DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202011040

半范数 $p_{\mathscr{A}}$ 的特征

施慧华

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 记 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}=\{(a_{i,j})_{j=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$,其中,$S_{\ell_1}^{+}=\{x=(x(n))\in\ell_1:\|x\|=1,x(n)\geqslant 0,\forall n\in\mathbf{N}\}$,$p_{\mathscr{A}}(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}|x(j)|$,则$\lim\limits_{i\to\infty}S_i\equiv\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{j}a_{i,j}=0$,当且仅当对任意非空集合 $B\subseteq\mathbf{N}$,任意 $0\leqslant\beta\leqslant p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$,均存在 $C\subseteq B$,满足 $p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\beta$. 对 $B\subset\mathbf{N}$,记 $\varphi_{\mathscr{A}}(B)=p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$,证明了 $\varphi_{\mathscr{A}}$的强无原子性当且仅当理想 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}=\{A\subset\mathbf{N}:p_{\mathscr{A}}(\chi_A)=0\}$ 的无原子性.

关键词: 半范数 $p_{\mathscr{A}}$; $\mathscr{A}$-收敛; 强无原子次测度; 无原子理想

中图分类号: O 177.2　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5013(2021)06-0844-05

Characterization of Semi-Norm $p_{\mathscr{A}}$

SHI Huihua

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}=\{(a_{i,j})_{j=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$, where $S_{\ell_1}^{+}=\{x=(x(n))\in\ell_1:\|x\|=1, x(n)\geqslant 0, \forall n\in\mathbf{N}\}$, $p_{\mathscr{A}}(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}|x(j)|$, then $\lim\limits_{i\to\infty}S_i\equiv\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{j}a_{i,j}=0$, if and only if for any nonempty subset $B\subseteq\mathbf{N}$, any $0\leqslant\beta\leqslant p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$, there always exists $C\subseteq B$ such that $p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\beta$. Let $\varphi_{\mathscr{A}}(B)=p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$ for $B\subset\mathbf{N}$, it is also proved that $\varphi_{\mathscr{A}}$ is strong nonatomic if and only if ideal $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}=\{A\subset\mathbf{N}:p_{\mathscr{A}}(\chi_A)=0\}$ is nonatomic.

Keywords: semi-norm $p_{\mathscr{A}}$; $\mathscr{A}$-convergence; strong nonatomic submeasure; nonatomic ideal

1951 年,Fast[1] 和 Steinhaus[2] 在实数空间引入统计收敛后,统计收敛得到了许多形式的推广,如 A-统计收敛、缺项统计收敛、理想 $\mathscr{I}$-收敛等. Banach 空间中的序列$\{x_n\}$称为统计收敛于 x,若对任意 $\varepsilon>0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{k\leqslant n:\|x_k-x\|\geqslant\varepsilon\}^{\#}}{n}=0$. 文献[3-5]提出统计测度的概念,建立相应的测度理论,等价刻画统计收敛,并证明各种形式的统计收敛均可以用相互的一族统计测度收敛加以刻画. 文献[6-8]也对某些推广的统计收敛给出相应的表示定理. 文献[9-10]利用 ℓ_1 单位球面上的一列正序列 $\mathscr{A}\equiv\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$,定义了一个推广形式的 A-统计收敛($\mathscr{A}$-收敛),给出 $\mathscr{A}$-收敛可以用测度 $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$-收敛描述,并证明 $\mathscr{A}$-收敛等价于统计测度收敛依赖于 $\mathscr{A}$ 的w^*-拓扑性质. 本文在文献[9]的基础上,进一步研究$\mathscr{A}\equiv\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$对应的 ℓ_∞ 上连续半范数 $p_{\mathscr{A}}$ 的特征,并推广文献[11]定义的 Bolzano-Weierstrass 性质(BW)和有限 Bolzano-Weierstrass 性质(FinBW),借助其给出 $p_{\mathscr{A}}$ 及 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}=\{A\subset\mathbf{N}:p_{\mathscr{A}}(\chi_A)=0\}$之间的无原子性.

1　$p_{\mathscr{A}}$ 的特征

文中常用的记号简述如下. $\mathbf{N}$ 表示正整数,对于 $A\subset\mathbf{N}$,χ_A 表示 A 的特征函数,若 $x\in A$,$\chi_A(x)=1$,

收稿日期: 2020-11-19

通信作者: 施慧华(1981-),女,讲师,博士,主要从事基础数学泛函分析的研究. E-mail:shh817@hqu.edu.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11401227, 11226129)

若 x 为其他，则 $\chi_A(x)=0$. 特别地，记 $\chi_{\mathbf{N}}=e$. 用 $A^{\#}$ 表示 A 的基数，X 表示实 Banach 空间，S_X，X^* 分别表示 X 的单位球面和共轭空间. 若 X 是序列空间，用 X^+ 表示 X 的正锥，$X^+=\{x\in X: x(n)\geqslant 0, \forall n\in \mathbf{N}\}$. 序列 $\{x_n\}$ 及 x 均来自 Banach 空间 X，则记 $A(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}: \|x_n-x\|\geqslant\varepsilon\}$，$\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}=\{(a_{i,j})_{j=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$.

定义 1[9]　设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$，$\{x_n\}\subset X$ 及 $x\in X$，若对任意 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{i\to\infty}\langle a_i,\chi_{A(\varepsilon)}\rangle=0$，则称序列 $\{x_n\}$ $\mathscr{A}$-收敛于 x.

对于定义 1 中的序列 $\mathscr{A}=\{a_i\}$，文献[9]定义了 ℓ_∞ 上的连续半范数 $p_{\mathscr{A}}$，即

$$p_{\mathscr{A}}(x)=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\,|\,x(j)\,|,\qquad x=x(j)\in\ell_\infty,$$

并利用次微分证明了 $\mathscr{A}$-收敛等价于一族有限可加测度收敛.

定理 1[9]　设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$，则序列 $\{x_n\}$ $\mathscr{A}$-收敛到 x，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，任意 $\mu\in\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$，$\mu(A(\varepsilon))=0$. 其中，$\mathscr{M}_{\mathscr{A}}=\{x^*\circ\chi_{(\cdot)}: x^*\in\partial p_{\mathscr{A}}(e)\}$.

定理 2　设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$，则有 $\lim\limits_{i\to\infty}S_i\equiv\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_j a_{i,j}=0$，当且仅当对任意非空集合 $B\subseteq\mathbf{N}$，对任意 $0\leqslant\beta\leqslant p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$，均存在 $C\subseteq B$，满足 $p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\beta$.

证明：充分性. 设若不然，存在 $\varepsilon>0$ 和单增数列 $\{i_n\}$，$\{j_n\}$，有 $a_{i_n,j_n}>\varepsilon$，令 $B=\{j_n\}$，$C\subseteq B$ 为任一无限子集，记 $C=\{j_{n_k}\}$，$p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_C(j)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i,j_{n_k}}\geqslant\lim\limits_{k\to\infty}\sup\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i_{n_k},j_{n_k}}\geqslant\varepsilon$ 矛盾.

必要性. 设 $p_{\mathscr{A}}(\chi_B)=\alpha>0$. 当 $\beta=0$ 时，取 C 为 B 的任一单点子集，当 $\beta=\alpha$，取 $C=B$. 证明当 $0<\beta<\alpha$ 时的情况. 记 $B=\{j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots\}\subseteq\mathbf{N}$，则

$$p_{\mathscr{A}}(\chi_B)=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_B(j)=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,j_k},$$

从而存在 $\{i_n\}$，有 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i_n,j_k}$，为方便讨论，设 $\alpha=\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i,j_k}$.

构造以下 3 个满足需要的数列.

1) 由题设 $\lim\limits_{i\to\infty}S_i=0$ 和 $\alpha=\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i,j_k}>\beta$，可得存在 $i_1>0$，当 $i\geqslant i_1$ 时，有 $S_i<\beta$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i_1,j_k}>\beta$，必有 $K\in\mathbf{N}$，满足 $\beta\leqslant\sum\limits_{k=1}^{K}a_{i_1,j_k}<2\beta$. 进一步取 k_1 满足 $1<k_1\leqslant K$，且有 ⅰ) 任意 $i\geqslant i_1$，$\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}<2\beta$；ⅱ) 存在 $t_1\geqslant i_1$，$\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{t_1,j_k}\geqslant\beta$. 这是由于 $S_i<\beta(i\geqslant i_1)$，可以选取符合条件 ⅰ) 的最大的数 $k_1(k_1\leqslant K)$，若 $k_1=K$，取 $t_1=i_1$；若 $k_1<K$，则存在 $t_1>i_1$，有 $\sum\limits_{k=1}^{k_1+1}a_{t_1,j_k}\geqslant 2\beta$，结合 $S_{t_1}<\beta$ 可知，$\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{t_1,j_k}\geqslant\beta$，即可. 注意到 $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}=0$，可取 $I_1>t_1$，使任意 $i\geqslant I_1$，有 $S_i<\dfrac{\beta}{2}$，且 $\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}<\dfrac{\beta}{2}$. 进一步由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i,j_k}$ 存在，可取 $h_1>k_1$，满足当 $i_1\leqslant i<I_1$ 时，有 $\sum\limits_{k=h_1}^{\infty}a_{i,j_k}<\beta$.

2) 选取最小的 $i_2\geqslant I_1$，满足 $\sum\limits_{k=h_1}^{\infty}a_{i_2,j_k}>\beta$(如若不然，对任意 $i\geqslant I_1$，有 $\sum\limits_{k=h_1}^{\infty}a_{i,j_k}\leqslant\beta$，则 $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=h_1}^{\infty}a_{i,j_k}\leqslant\beta$，注意到 $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{h_1-1}a_{i,j_k}=0$ 与 $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i,j_k}=\alpha>\beta$ 矛盾). 同时，当 $i\geqslant i_2$，有 $S_i<\dfrac{\beta}{2}$，故存在 $K\in\mathbf{N}$，有 $\beta\leqslant\sum\limits_{k=h_1}^{K}a_{i_2,j_k}<\beta+\dfrac{\beta}{2}$. 同 1) 的证明，可选取 k_2 满足 $h_1<k_2\leqslant K$，且有 ⅰ) 任意 $i\geqslant i_2$，$\sum\limits_{k=h_1}^{k_2}a_{i,j_k}<\beta+\dfrac{\beta}{2}$；ⅱ) 存在 $t_2\geqslant i_2$，$\sum\limits_{k=h_1}^{k_2}a_{t_2,j_k}\geqslant\beta$. 进而选取 $I_2>t_2$，使对任意 $i\geqslant I_2$，有 $\sum\limits_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}+\sum\limits_{k=h_1}^{k_2}a_{i,j_k}<\dfrac{\beta}{3}$，且 $S_i<\dfrac{\beta}{3}$.

再取 $h_2>k_2$,满足对任意 $i_2\leqslant i<I_2$,有 $\sum_{k=h_2}^{\infty}a_{i,j_k}<\frac{\beta}{2}$.

3) 构造 $\{i_n\},\{t_n\},\{I_n\}$ 满足 $i_1\leqslant t_1<I_1\leqslant i_2\leqslant t_2<I_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant t_n<I_n\leqslant\cdots$. 同时,构造 $\{k_n\},\{h_n\}$ 满足 ⅰ) 任意 $i\geqslant I_{n-1}$, $\sum_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}+\sum_{k=h_1}^{k_2}a_{i,j_k}+\cdots+\sum_{k=h_{n-2}}^{k_{n-1}}a_{i,j_k}<\frac{\beta}{n}$;ⅱ) 任意 $i\geqslant i_n$, $\sum_{k=h_{n-1}}^{k_n}a_{i,j_k}<\beta+\frac{\beta}{n}$;ⅲ) $\sum_{k=h_{n-1}}^{k_n}a_{t_n,j_k}\geqslant\beta$;ⅳ) 任意 $i_n\leqslant i<I_n$, $\sum_{k=h_n}^{\infty}a_{i,j_k}<\frac{\beta}{n}$.

记 $h_0=1$,令 $C=\bigcup_{m=1}^{\infty}[j_{h_{m-1}},j_{k_m}]$, $C\subset B$. 记 $C_n=\bigcup_{m=1}^{n-1}[j_{h_{m-1}},j_{k_m}]$, $D_n=[j_{h_{n-1}},j_{k_n}]$, $E_n=\bigcup_{m=n+1}^{\infty}[j_{h_{m-1}},j_{k_m}]\subset[j_{h_n},+\infty)$,则 $C=C_n\cup D_n\cup E_n$.

当 $i_n\leqslant i<I_n$ 时,有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_C(j)=&\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_{C_n}(j)+\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_{D_n}(j)+\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_{E_n}(j)\leqslant\\&\sum_{k=1}^{k_1}a_{i,j_k}+\sum_{k=h_1}^{k_2}a_{i,j_k}+\cdots+\sum_{k=h_{n-2}}^{k_{n-1}}a_{i,j_k}+\sum_{k=h_{n-1}}^{k_n}a_{i,j_k}+\sum_{k=h_n}^{\infty}a_{i,j_k}<\\&\frac{\beta}{n}+\beta+\frac{\beta}{n}+\frac{\beta}{n}=\beta+\frac{3\beta}{n}.\end{aligned}$$

注意到 t_n 满足 $t_n\geqslant i_n$,且有 $\sum_{j=1}^{\infty}a_{t_n,j}\chi_C(j)\geqslant\sum_{k=h_{n-1}}^{k_n}a_{t_n,j_k}\geqslant\beta$,从而

$$p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_C(j)=\beta.$$

性质 1[9] 设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$,则对任意 $x\in\ell_\infty^+$, $p_{\mathscr{A}}(x)=\max_{x^*\in\partial p_{\mathscr{A}}(e)}\langle x^*,x\rangle$.

结合定理 2 及性质 1,有以下推论.

推论 1 设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^+$,如果 $\lim_{i\to\infty}S_i\equiv\lim_{i\to\infty}\sup_j a_{i,j}=0$,则对任意 $0\leqslant\beta\leqslant1$,存在 $C\subseteq\mathbf{N}$ 及 $x_C^*\in\partial p_{\mathscr{A}}(e)$,有

$$\langle x_C^*,\chi_C\rangle\equiv\mu_C(C)=\beta.$$

注 1 文献[10]定义了退化 $\mathscr{A}$-收敛,即若 $\partial p_{\mathscr{A}}(e)$ 的端点全体 ext $\partial p_{\mathscr{A}}(e)$ 满足 ext $\partial p_{\mathscr{A}}(e)\subset\ell_1$,且 (ext $\partial p_{\mathscr{A}}(e))^{\#}<\infty$,称该收敛是退化的;否则,称为非退化的. 由定理 2 可知,当 $\lim_{i\to\infty}S_i\equiv\lim_{i\to\infty}\sup_j a_{i,j}=0$ 时,$\mathscr{A}$-收敛是非退化的. 如若不然,存在 $\{e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_n}\}\subset\ell_1$,使任意 $C\subset\mathbf{N}$,当 $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}\cap C=\varnothing$,有 $p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=\max_{x^*\in\partial p_{\mathscr{A}}(e)}\langle x^*,\chi_C\rangle=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\langle e_{k_i},\chi_C\rangle=0$;当 $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}\cap C\neq\varnothing$, $p_{\mathscr{A}}(\chi_C)=1$,矛盾.

注 2 特别地,如果 $\mathscr{A}=(a_{i,j})$ 取成 Cesàro 矩阵,即若 $j\leqslant i$,定义 $a_{i,j}=\frac{1}{i}$;若 $j>i$,定义 $a_{i,j}=0$. $\mathscr{A}$-收敛成为统计收敛,易得此时 $\mathscr{A}$ 满足 $\lim_{i\to\infty}S_i=\lim_{i\to\infty}\sup_j a_{i,j}=0$,从而统计收敛是非退化的.

2 强无原子次测度与无原子理想

$\mathscr{I}\subset2^{\mathbf{N}}$ 称为 $\mathbf{N}$ 的一个理想,如果 $\mathscr{I}$ 满足 1) 可遗传性:任意 $B\in\mathscr{I}$,则由 $A\subset B$,可得 $A\in\mathscr{I}$;2) 有限并的封闭性:任意 $A,B\in\mathscr{I}$, $A\cup B\in\mathscr{I}$. 称 Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ $\mathscr{I}$-收敛于 x,若对任意 $\varepsilon>0$, $\{n\in\mathbf{N}:\|x_n-x\|\geqslant\varepsilon\}\in\mathscr{I}$,当 $\mathscr{I}$ 为非平凡的真理想,即 $\mathscr{I}\neq\varnothing$,且 $\mathbf{N}\notin\mathscr{I}$ 时,可得 x 的唯一性. 若 $\mathscr{I}$ 包含所有单点集,称 $\mathscr{I}$ 是容许的. $\mathscr{I}$- 收敛由文献[12]提出,特别地,当 $\mathscr{I}=\mathscr{I}_{\text{fin}}=\{A\subset\mathbf{N}:A^{\#}<\infty\}$ 时,$\mathscr{I}$-收敛即为收敛.

若记 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}=\{A\subset\mathbf{N}:p_{\mathscr{A}}(\chi_A)=0\}$,则根据 $p_{\mathscr{A}}$ 的次可加性可知,$\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 是真理想. 对 $B\subset\mathbf{N}$,由性质 1 可知, $p_{\mathscr{A}}(\chi_B)=\max\{\langle x^*,\chi_B\rangle:x^*\in\partial p_{\mathscr{A}}(e)\}$,记 $\varphi_{\mathscr{A}}(B)=p_{\mathscr{A}}(\chi_B)$,结合 $p_{\mathscr{A}}$ 的非负性、单调不减和次可加性,可得 $\varphi_{\mathscr{A}}$ 是 $2^{\mathbf{N}}$ 上的一个次测度(详细讨论参见文献[13-15]).

定义 2[14] 次测度 φ 是强无原子的,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\mathbf{N}$ 的有限分划 $\{A_1,\cdots,A_k\}$ 满足 $\varphi(A_i)<\varepsilon$

$(i=1,2,\cdots,k)$.

定义 3[14]　理想 $\mathscr{I}\subset 2^{\mathbf{N}}$ 称为是无原子的，若存在 $\mathbf{N}$ 的一列加细的有限分划 $\{\mathscr{P}_n\}$，对任意 $Z\subset\mathbf{N}$，若存在单减序列 $\{A_n\}$，满足 $A_n\in\mathscr{P}_n(\forall n\in\mathbf{N})$，且 $(Z\backslash A_n)^{\#}<\infty$，则有 $Z\in\mathscr{I}$.

记 $Z(\varphi)=\{A\subset\mathbf{N}:\varphi(A)=0\}$，当 φ 是强无原子的次测度时，$Z(\varphi)$ 是无原子的理想. 这是由于 φ 的强无原子性，可取一列加细有限分划 $\{\mathscr{P}_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{\varphi(A):A\in\mathscr{P}_n\}=0$，若 $Z\subset\mathbf{N}$，使 $(Z\backslash A_n)^{\#}<\infty$，其中，单减序列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n\in\mathscr{P}_n$，注意到当 φ 是强无原子时，$Z(\varphi)$ 必含有所有单点集，结合 $Z\subset(Z\backslash A_n)\cup A_n$ 和 φ 的次可加性，可得对任意 n，有 $\varphi(Z)\leqslant\varphi(Z\backslash A_n)+\varphi(A_n)=\varphi(A_n)$，从而 $\varphi(Z)=0$. 但反之不成立，因假设 φ 是强无原子的次测度，故 $Z(\varphi)$ 是无原子理想，定义一个新的次测度 η，若 $\varphi(A)=0$，$\eta(A)=0$；若 $\varphi(A)>0$，$\eta(A)=1$. 故有 $Z(\varphi)=Z(\eta)$，但 η 不是强无原子的.

文献[11]定义的 BW 和 FinBW 可以推广至 Banach 空间中.

定义 4　ⅰ）称理想 $\mathscr{I}$ 满足 BW，若对任意有界序列 $\{x_n\}\subset X$，存在 $M\notin\mathscr{I}$，则 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是 $\mathscr{I}$-收敛的；ⅱ）称理想 $\mathscr{I}$ 满足 FinBW，若对任意有界序列 $\{x_n\}\subset X$，存在 $M\notin\mathscr{I}$，则 $\{x_n\}_{n\in M}$ 是收敛的.

显然，对容许的理想 $\mathscr{I}$，$\mathscr{I}$ 满足 FinBW 时，必满足 BW，反之，不成立，但对定义的 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 有以下结论.

定理 3　若 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 是容许的理想，则 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 满足 FinBW，当且仅当 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 满足 BW.

证明：充分性. 选取有界序列 $\{x_n\}\subset X$，由题设存在 $M\notin\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，$\{x_n\}_{n\in M}$ 是 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$-收敛的，即对任意 $\varepsilon>0$，$\{n\in M:\|x_n-x\|\geqslant\varepsilon\}\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$. 令 $C_1=\{n\in M:\|x_n-x\|\geqslant 1\}$，$C_k=\left\{n\in M:\dfrac{1}{k}\leqslant\|x_n-x\|<\dfrac{1}{k-1}\right\}(k\geqslant 2)$，则 $C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，从而存在单增数列 $\{i_k\}$ 满足对任意 $i\geqslant i_k$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_{C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k}(j)<\dfrac{1}{k}$. 此外，注意到对任意 i，均有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}=1$，因此，特别地，对 $i_k\leqslant i<i_{k+1}$，存在单增数列 $\{j_k\}$，有 $\sum\limits_{j>j_k}a_{i,j}<\dfrac{1}{k}$.

令 $B_1=C_1$，当 $k\geqslant 2$ 时，令 $B_k=C_k\backslash[1,j_{k-1}]$. 记 $B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$，有以下结论成立.

ⅰ）$B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$. 这是由于 $B\cap[1,j_k]\subset C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$，从而当 $i_k\leqslant i<i_{k+1}$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_B(j)=\sum_{j=1}^{j_k}a_{i,j}\chi_B(j)+\sum_{j>j_k}a_{i,j}\chi_B(j)\leqslant\sum_{j=1}^{j_k}a_{i,j}\chi_{C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n}(j)+\sum_{j>j_k}a_{i,j}\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_{C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n}(j)+\sum_{j>j_k}a_{i,j}\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k},$$

可得 $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_B(j)=0$，即 $B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$.

ⅱ）$(M\backslash B)^{\#}=\infty$. 如若不然，$(M\backslash B)^{\#}<\infty$，则有 $M\backslash B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，又 $B\subset M$，$B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，故 $M=(M\backslash B)\cup B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，矛盾.

ⅲ）$\{x_n\}_{n\in M\backslash B}$ 收敛于 x. 这是由于对任意 $0<\varepsilon<1$，存在 $n\in\mathbf{N}$，有 $\dfrac{1}{n}\leqslant\varepsilon$，则 $A_M(\varepsilon)=\{n\in M:\|x_n-x\|\geqslant\varepsilon\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}C_k$，进而有 $(A_M(\varepsilon)\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k)^{\#}<\infty$，这意味着对任意 $0<\varepsilon<1$，$(A_M(\varepsilon)\backslash B)^{\#}<\infty$，从而有 $\{x_n\}_{n\in M\backslash B}$ 收敛于 x.

结合 $M\backslash B\notin\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 和 $\{x_n\}_{n\in M\backslash B}$ 收敛于 x，可知 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 满足 FinBW.

特别地，当 $\lim\limits_{i\to\infty}S_i=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{j}a_{i,j}=0$，易得 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 是容许的，从而有推论 2.

推论 2　设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{l_1}^{+}$. 若 $\lim\limits_{i\to\infty}S_i=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{j}a_{i,j}=0$，则 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 满足 FinBW，当且仅当 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 满足 BW.

定理 4[11]　若 φ 为强无原子的次测度，则理想 $Z(\varphi)=\{A\subset\mathbf{N}:\varphi(A)=0\}$ 不满足 BW.

定理 5[11]　理想 $\mathscr{I}$ 不满足 FinBW，当且仅当 $\mathscr{I}$ 是无原子的.

对 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$，结合定理 3，4，5，则有定理 6.

定理 6　设 $\mathscr{A}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S_{l_1}^{+}$，则以下论述等价：ⅰ）$\varphi_{\mathscr{A}}$ 是强无原子的；ⅱ）$\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 不满足 BW；ⅲ）$\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 不

满足 $\mathscr{F}in\mathscr{BW}$;ⅳ) $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 是无原子的理想.

证明:只需证明ⅳ)⇒ⅰ).设若不然 $\varphi_{\mathscr{A}}$ 不是强无原子的,则存在 $\varepsilon>0$,对 $\mathbf{N}$ 的任意一列加细的有限分划 $\{\mathscr{P}_n\}$,均有 $\max\{\varphi_{\mathscr{A}}(A):A\in\mathscr{P}_n\}>\varepsilon$.特别地,对分划 $\mathscr{P}_1$,必存在 $A_1\in\mathscr{P}_1$,满足 $\varphi_{\mathscr{A}}(A_1)>\varepsilon$,且 $N_1=\{n\in\mathbf{N}:B_N\in\mathscr{P}_n,B_n\subset A_1\}$ 为无限集.由于 $\mathscr{P}_2(A_1)=\{B\in\mathscr{P}_2,B\subset A_1\}$ 只含有有限个元,从而必存在 $A_2\in\mathscr{P}_2$,满足 $\varphi_{\mathscr{A}}(A_2)>\varepsilon$,且 $N_2=\{n\in\mathbf{N}:B_n\in\mathscr{P}_n,B_n\subset A_2\}$ 为无限集.如此可构造出一列单减序列 $\{A_n\}$,满足 $A_n\in\mathscr{P}_n$,且 $\varphi_{\mathscr{A}}(A_n)=p_{\mathscr{A}}(\chi_{A_n})=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\sum\limits_{j\in A_n}a_{i,j}>\varepsilon$,从而存在单增数列 $\{i_n\}$,满足 $\sum\limits_{j\in A_n}a_{i_n,j}>\varepsilon$.注意到 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i_n,j}=1$,则存在单增数列 $\{t_n\}$,有 $\sum\limits_{j>t_n}a_{i_n,j}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,进而 $\sum\limits_{j\leqslant t_n,j\in A_n}a_{i_n,j}>\dfrac{\varepsilon}{2}$.取 $B_n=\{j\in A_n:j\leqslant t_n\}$,有 $B_n{}^{\#}<\infty$.令 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=B$,一方面,$B\setminus A_n=B\setminus\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k\subset B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{n-1}$,有 $(B\setminus A_n)^{\#}<\infty$,结合 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ 是无原子的理想,可得 $B\in\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$;另一方面,有

$$p_{\mathscr{A}}(\chi_B)=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j\in B}a_{i,j}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{j\in B}a_{i_n,j}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{j\in B_n}a_{i_n,j}\geqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $B\notin\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$,矛盾.

参考文献:

[1] FAST H. Sur la convergence statistique[J]. Colloquium Mathematicum,1951,2:241-244.

[2] STEINHAUS H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloquium Mathematicum,1951,2:73-74.

[3] CHENG Lixing,LIN Guochen,LAN Yongyi,*et al*. Measure theory of statistical convergence[J]. Science China Series A,2008,51(12):2285-2303. DOI:10.1007/s11425-008-0017-z.

[4] CHENG Lixing,LIN Guochen,SHI Huihua. On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence[J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,50(1/2):116-122. DOI:10.1016/j.mcm.2009.04.004.

[5] CHENG Lixing,SHI Huihua. A functional characterization of measures and the Banach-Ulam problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2011,374:558-565. DOI:10.1016/j.jmaa.2010.06.020.

[6] 周仙耕,张敏.两类统计收敛的表示定理[J].数学学报,2010,53(2):251-256.

[7] 施慧华.$\mathscr{B}$-统计收敛与收敛的关系[J].华侨大学学报(自然科学版),2011,32(5):597-600. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2011.05.0597.

[8] 施慧华,王波.理想收敛的若干研究及推广[J].数学学报,2016,59(3):335-342.

[9] BAO Lingxin,LIN Lihua. On *A*-convergence[J]. Journal of Mathmatical Study,2013,46(2):116-125.

[10] 鲍玲鑫,施慧华.*A*-收敛与几乎处处收敛[J].华侨大学学报(自然科学版),2015,36(6):726-730. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2015.06.0726.

[11] BARBARSKI P,FILIPÓW R,MROŽEK N,*et al*. Uniform density u and I_u-convergence on a big set[J]. Mathematical Communications,2011,16(1):125-130.

[12] KOSTYRKO P,ŠALÁT T,WILCZYNSKI W. *I*-convergence[J]. Real Anal Exchange,1999,26(2):669-689.

[13] DREWNOWSKI L,LUCZAK T. On nonatomic submeasures on **N**[J]. Arch Math (Basel),2008,91:76-85. DOI:10.1007/s00013-008-2721-x.

[14] DREWNOWSKI L,LUCZAK T. On nonatomic submeasures on **N** (Ⅱ)[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,347:442-449. DOI:10.1016/j.jmaa.2008.06.029.

[15] DREWNOWSKI L,LUCZAK T. On nonatomic submeasures on **N** (Ⅲ)[J]. Arch Math (Basel),2009,92:377-382. DOI:10.1007/s00013-009-3140-3.

(**责任编辑**:钱筠 **英文审校**:黄心中)