(|z-1|). \tag{15}$$

式(15)中,令 $z=r\in(0,1)$,并令 $r\rightarrow 1^-$,可得

$$2\operatorname{Re}[f_z(1)+f_{\bar{z}}(1)]\geqslant \lim_{r\rightarrow 1^-}\frac{1-\left(\frac{4}{\pi}\arctan|z|\right)^2}{1-r}=\frac{4}{\pi}. \tag{16}$$

于是有

$$\operatorname{Re}[f_z(1)+f_{\bar{z}}(1)]\geqslant \frac{2}{\pi}.$$

下面证明精确性. 考虑调和映照

$$U(z)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2x}{1-x^2-y^2}.$$

上式中: $z=x+iy\in D$. 直接计算可得 $U(0)=0, U(1)=1$, 且 $u(z)=\frac{4}{\pi}\arctan r$, 对于任意的 $z=r\in D$.

对于极坐标下 $z=re^{i\theta}\in D$, 有

$$\frac{\partial U(z)}{\partial r}=\left[\frac{\partial U(z)}{\partial z}e^{i\theta}+\frac{\partial U(z)}{\partial \bar{z}}e^{-i\theta}\right].$$

这意味着

$$\frac{\partial U(1)}{\partial r}=\frac{2}{\pi}=\frac{\partial U(1)}{\partial z}+\frac{\partial U(1)}{\partial \bar{z}}.$$

所以, 式(2)是精确的. 证毕.

注 2 由定理 1 的证明可以得到等式

$$\operatorname{Im}[f_z(1)-f_{\bar{z}}(1)]=0. \tag{17}$$

事实上, 假设 $z=e^{i\theta}\neq 1$, 利用式(15)有

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left[f_z(1)\frac{1-e^{i\theta}}{|1-e^{i\theta}|}+f_{\bar{z}}(1)\frac{1-e^{-i\theta}}{|1-e^{-i\theta}|}\right]&=2\operatorname{Re}\left[f_z(1)\frac{\sin(\theta/2)}{|\sin(\theta/2)|}(-i)e^{i\theta}+\right. \\ &\left.f_{\bar{z}}(1)\frac{\sin(\theta/2)}{|\sin(\theta/2)|}ie^{-i\theta/2}\right]\geqslant \frac{o(|e^{i\theta}-1|)}{|1-e^{i\theta}|}. \end{aligned} \tag{18}$$

$\theta\rightarrow 0^\pm$, 不等式(18)可以推出 $2\operatorname{Re}[\mp if_z(1)\pm if_{\bar{z}}(1)]\geqslant 0$. 这就证明了式(17).

定理 2 的证明: 令 $\varphi_a(z)=\frac{a-\bar{z}}{1-\bar{a}z}; D\rightarrow D$ 为 D 上的分式线性映照. 于是, $\varphi_a(z)$ 将点 $z=0$ 和点 $z=a$ 互换. 假设 $\alpha\in T$, 取 $p=\varphi_a(\alpha)\in T$, 有

$$\varphi_a(p)=\alpha,$$

且 $\varphi_a'(p)=\bar{a}\alpha-1$.

对于 $\beta\in T$, 令 $g(\zeta):=\bar{\beta}f(\zeta p)$, 其中, $\zeta\in D$. 那么,

$$g(0)=\bar{\beta}f(\varphi_a(0))=\bar{\beta}f(a)=0,$$

且

$$g(1)=\bar{\beta}f(\varphi_a(p))=\bar{\beta}f(\alpha)=|\beta|^2=1.$$

由定理 1 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g_z(1)+g_{\bar{z}}(1))&=\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)\varphi_a'(p)p+f_{\bar{z}}(\alpha)\overline{\varphi_a'(p)p})]= \\ &=\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)(\alpha-a)+f_{\bar{z}}(\alpha)(\bar{a}-\bar{a}))]\geqslant \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \tag{19}$$

特别地, 若 $a=0$, 那么,

$$\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)\alpha+f_{\bar{z}}(\alpha)\bar{\alpha})]\geqslant \frac{2}{\pi}. \tag{20}$$

证毕.

定理 3 的证明: 由假设 f 在 $z=1$ 处可微, 所以 f 具有展开式(14). 于是

$$2\operatorname{Re}[f_z(1)(1-z)+f_{\bar{z}}(1)(1-\bar{z})]=1-|f(z)|^2+o(|z-1|).$$

(21)

取 $z=r\in(0,1)$, 并令 $r\rightarrow 1^-$, 利用定理 C 得到

$$2\operatorname{Re}[f_z(1)+f_{\bar{z}}(1)]=\lim_{r\rightarrow 1^-}\frac{1-|f(r)|^2}{1-r}=2\lim_{r\rightarrow 1^-}\frac{1-|f(r)|}{1-r}\geqslant 2\lim_{r\rightarrow 1^-}\frac{1-P[\Psi_K](r)}{1-r}=2L_K.$$

(22)

因此, 有 $\operatorname{Re}[f_z(1)+f_{\bar{z}}(1)]\geqslant L_K$.

式(22)与式(2)表明

$$\operatorname{Re}[f_z(1)+f_{\bar{z}}(1)]\geqslant \max\left\{\frac{2}{\pi}, L_K\right\}.$$

(23)

利用注 2, 有 $\operatorname{Im}[f_z(1)-f_{\bar{z}}(1)]=0$.

若 $K\rightarrow 1$, 那么 $L_K\rightarrow 1$ 且 f 为共形映照. 因此, 式(23)和式(17)表明

$$f_z(1)\geqslant 1.$$

即经典的边界 Schwarz 引理. 证毕.

定理 4 的证明: 令 $\varphi_a(z)=\frac{a-\bar{z}}{1-\bar{a}z}:D\rightarrow D$ 为 D 上的分式线性映照. 于是, $\varphi_a(z)$ 将点 $z=0$ 和点 $z=a$ 互换. 假设 $\alpha\in T$, 取 $p=\varphi_a(\alpha)\in T$, 有

$$\varphi_a(p)=\alpha,$$

且 $\varphi_a'(p)=\bar{a}\alpha-1$.

对于 $\beta\in T$, 令 $g(\zeta):=\bar{\beta}f(\zeta p)$, 其中, $\zeta\in D$. 由假设 f 为 D 上的调和 K -拟共形映照, 可得 g 也是 D 上的调和 K -拟共形映照. 进一步地, 有

$$g(0)=\bar{\beta}f(\varphi_a(0))=\bar{\beta}f(a)=0,$$

且

$$g(1)=\bar{\beta}f(\varphi_a(p))=\bar{\beta}f(\alpha)=|\beta|^2=1.$$

利用定理 3 的结论, 得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(g_z(1)+g_{\bar{z}}(1))&=\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)\varphi_a'(p)p+f_{\bar{z}}(\alpha)\overline{\varphi_a'(p)p})]=\\&=\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)(\alpha-a)+f_{\bar{z}}(\alpha)(\bar{a}-\bar{a}))]\geqslant M(K).\end{aligned}$$

(24)

特别地, 若 $a=0$, 那么

$$\operatorname{Re}[\bar{\beta}(f_z(\alpha)\alpha+f_{\bar{z}}(\alpha)\bar{\alpha})]\geqslant M(K).$$

(25)

这里的 $M(K)$ 由式(11)给出.

证毕.

参考文献：

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1936, 42(10): 689-692. DOI: 10. 1090/S0002-9904-1936-06397-4.

[2] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. New York: Cambridge University Press, 2004. DOI: 10. 1007/S11004-006-9028-x.

[3] GARNETT J. Bounded analytic functions[M]. New York: Academic Press, 1981.

[4] LIU Taishun, TANG Xiaomin. A new boundary rigidity theorem for holomorphic selfmappings of the unit ball in \mathbb{C}^n [J]. Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2015, 11: 115-130. DOI: 10. 4310/PAMQ. 2015. v11. n1. a5.

[5] CHEN Shaolin, KALAJ D. The Schwarz type lemmas and the Landau type theorem of mapping satisfying Poisson's equations[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2019, 13: 2049-2068. DOI: 10. 1007/s11785-019-00911-4.

[6] COLONNA F. The Bloch constant of bounded harmonic mappings[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1989, 38(4): 829-840. DOI: 10. 1512/iumj. 1989. 38. 38039.

[7] HEINZ E. On one-to-one harmonic mappings[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1959, 9(1): 101-105. DOI: 10. 2140/pjm. 1959. 9. 101.

[8] KALAJ D. Heinz-Schwarz inequalities for harmonic mappings in the unit ball[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica, 2016, 41: 457-464. DOI: 10. 5186/aasfm. 2016. 4126.

[9] KNEZEVIC M, MATELJEVIC M. On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings[J]. Journal of

- Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334(1): 404-413. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2006. 12. 069.
- [10] KRANTZ S. Function theory of several complex variables[M]. 2nd ed. Rhode Island: American Mathematical Society Chelsea Publishing, 2001.
- [11] KOBAYASHI S. Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1967, 19: 460-480. DOI: 10. 2969/jmsj/01940460.
- [12] LIU Taishun, WANG Jianfei, TANG Xiaomin. Schwarz lemma at the boundary of the unit ball in \mathbf{C}^n and its applications[J]. Journal of Geometric Analysis, 2015, 25: 1890-1914. DOI: 10. 1007/s12220-014-9497-y.
- [13] LIU Taishun, TANG Xiaomin. Schwarz lemma at the boundary of strongly pseudoconvex domain in \mathbf{C}^n [J]. Mathematische Annalen, 2016, 366: 655-666. DOI: 10. 1007/s00208-015-1341-6.
- [14] OSSERMAN R. A sharp Schwarz inequality on the boundary[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128(12): 3513-3517.
- [15] PAVLOVIC M. A Schwarz lemma for the Modulus of a vector-valued analytic function[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2011, 139: 579-594. DOI: 10. 1090/s0002-9939-2010-10578-6.
- [16] LIU Taishun, TANG Xiaomin, ZHANG Wenjun. Schwarz lemma at the boundary and rigidity property for holomorphic mappings on the unit ball of \mathbf{C}^n [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2017, 145(4): 1709-1716. DOI: 10. 1090/proc/13378.
- [17] WU H S. Normal families of holomorphic mappings[J]. Acta Mathematica, 1967, 119: 192-233. DOI: 10. 1007/BF02392083.
- [18] KALAJ D. On harmonic functions on surface with positive Gauss curvature and Schwarz lemma[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2014, 44(5): 1585-1594. DOI: 10. 1216/RMJ-2014-44-5-1585.
- [19] BAI Xiaojin, HUANG Jie, ZHU Jianfeng. The Schwarz lemma at the boundary for harmonic mappings having zero of order p [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021, 44: 827-838. DOI: 10. 1007/s40840-020-00980-1.
- [20] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publications de l'Institut Mathématique, 2004, 76(90): 3-20. DOI: 10. 2298/PIM0476003K.
- [21] KALAJ D, PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2005, 30: 159-165.
- [22] KALAJ D. Quasiconformal and harmonic mappings between Jordan domains[J]. Mathematische Zeitschrift, 2008, 260: 237-252. DOI: 10. 1007/s00209-007-0270-9.
- [23] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2002, 27: 365-372.
- [24] PARTYKA D, SAKAN K. On an asymptotically sharp variant of Heinz's inequality[J]. Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2005, 30: 167-182.
- [25] VUORINEN M. Conformal geometry and quasiregular mappings[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [26] ZHU Jianfeng, ZENG Xiaoming. Estimate for Heinz inequality in the small dilatation of harmonic quasiconformal mappings[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2011, 13(6): 1081-1087. DOI: 10. 1007/s10766-011-0164-7.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)