第 42 卷　第 6 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 42　No. 6
2021 年 11 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Nov.　2021

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202009037

具有相依性的加权 *n* 中取 *k* 系统的热分配问题

范莉，游银萍

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究具有相依性的加权 n 中取 k 系统的热分配问题.假设工作元件的寿命具有随机排列递增的相依性，建立不同冗余分配策略下加权 n 中取 k 系统的可靠性大小关系.结果表明：将较好的冗余元件分配给权重较大、性能较差的工作元件，系统的可靠性能随机地提高.

关键词： 冗余元件；随机排列递增；可靠性；加权 n 中取 k 系统

中图分类号： O 213.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2021)06-0838-06

Hot Allocation Problem of Weighted *k*-out-of-*n* Systems With Interdependence

FAN Li, YOU Yinping

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Hot allocation problem of weighted k-out-of-n systems with interdependence is studied. It is assumed that the lifetimes of working components are dependent on stochastic arrangement increasing, the reliability size between the reliability of the weighted k-out-of-n system with different redundancy allocation strategies is established. The resluts show that the reliability of the system will be improved stochastically if the better redundant components are assigned to the working components with larger weight and poorer performance.

Keywords: redundancy element; stochastic arrangement increasing; reliability; weighted k-out-of-n systems

在可靠性理论中，n 中取 k 系统[1]是协同系统中的一类非常流行的纠错结构，广泛应用于电子工程、航空工业及水利水电等相关领域.n 中取 k 系统是指由 n 个元件组成的协同系统，系统工作当且仅当系统元件中至少有 k 个元件工作.通过给系统工作元件分配冗余元件来延长系统的寿命，从而提高系统的可靠性.冗余元件一般有热分配和冷储备两种添加方式.热分配是指冗余元件与工作元件同时开始运行，添加位置的元件寿命为冗余元件与工作元件寿命的最大值.冷储备是指在工作元件停止运行后，冗余元件开始运行，添加位置的元件寿命为冗余元件与工作元件寿命之和.近年来，已有许多学者对 n 中取 k 系统冗余元件的分配问题进行了研究[1-9].当系统运行元件的总权重超过某个预定临界值 k 时，系统才工作.一般的 n 中取 k 系统是加权 n 中取 k 系统的特例.关于加权 n 中取 k 系统的不同方面已有大量的研究，如可靠性计算、系统性能指标计算、权重损失评估、剩余容量及具有多个状态或随机权重的

收稿日期： 2020-09-18

通信作者： 游银萍(1988-)，女，副教授，博士，主要从事可靠性、保险精算、经济金融、风险管理的研究.E-mail：youyinping19881203@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(11701194)；华侨大学研究生科研创新基金资助项目(18013070004)

加权 n 中取 k 系统[10-17].

Zhang[18]考虑系统元件寿命相互独立的情况下，研究加权 n 中取 k 系统的热分配问题. 在现实应用中，加权 n 中取 k 系统中的工作元件通常在相同的环境中工作或共享相同的负载，因此，工作元件的寿命存在一定的相依性. 例如，在一个连锁故障的系统中，某个工作元件的故障将导致其余元件承受压力更密集，从而更有可能发生故障. 如果忽略这种相依性的影响，认为各个元件之间是独立工作的，那么必将高估或低估这些元件所构成的系统寿命. 因此，考虑工作元件寿命随机排列递增的相依性，本文研究加权 n 中取 k 系统在热分配下冗余元件的最优分配策略.

1　预备知识

随机序主要用来描述随机变量之间的大小关系[4,19-20]，在可靠性工程、金融和精算风险管理及统计等与概率相关的领域中发挥着重要的作用.

定义 1　假设 X 和 Y 是两个随机变量，分别具有分布函数 F 和 G. 对于任意增函数 Ψ，如果满足 $E[\Psi(X)]\leqslant E[\Psi(Y)]$，则 X 在普通随机序(st)上小于 Y，记为 $X\leqslant_{\mathrm{st}}Y$.

定义 2　假设 X 和 Y 是两个随机变量，分别具有密度函数 f 和 g. 对于任意 $x\leqslant y$，如果满足 $f(x)g(y)\geqslant f(y)g(x)$，则 X 在似然比序(lr)上小于 Y，记为 $X\leqslant_{\mathrm{lr}}Y$.

文中关于系统各元件寿命间的统计相依性是随机排列递增性，多元非参数相依概念由文献[21-22]首次提出. 对于任意对 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $A_{i,j}(n)=\{g(\boldsymbol{x}):g(\boldsymbol{x})\geqslant g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))$，对于任意 $x_i\leqslant x_j\}$. 其中，$\tau_{i,j}(\boldsymbol{x})=\{x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n\}$ 是向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的一个置换.

定义 3　函数 $g(\boldsymbol{x}):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上是排列递增(AI)的，如果 $(x_i-x_j)[g(\boldsymbol{x})-g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{x}))]\leqslant 0$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，当上述不等式反向成立，$g(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 上是排列递减(AD)的.

定义 4　如果对任意函数 $g\in A_{i,j}(n)$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，满足性质 $E[g(\boldsymbol{X})]\geqslant E[g(\tau_{i,j}(\boldsymbol{X}))]$，则随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是随机排列递增(SAI)的.

若随机向量 $\boldsymbol{X}$ 是 SAI 的，则在集合 $\{\boldsymbol{x}:x_j\leqslant x_j\}$ 任意子集上的 $\boldsymbol{X}$ 比 $\tau_{i,j}(\boldsymbol{X})$ 有更大的权重，$1\leqslant i<j\leqslant n$. 由文献[21]可知，若连续型随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度函数为 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{X}$ 是 SAI 的当且仅当 $f(\boldsymbol{x})$ 是 AI 的.

SAI 的一些重要性质如引理 1～2.

引理 1[21]　设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 SAI 的，当且仅当给定 $\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}$ 的 (X_i,X_j) 的条件分布或 $(X_i,X_j)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}$ 是 SAI 的，其中，$\overline{i,j}=\{1,\cdots,n\}\backslash\{i,j\}$，即 $\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 中不含有 x_i 和 x_j 两项.

引理 2[21]　设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 SAI 的，当且仅当对于任意的 $x_2\geqslant x_1$，有 $E[g_2(X_1,X_2)]\geqslant E[g_1(X_1,X_2)]$，其中，$g_2(x_1,x_2)\geqslant g_1(x_1,x_2)$；$g_2(x_1,x_2)+g_2(x_2,x_1)\geqslant g_1(x_1,x_2)+g_1(x_2,x_1)$.

令 $I(A)$ 表示事件 A 的示性函数，有如下引理 3.

引理 3　设 u 为任意增函数，$u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 对于任意 $y_1\geqslant y_2$，$\omega_1\geqslant\omega_2$，有

$$m_2(x_1,x_2)=u(\omega_1 I(V\{x_1,y_1\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_2\}>t)),$$
$$m_1(x_1,x_2)=u(\omega_1 I(V\{x_1,y_2\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_1\}>t)),$$

则对于所有 $x_2\geqslant x_1$，有

$$m_2(x_1,x_2)\geqslant m_1(x_1,x_2),\tag{1}$$
$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)\geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1).\tag{2}$$

式(1)的证明. 对于任意固定值 $t\geqslant 0$，$I(x>t)$ 是 x 的增函数. 对于任意 $y_1\geqslant y_2$，令 $h(x)=I(V\{x,y_1\}>t)-I(V\{x,y_2\}>t)$，1) 当 $x\geqslant y_1\geqslant y_2$ 时，则有 $h(x)=I(x>t)-I(x>t)=0$；2) 当 $y_1\geqslant x\geqslant y_2$ 时，则有 $h(x)=I(y_1>t)-I(x>t)\geqslant 0$；3) 当 $y_1\geqslant y_2\geqslant x$ 时，则有 $h(x)=I(y_1>t)-I(y_2>t)\geqslant 0$. 因此易证，$h(x)$ 是非负且关于 x 是递减函数.

对于所有 $x_2\geqslant x_1$，有 $h(x_1)\geqslant h(x_2)\geqslant 0$，即

$$I(V\{x_1,y_1\}>t)-I(V\{x_1,y_2\}>t)\geqslant I(V\{x_2,y_1\}>t)-I(V\{x_2,y_2\}>t)\geqslant 0.$$

因为 $\omega_1 \geqslant \omega_2$,则有

$$\omega_1(I(V\{x_1,y_1\}>t)-I(V\{x_1,y_2\}>t)) \geqslant \omega_2(I(V\{x_2,y_1\}>t)-I(V\{x_2,y_2\}>t)) \geqslant 0,$$

整理为

$$\omega_1 I(V\{x_1,y_1\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_2\}>t) \geqslant \omega_1 I(V\{x_1,y_2\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_1\}>t) \geqslant 0.$$

又因为 u 为增函数,故

$$u(\omega_1 I(V\{x_1,y_1\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_2\}>t)) \geqslant u(\omega_1 I(V\{x_1,y_2\}>t)+\omega_2 I(V\{x_2,y_1\}>t)),$$

即 $m_2(x_1,x_2) \geqslant m_1(x_1,x_2)$得证.

式(2)的证明.1) 当 $x_2 \geqslant x_1 \geqslant y_1 \geqslant y_2$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(x_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(x_1>t)),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(x_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(x_1>t)),$$

即 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.

2) 当 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant x_2 \geqslant x_1$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=2u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(y_2>t)),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=2u(\omega_1 I(y_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)).$$

因为 u 为增函数且 $y_1 \geqslant y_2$,$\omega_1 \geqslant \omega_2$,易证

$$u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(y_2>t)) \geqslant u(\omega_1 I(y_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)).$$

从而可知 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1) \geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.

3) 当 $x_2 \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant x_1$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_2>t)), \tag{3}$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_2>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)). \tag{4}$$

对于 $x_2 \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant t$,$I(x_2>t)=I(y_1>t)=I(y_2>t)=1$.由式(3),(4),有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=2u(\omega_1+\omega_2)=m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1).$$

对于 $x_2 \geqslant y_1 \geqslant t \geqslant y_2$,$I(y_2>t)=0$ 且 $I(x_2>t)=I(y_1>t)=1$.由式(3),(4),有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1+\omega_2)+u(\omega_1),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_2)+u(\omega_1+\omega_2).$$

因为 $\omega_1 \geqslant \omega_2$,有 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1) \geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.对于 $x_2>t \geqslant y_1$ 或 $t \geqslant x_2$,容易检验得

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1).$$

4) 当 $x_2 \geqslant y_1 \geqslant x_1 \geqslant y_2$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(x_1>t)),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(x_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)).$$

类似 3)的证明方式,有 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1) \geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.

5) 当 $y_1 \geqslant x_2 \geqslant y_2 \geqslant x_1$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(y_2>t)),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_2>t)+\omega_2 I(y_1>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)).$$

因为 u 为增函数且 $y_1 \geqslant x_2 \geqslant y_2$,$\omega_1 \geqslant \omega_2$,易证

$$u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(y_2>t))-u(\omega_1 I(y_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)) \geqslant 0,$$

$$u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))-u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)) \geqslant 0.$$

从而可知 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1) \geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.

6) 当 $y_1 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant y_2$ 时,则有

$$m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_2>t))+u(\omega_1 I(y_1>t)+\omega_2 I(x_1>t)),$$

$$m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)=u(\omega_1 I(x_1>t)+\omega_2 I(y_1>t))+u(\omega_1 I(x_2>t)+\omega_2 I(y_1>t)).$$

类似 3)的证明方式,有 $m_2(x_1,x_2)+m_2(x_2,x_1) \geqslant m_1(x_1,x_2)+m_1(x_2,x_1)$.

2　主要结论及其证明

设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$是加权 n 中取 k 系统 n 个分量的寿命，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_2)$是系统的权重向量，其中，第 i 个工作元件为系统运行贡献权重为 ω_i，$i=1,\cdots,n$，则在任意时刻 $t\geqslant 0$，系统总权重的随机过程为

$$W_{\boldsymbol{X}}(t):=W_{\boldsymbol{X}}(t,\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i I,\qquad X_i>t.$$

给定临界值 k，系统的寿命为 $T_{\boldsymbol{X}}(k):=\inf\{t:W_{\boldsymbol{X}}(t)<k\}$. 对于任意 $t\geqslant 0$，系统的可靠性表示为

$$P(T_{\boldsymbol{X}}(k)>t)=P(W_{\boldsymbol{X}}(t)\geqslant k).\tag{5}$$

将两个寿命具有似然比序大小关系的冗余元件热分配给工作元件寿命为 SAI 的加权 n 中取 k 系统. 设这两个冗余元件的寿命分别为随机变量 Y_1 和 Y_2，对于任意对(i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant n$，在任意的 $t\geqslant 0$ 时刻，记 $W_{\boldsymbol{X}}(t,(Y_1,Y_2))$表示将寿命为 Y_1 的冗余元件分配给系统的第 $i[j]$个元件上的系统总权重，$[W_{\boldsymbol{X}}(t;(Y_2,Y_1))]$表示将寿命为 Y_2 的冗余元件分配给系统的第 $j[i]$个元件上的系统总权重. 相应地，给定临界值 k，记 $T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_1,Y_2))[T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_2,Y_1))]$为冗余元件分配到对应工作元件上系统的寿命. 令 g_1 和 g_2 分别为 Y_1 和 Y_2 的密度函数.

定理 1[18]　设 $X_1,\cdots,X_n,Y_1,Y_2$ 相互独立，对任意对(i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant n$，设 $\omega_i\geqslant\omega_j$ 且有 $X_i\leqslant_{\mathrm{st}}X_j$，如果 $Y_1\geqslant_{\mathrm{st}}Y_2$，有 $T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_1,Y_2))\geqslant_{\mathrm{st}}T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_2,Y_1))$.

由定理 1 可知：对于具有相互独立寿命的系统工作元件，将更好的冗余元件分配给权重较大、性能较差的工作元件，可以随机地延长加权 n 中取 k 系统的寿命. 由于系统元件在同一个系统中工作，受共同环境因素的影响，因此，需要研究工作元件寿命具有相依性的冗余元件热分配问题.

定理 2　设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots X_n)$是 SAI 的，则对于任意 $\omega_i\geqslant\omega_j$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，如果 $Y_1\geqslant_{\mathrm{lr}}Y_2$，有 $W_{\boldsymbol{X}}(t;(Y_1,Y_2))\geqslant_{\mathrm{st}}W_{\boldsymbol{X}}(t;(Y_2,Y_1))$.

证明：设 u 为任意增函数，$y_1\geqslant y_2$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，令

$$h_1(x_i,x_j)=u\Big(\omega_i I(V\{x_i,y_2\}>t)+\omega_j I(V\{x_j,y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big),$$

$$h_2(x_i,x_j)=u\Big(\omega_i I(V\{x_i,y_1\}>t)+\omega_j I(V\{x_j,y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big).$$

根据引理 3，对于所有 $x_j\geqslant x_i$，有

$$h_2(x_i,x_j)\geqslant h_1(x_l,x_j),$$
$$h_2(x_i,x_j)+h_2(x_j,x_i)\geqslant h_1(x_i,x_j)+h_1(x_j,x_i).$$

由引理 1，$\boldsymbol{X}$ 是 SAI 的当且仅当$[(X_i,X_j)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}]$是 SAI 的，又由引理 2，有

$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_2\}>t)+\sum_{l=i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}\Big]=$$
$$E[h_2(X_i,X_j)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}]\geqslant E[h_1(X_i,X_j)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}]=$$
$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\mid\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}=\boldsymbol{x}_{\overline{i,j}}\Big].$$

上式两端对 $\boldsymbol{X}_{\overline{i,j}}$ 取期望，有

$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]\geqslant$$
$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big].$$

可以证明

$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,Y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]-$$
$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,Y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]=$$

$$\iint_{y_1\geqslant y_2}\Big(E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]-$$

$$\Big(E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]\Big)$$

$$(g_1(y_1)g_2(y_2)-g_1(y_2)g_2(y_1))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

由于 $Y_1\geqslant_{\mathrm{lr}}Y_2$,对于 $y_1\geqslant y_2$,有 $g_1(y_1)g_2(y_2)\geqslant g_1(y_2)g_2(y_1)$. 结合上式,有

$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,Y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big]\geqslant$$

$$E\Big[u\Big(\omega_i I(V\{X_i,Y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(x_l>t)\Big)\Big].$$

又因为 u 为任意增函数,所以有

$$\omega_i I(V\{X_i,Y_1\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_2\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(X_l>t)\geqslant_{\mathrm{st}}$$

$$\omega_i I(V\{X_i,Y_2\}>t)+\omega_j I(V\{X_j,Y_1\}>t)+\sum_{l\neq i,j}^{n}\omega_l I(X_l>t),$$

即 $W_{\boldsymbol{X}}(t;(Y_1,Y_2))\geqslant_{\mathrm{st}}W_{\boldsymbol{X}}(t;(Y_2,Y_1))$. 由式(5)和定理 2,得到推论 1.

推论 1 设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 SAI 的,则对于任意 $\omega_i\geqslant\omega_j$,$1\leqslant i<j\leqslant n$,如果 $Y_1\geqslant_{\mathrm{lr}}Y_2$,有 $T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_1,Y_2))\geqslant T_{\boldsymbol{X}}(k;(Y_2,Y_1))$.

由推论 1 可知:当加权 n 中取 k 系统中 n 个工作元件的寿命具有 SAI 相依性时,将较好的冗余元件分配给权重较大性能较差的工作元件,另一个冗余元件分配给权重较小性能较好的工作元件,系统的寿命会得到随机延长. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且 $X_1\leqslant_{\mathrm{lr}}X_2\leqslant_{\mathrm{lr}}\cdots\leqslant_{\mathrm{lr}}X_n$,易证 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度函数是 AI 的,即 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 SAI 的,也就是说,推论 1 将定理 1 从系统工作元件寿命相互独立扩展到工作元件寿命具有 SAI 相依性.

由定理 2 和推论 1 可知:当加权 n 中取 k 系统的工作元件寿命具有 SAI 相依性时,为系统分配一个冗余元件的最优分配策略. 设这一冗余元件的寿命为随机变量 Y,对于任意对 (i,j),$1\leqslant i<j\leqslant n$,给定临界值 k,在 $t\geqslant 0$ 时刻,记 $T_i(k;Y)$ 为将冗余元件分配给系统的第 i 个工作元件上系统对应的寿命,$T_j(k;Y)$ 为将冗余元件分配给系统的第 j 个工作元件上系统对应的寿命. 推论 2 的证明类似定理 2 的证明,需考虑 $Y_2\equiv 0$.

推论 2 假设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 SAI 的,则对于任意 $\omega_i\geqslant\omega_j$,$1\leqslant i<j\leqslant n$,有

$$T_i(k;Y)\geqslant_{\mathrm{st}}T_j(k;Y).$$

由推论 2 可知:在加权 n 中取 k 系统 n 个工作元件寿命具有 SAI 相依性的情况下,将冗余元件分配给权重更大、性能更差的系统工作元件上,将会随机地提高系统的可靠性. 推论 2 实际上扩展了 Zhang[18] 的推论 2.3,将加权 n 中取 k 系统工作元件寿命相互独立推广到相依性.

3 结束语

在加权 n 中取 k 系统工作元件寿命具有随机排列递增的相依性下,主要研究了两个不同冗余元件热分配的最优分配策略. 事实上,由于系统单元数量的增加和结构的复杂化,可以进一步研究多个不同的冗余元件一一对应地分配给系统的工作元件,或者多个相同的冗余元件一一对应地分配给系统的工作元件的最优分配策略,或者考虑系统工作元件之间或冗余元件之间具有其他不同的相依性的冗余分配问题.

参考文献:

[1] BARLOW R E, PROSCHAN F. Statistical theory of reliability and life testing, probability models[M]. [S.l.]: Silver Spring, 1981.

[2] BOLAND P J, El-NEWEIHI E, PROSCHAN F. Active redundancy allocation in coherent systems[J]. Probability in

the Engineering and Informational Science, 1988, 2(3): 343-353. DOI: 10.1017/S0269964800000899.

[3] BOLAND P J, El-NEWEIHI E, PROSCHAN F. Stochastic order for redundancy allocation in series and parallel systems[J]. Advances in Applied Probability, 1992: 24(1): 161-171. DOI: 10.2307/1427734.

[4] BELZUNCE F, MARTINEZ-PUERTAS H, RUIZ J M. On optimal allocation of redundant components for series and parallel systems of two dependent components[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2011, 141(9): 3094-3104. DOI: 10.1016/j.jspi.2011.03.031.

[5] BELZUNCE F, MARTINEZ-PUERTAS H, RUIZ J M. On allocation of redundant components for systems with dependent components[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 230(3): 573-580. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.05.004.

[6] YOU Yinping, LI Xiaohu. On allocation redundancies to k-out-of-n reliability systems[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2014, 30(3): 361-371. DOI: 10.1002/asmb.2032.

[7] YOU Yinping, FANG Rui, LI Xiaohu. Allocating active redundancies to k-out-of-n reliability systems with permutation monotone component lifetimes[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2016, 32(5): 607-620. DOI: 10.1002/asmb.2180.

[8] MISRA N, DHARIYAL I, GUPTA N. Optimal allocation of active spares in series systems and comparison of component and system redundancies[J]. Journal of Applied Probability, 2009, 46(1): 19-34. DOI: 10.1239/jap/1238592114.

[9] LI Xiaohu, DING Weiyong. Optimal allocation of active redundancies to k-out-of-n system with heterogenous components[J]. Journal of Applied Probability, 2010, 47(1): 254-263. DOI: 10.1239/jap/1269610829.

[10] CHEN Yong, YANG Qingyu. Reliability of two-stage weighted k-out-of-n systems with components in common [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2005, 54(3): 431-440. DOI: 10.1109/TR.2005.853274.

[11] LI Wei, ZUO Mingjian. Reliability evaluation of multi-state weighted k-out-of-n system[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(1): 160-167. DOI: 10.1016/j.ress.2006.11.009.

[12] SAMANIEGO F J, SHAKED M. Systems with weighted components[J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78(6): 815-823. DOI: 10.1016/j.spl.2007.09.049.

[13] DING Yi, ZUO Mingjian, LISNIANSKI A, *et al*. A framework for reliability approximation of multi-state weighted k-out-of-n systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(2): 297-308. DOI: 10.1109/TR.2010.2048659.

[14] LEVITIN G. Multi-state vector k-out-of-n systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2013, 62(3): 648-657. DOI: 10.1109/TR.2013.2270418.

[15] ERYILMAZ S, BOZBULU A R. Computing marginal and joint birnbaum, and Barlow-Proschan importances in weighted k-out-of-n: G systems[J]. Computers and Industrial Engineering, 2014, 72: 255-260. DOI: 10.1016/j.cie.2014.03.025.

[16] ERYILMAZ S. Capacity loss and residual capacity in weighted k-out-of-n: G systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2015, 136: 140-144. DOI: 10.1016/j.ress.2014.12.008.

[17] CHEN Zhiwei, ZHAO Tingdi, JIAO Jian, *et al*. Availability analysis and optimal design of multistate weighted k-out-of-n systems with component performance requirements[J]. IEEE Access, 2018(6): 51547-51555. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2865933.

[18] ZHANG Yiying. Optimal allocation of active redundancies in weighted k-out-of-n systems[J]. Statistics and Probability Letters, 2018, 135: 110-117. DOI: 10.1016/j.spl.2017.12.002.

[19] KAAS R, VAN HEERWAARDEN A E, GOOVAERTS M J. Ordering of actuarial risks[M]. Amsterdam: Caire, 1994.

[20] SHAKED M, SHANTHIKUMAR J G. Stochastic orders[M]. New York: Springer, 2007.

[21] CAI Jun, WEI Wei. Some new notions of dependence with applications in optimal allocation problems[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 55(1): 200-209. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2014.01.009.

[22] CAI Jun, WEI Wei. Notions of multivariate dependence and their applications in optimal portfolio selections with dependent risks[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2015, 138: 156-169. DOI: 10.1016/j.jmva.2014.12.011.

（**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**黄心中）