第 42 卷　第 5 期
2021 年 9 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 42　No. 5
Sep.　2021

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202106031

对象导出三支概念格的熵属性约简

吴荣[1], 张文娟[2], 李进金[1,2]

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;
2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要: 将信息熵引入形式背景中,研究对象导出三支概念格的熵属性约简. 首先,定义对象导出三支概念格的信息熵、条件熵和互信息等概念;其次,根据属性在约简过程中的重要性探讨核心属性和非核心属性的熵判定条件,并得出对象导出三支概念格的熵协调集等价于 OEG 协调集(对象导出三支概念格的粒协调集),对象导出三支概念格的熵约简集等价于 OEG 约简集;最后,给出决策形式背景中对象导出三支概念格的熵协调和熵约简等概念,并给出启发式熵约简的方法.

关键词: 形式背景; 信息熵; 条件熵; 属性约简

中图分类号: TP 182　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5013(2021)05-0693-08

Entropy Attribute Reduction of Object-Induced Three-Way Concept Lattice

WU Rong[1], ZHANG Wenjuan[2], LI Jinjin[1,2]

(1. School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematics Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: The article introduces information entropy into the formal context, and the entropy attribute reduction of object-induced three-way concept lattice is studied. Firstly, the concepts of information entropy, conditional entropy and mutual information of object-induced three-way concept lattice are defined. Then, according to the significance of attribute in the reduction process, the criteria of core attributes and non-core attributes are investigated, and the equivalence between entropy consitent set of object-induced three-way concept lattice and OEG consistent set (object-induced three-way concept lattice granular consistent set) are obtained, the equivalence between entropy reduction set of object-induced three-way concept lattice and OEG reduction set are acquired. Finally, the concepts of entropy consistent and entropy reduction of object-induced three-way concept lattice in formal decision context are given, and the methods of heuristic entropy reduction are also provided.

Keywords: formal context; information entropy; conditional entropy; attribute reduction

形式概念分析(format concept analysis, FCA)理论是德国数学家 Wille[1] 于 1982 年提出的,它是根据数据集中对象与属性的二元关系建立的一种概念层次结构,体现了概念之间的泛化和特化关系. 属性约简是其热点问题,自提出以来,深受众多学者的关注. Zhang 等[2] 设计了保持格结构不变的属性约简;Wang 等[3] 提出了保持交不可约元外延集不变的属性约简. 基于不可约元,Li 等[4] 进一步探讨了保持并不可约元外延集不变的属性约简;Wu 等[5] 将粒计算思想与形式概念分析相结合,探究了粒约简方法;Wei 等[6] 分别研究了两类协调决策形式背景的属性约简;Liu 等[7] 探讨了面向属性概念格与面向对

收稿日期: 2021-06-24
通信作者: 吴荣(1969-),男,副教授,主要从事知识空间理论及其应用的研究. E-mail: wr163@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11871259)

象概念格上的属性约简.

2009年，Yao[8-10]提出了以“三分而治”为主要思想的三支决策理论，该理论的提出有着丰富的内涵．而后，Qi等[11]将三支决策应用于形式概念分析理论，提出了三支形式概念，建立了三支概念格．在此基础上，Qi等[12]进一步考虑了三支概念格与经典概念格的关系．随后，Ren等[13]讨论了对象导出三支概念格和属性导出三支概念格的4种约简方法．常欣欣等[14]和林洪等[15]分别从形式背景与决策形式背景出发研究了对象导出三支概念格的粒约简方法.

人们也利用信息熵[16]来研究形式背景的约简．如Li等[17]、Singh等[18]利用信息熵计算形式概念的属性权重并进行概念格的属性约简．李美争等[19]基于所有概念外延定义了形式背景的粗糙熵，提出了基于粗糙熵的属性重要度，并设计了相应的属性约简算法．张鹤晓等[20]通过给出单个属性的信息量，研究了基于信息熵的对象加权概念格．陈东晓等[21]从信息粒的角度出发，探讨了信息熵研究形式背景的一种方法.

虽然关于对象导出（object export，OE）三支概念格属性约简方法的研究已取得了很多成果，但与信息熵结合的研究较少．受文献[21]的启发，本文将信息熵引入形式背景中，探讨对象导出三支概念格的熵属性约简.

1　预备知识

定义1[22]　(U,AT,I)是形式背景，其中U是对象集，AT是属性集，I是U和AT的二元关系．对于任意$x\in U$，$m\in\mathrm{AT}$，若$(x,m)\in I$，则表示对象x具有属性m．若$(x,m)\notin I$，则表示对象x不具有属性m.

对任意的$X\subseteq U$，$B\in\mathrm{AT}$，Wille定义了一对算子，即

$$X^{*}=\{m\in AT\mid\forall x\in X(xIm)\},\tag{1}$$

$$B^{*}=\{x\in U\mid\forall m\in B(xIm)\}.\tag{2}$$

若满足$X^{*}=B$和$B^{*}=X$，则称(X,B)为(U,AT,I)的形式概念．其中，X和B分别称为概念的外延和内涵．记所有形式概念的集合为$L(U,\mathrm{AT},I)$.

在形式背景(U,AT,I)中，任意$B\subseteq\mathrm{AT}$，记$I_B=I\cap(U\times B)$，那么(U,B,I_B)也是一个形式背景，称为子形式背景．且子形式背景(U,B,I_B)中由式(1)和(2)定义的算子记为$*_B$.

通过将三支决策思想引入形式概念分析中，Qi等[11]建立了三支概念格．下面首先给出一些基本的定义.

设S是一个非空集合，$\mathcal{P}(S)$是S的幂集，$\mathrm{DP}(S)=\mathcal{P}(S)\times\mathcal{P}(S)$．在$\mathrm{DP}(S)$上，定义集合间运算：任意$(A,B)$，$(C,D)\in\mathrm{DP}(S)$，$(A,B)\cap(C,D)=(A\cap C,B\cap D)$，$(A,B)\cup(C,D)=(A\cup C,B\cup D)$，$(A,B)^{c}=(A^{c},B^{c})$，且有$(A,B)\subseteq(C,D)\Leftrightarrow A\subseteq C$且$B\subseteq D$.

相对于Wille定义的“$*$”算子，Qi等定义了如下算子，即

$$X^{\overline{*}}=\{m\in\mathrm{AT}\mid\forall x\in X(xI^{C}m)\},\tag{3}$$

$$B^{\overline{*}}=\{x\in U\mid\forall m\in B(xI^{C}m)\}.\tag{4}$$

根据“$*$”算子与“$\overline{*}$”算子的语义，Qi等称“$\overline{*}$”算子为负算子，并称Wille定义的“$*$”算子为正算子．若同时考虑形式背景的正、负算子，从“共同具有”和“共同不具有”这两个角度出发，则可以给出对象导出三支算子的定义.

定义2[23]　设(U,AT,I)是一个形式背景，定义算子$\lessdot:\mathcal{P}(U)\to\mathrm{DP}(A)$及$\gtrdot:\mathrm{DP}(A)\to\mathcal{P}(U)$，任意$X\subseteq U$，$B,C\subseteq\mathrm{AT}$，若$X^{\lessdot}=(X^{*},X^{\overline{*}})$，且$(B,C)^{\gtrdot}=\{x\in U\mid x\in B^{*}$且$x\in C^{\overline{*}}\}=B^{*}\cap C^{\overline{*}}$，则称算子$\lessdot$和$\gtrdot$为形式背景$(U,\mathrm{AT},I)$中的对象导出三支算子，简称OE-算子.

设(U,AT,I)是形式背景，对任意的$X,Y\subseteq U$，$A,B\subseteq\mathrm{AT}$，对象导出三支算子$\lessdot$和$\gtrdot$具有以下4点性质：1）$X\subseteq X^{\lessdot\gtrdot}$，$(A,B)\subseteq(A,B)^{\gtrdot\lessdot}$；2）$X\subseteq Y\Rightarrow X^{\lessdot}\supseteq Y^{\lessdot}$，$(A,B)\subseteq(C,D)\Rightarrow(A,B)^{\gtrdot}\supseteq(C,D)^{\gtrdot}$；3）$X^{\lessdot}=X^{\lessdot\gtrdot\lessdot}$，$(A,B)^{\gtrdot}=(A,B)^{\gtrdot\lessdot\gtrdot}$；4）$X\subseteq(A,B)^{\gtrdot}\Leftrightarrow(A,B)\subseteq X^{\lessdot}$.

在定义2中，若满足$X^{\lessdot}=(B,C)$，$(B,C)^{\gtrdot}=X$，则称$(X,(B,C))$为OE-概念．其中X称为OE-概

念的外延，(B,C)称为 OE-概念的内涵.

记所有 OE-概念构成的集合为 $\mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$. 对于任意$(X,(B,C)),(Y,(D,E))\in \mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$，$\mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$上二元关系：$(X,(B,C))\leqslant(Y,(D,E))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow(B,C)\supseteq(D,E)$.

对于任意$(X,(B,C)),(Y,(D,E))\in \mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$，则其上确界与下确界定义为

$$(X,(B,C))\vee(Y,(D,E))=((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(B,C)\cap(D,E)),\tag{5}$$

$$(X,(B,C))\wedge(Y,(D,E))=(X\cap Y,((B,C)\cup(D,E))^{\gtrdot\lessdot}).\tag{6}$$

因 $\mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$中每个元素都是形式背景$(U,\mathrm{AT},I)$的对象导出三支概念，且$(\mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I),\leqslant)$是完备格，故称 $\mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$为形式背景$(U,\mathrm{AT},I)$的对象导出三支概念格，简称 OE-概念格.

对于任意 $x\in U$，显然有$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})=(x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}},(x^{*},x^{\bar{*}}))\in \mathrm{OEL}(U,\mathrm{AT},I)$，且由 x 完全确定，称为 OE-概念格的对象概念，简称为 OE-粒概念. 对于 $B\subseteq \mathrm{AT}$，在子形式背景(U,B,I_B)下，记对象导出三支算子为$\lessdot_B$和$\gtrdot_B$.

2　对象导出三支概念格的熵属性约简

定义 3　设(U,AT,I)是一个形式背景，任意 $B\subseteq \mathrm{AT}$，记 $\Delta_B=\{x^{\lessdot_B\gtrdot_B},\forall x\in U\}$，称 Δ_B 为 B 诱导的关于 U 的覆盖.

命题 1　设(U,AT,I)是一个形式背景，如果 $B\subseteq \mathrm{AT}$，$C=\mathrm{AT}-B$，则对于任意 $x\in U$，$x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}=x^{\lessdot_C\gtrdot_C}\cap x^{\lessdot_B\gtrdot_B}$.

证明：任意 $x\in U$，显然有 $x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}=x^{*_{\mathrm{AT}}*_{\mathrm{AT}}}\cap x^{\bar{*}_{\mathrm{AT}}\bar{*}_{\mathrm{AT}}}$，$x^{\lessdot_B\gtrdot_B}=x^{*_B*_B}\cap x^{\bar{*}_B\bar{*}_B}$，$x^{\lessdot_C\gtrdot_C}=x^{*_C*_C}\cap x^{\bar{*}_C\bar{*}_C}$. 而对任意 $x\in U$，有 $x^{*_{\mathrm{AT}}*_{\mathrm{AT}}}=x^{*_B*_B}\cap x^{*_C*_C}$，$x^{\bar{*}_{\mathrm{AT}}\bar{*}_{\mathrm{AT}}}=x^{\bar{*}_B\bar{*}_B}\cap x^{\bar{*}_C\bar{*}_C}$，从而任意 $x\in U$，均有 $x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}=x^{\lessdot_C\gtrdot_C}\cap x^{\lessdot_B\gtrdot_B}$.

定义 4　假设(U,AT,I) 是一个形式背景，定义关于对象导出三支概念格的信息熵为 $H(\mathrm{AT})=-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}{|U|}$，其中$|\cdot|$代表集合中元素的个数. 任意 $B,C\subseteq \mathrm{AT}$，定义 B 关于 C 的对象导出三支概念格的条件信息熵为 $H(B|C)=-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\cap x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}{|x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}$，定义 B 与 C 的对象导出三支概念格的联合信息熵为 $H(B;C)=-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\cap x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}{|U|}$.

定理 1　设(U,AT,I)是一个形式背景，对于 $C\subseteq B\subseteq \mathrm{AT}$ 及对象导出三支概念格的信息熵 $H(C)$，$H(B)$，则有 $H(C)\leqslant H(B)$.

证明：因为 $C\subseteq B$，则对于任意 $x\in U$，有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\subseteq x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$，从而$-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}{|U|}\leqslant-\dfrac{1}{|U|}\times\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_B\gtrdot_B}|}{|U|}$，也即 $H(C)\leqslant H(B)$.

定理 2　设(U,AT,I)是一个形式背景，$C\subseteq B\subseteq \mathrm{AT}$，若对象导出三支概念格的信息熵 $H(C)$和 $H(B)$，有 $H(B)=H(C)$，则对任意 $x\in U$，有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}=x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$.

证明：因为 $C\subseteq B$，则对任意 $x\in U$，都有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\subseteq x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$. 假设存在某个 $x_i\in U$，使得 $x_i^{\lessdot_B\gtrdot_B}\subset x_i^{\lessdot_C\gtrdot_C}$，则有 $H(B)<H(C)$，这与已知条件矛盾，故对任意 $x\in U$，有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}=x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$.

定理 3　设(U,AT,I)是一个形式背景，$B,C\subseteq \mathrm{AT}$，若对于 $C\subseteq B$ 及对象导出三支概念格的条件信息熵 $H(C|B)$和 $H(B|C)$，则有 $H(C|B)=0$，$H(B|C)=H(B)-H(C)$.

证明：由 $C\subseteq B$，则有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\subseteq x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$，从而 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\cap x^{\lessdot_C\gtrdot_C}=x^{\lessdot_B\gtrdot_B}$，显然可得 $H(C|B)=0$. 经计算也可得 $H(B|C)=-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\cap x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}{|x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}=-\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_B\gtrdot_B}|}{|x^{\lessdot_C\gtrdot_C}|}=H(B)-H(C)$.

定理 4　设(U,AT,I)是一个形式背景，若对于 $C\subseteq B\subseteq \mathrm{AT}$ 及对象导出三支概念格的条件信息熵 $H(C|\mathrm{AT})$和 $H(B|\mathrm{AT})$，则有 $H(C|\mathrm{AT})\leqslant H(B|\mathrm{AT})$.

证明：由 $C\subseteq B$ 可知，$x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\subseteq x^{\lessdot_C\gtrdot_C}$，故有 $x^{\lessdot_B\gtrdot_B}\cap x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subseteq x^{\lessdot_C\gtrdot_C}\cap x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}$，即有 $H(C|\mathrm{AT})\leqslant H(B|\mathrm{AT})$.

定理 5 假设(U,AT,I)是一个形式背景,对于$B,C\subseteq \mathrm{AT}$,以及对象导出三支概念格的条件信息熵$H(B|C)$,联合信息熵$H(B:C)$和信息熵$H(C)$,则有$H(B|C)=H(B:C)-H(C)$.

证明:由定义 4 可得.

定义 5 设(U,AT,I)是一个形式背景,对于$B\subseteq \mathrm{AT}$及其对象导出三支概念格的信息熵$H(B)$,若满足$H(B)=H(\mathrm{AT})$,称B是对象导出三支概念格的熵协调集. 若$H(B)=H(\mathrm{AT})$,且对任意$C\subset B$有$H(C)\neq H(\mathrm{AT})$,则称B是对象导出三支概念格的熵约简集.

定理 6 假设(U,AT,I)是一个形式背景,任意$a\in \mathrm{AT}$,a为非核心属性当且仅当$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})=0$.

证明:a为非核心属性,故$\mathrm{AT}-\{a\}$为对象导出三支概念格的熵协调集,则$H(\mathrm{AT}-\{a\})=H(\mathrm{AT})$. 对任意$x\in U$,$x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}$且$x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}\subseteq x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}$,则$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})=-\frac{1}{|U|}\sum_{x\in U}\log_2\frac{|x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}\cap x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}|}{|x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}|}=0$.

由于有$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})=0$,对任意$x\in U$,有$(x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}})\subseteq x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}$,$\log_2\frac{|x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}|}{|x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}|}\leqslant 0$,也即$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})\geqslant 0$. 设存在某个$x_i\in U$,满足$(x_i^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x_i^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}})\subset x_i^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}$,则有$\log_2\frac{|x_i^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x_i^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}|}{|x_i^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}|}<0$,进而$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})>0$,这与已知条件矛盾. 故而对任意$x\in U$,$x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}$,而由命题 1 可知$x^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}\cap x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}$,故对任意$x\in U$,有$x^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=x^{\lessdot \mathrm{AT}\gtrdot \mathrm{AT}}$,也即$a$为非核心属性.

定理 7 设(U,AT,I)是一个形式背景,对任意$a\in \mathrm{AT}$,a为核心属性当且仅当$H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})>0$.

证明:由定理 6 可知.

例 1 设(U,AT,I)是一个形式背景,其中,$U=\{1,2,3,4,5\}$,$\mathrm{AT}=\{a,b,c,d,e\}$,如表 1 所示.

表 1 形式背景(U,AT,I)

Tab. 1 Formal contexts (U,AT,I)

U	a	b	c	d	e
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	0

经计算,$1^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=\{1\}$,$2^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=\{2\}$,$3^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=\{3\}$,$4^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=\{4\}$,$5^{\lessdot \mathrm{AT}-\{a\}\gtrdot \mathrm{AT}-\{a\}}=\{5\}$. 且$1^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}=\{14\}$,$2^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}=\{235\}$,$3^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}=\{235\}$,$4^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}=\{14\}$,$5^{\lessdot \{a\}\gtrdot \{a\}}=\{235\}$. $H(\{a\}|\mathrm{AT}-\{a\})=0$. 类似地可得,
$H(\{b\}|\mathrm{AT}-\{b\})>0$,$H(\{c\}|\mathrm{AT}-\{c\})=-\frac{1}{5}\left(\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\log_2 16>0$,$H(\{d\}|\mathrm{AT}-\{d\})=0$,$H(\{e\}|\mathrm{AT}-\{e\})=0$,由定理 6,7 知$\{b,c\}$为核心属性,$\{a,d,e\}$为非核心属性.

定理 8 设(U,AT,I)是一个形式背景,$B\subseteq \mathrm{AT}$,若B是对象导出三支概念格的熵约简集,当且仅当其对象导出三支概念格的信息熵$H(B)$,有$H(B)=H(\mathrm{AT})$且对任意$a\in B$,$H(\{a\}|B-\{a\})>0$.

证明:因为B是对象导出三支概念格的熵约简集,则B是对象导出三支概念格的熵协调集,故而有$H(B)=H(\mathrm{AT})$. 而对任意$a\in B$,此时a是B中的核心属性,由定理 7 可知,$H(\{a\}|B-\{a\})>0$.

反之,若$H(B)=H(\mathrm{AT})$,则B是对象导出三支概念格的熵协调集. 若对于任意$a\in B$,有$H(\{a\}|B-\{a\})>0$,则由定理 7 可知,a是B中的核心属性,也即任意$a\in B$,$B-\{a\}$均不是对象导出三支概念格的熵协调集,故B是对象导出三支概念格的熵约简集.

上述定理虽给出了对象导出三支概念格的核心属性与非核心属性的熵判定条件,并未给出区分相对必要属性与不必要属性的方法,但仍可获得对象导出三支概念格的熵约简集. 从核心属性出发,先判别核心属性集是否是约简集,若是则核心属性集为约简集;否则在此基础上依据定理 8,逐次添加恰当属性直至获得约简集.

例 2 续例 1,不妨取$B=\{a,b,c\}$,通过计算可得$H(B)=H(\mathrm{AT})$,故B是对象导出三支概念格的熵协调集. 因为b,c为核心属性,故$H(\{b\}|\{a,c\})>0$,$H(\{c\}|\{a,b\})>0$. 又因为$H(\{a\}|\{b,c\})>0$,从而a是B中的核心属性,也即B中每个元素都是必不可少的,故B为对象导出三支概念格的熵约简集.

定义 6[14]　设(U,AT,I)是一个形式背景，若存在$B\subseteq \mathrm{AT}$使得对所有的$x\in U$均满足$x^{\lessdot_B \gtrdot_B}=x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}$，称$B$是 OEG 协调集. 若$B$是 OEG 协调集而任意$C\subset B$均不是 OEG 协调集，则称$B$是 OEG 约简集.

定理 9　设(U,AT,I)是一个形式背景，$B\subseteq \mathrm{AT}$，若B是 OEG 协调集当且仅当B是对象导出三支概念格的熵协调集，B是 OEG 约简集当且仅当B为对象导出三支概念格的熵约简集.

证明：若B是 OEG 协调集，任意$x\in U$都有$x^{\lessdot_B \gtrdot_B}=x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}$，显然$H(B)=H(\mathrm{AT})$，故$B$是对象导出三支概念格的熵协调集.

若B是对象导出三支概念格的熵协调集，则$H(B)=H(\mathrm{AT})$. 即对于任意$x\in U$，$x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subseteq x^{\lessdot_B \gtrdot_B}$. 若存在某个$x_i\in U$，使得$x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subset x_i^{\lessdot_B \gtrdot_B}$，则有$\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_B \gtrdot_B}|}{|U|}>\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}{|U|}$，从而$H(B)<H(\mathrm{AT})$. 但这与已知条件矛盾，因此对任意$x\in U$都有$x^{\lessdot_B \gtrdot_B}=x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}$，故$B$是 OEG 协调集.

若B是 OEG 约简集，假设存在某个$b_0\in B$，使得$B-\{b_0\}$是对象导出三支概念格的熵协调集，则对任意$x\in U$，有$x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=x^{\lessdot_{B-\{b_0\}} \gtrdot_{B-\{b_0\}}}$，从而$B-\{b_0\}$是 OEG 协调集，这与$B$是 OEG 约简集矛盾，故而$B$是对象导出三支概念格的熵约简集.

反之，若B是对象导出三支概念格的熵约简集，假设存在某个$b'\in B$，使得$B-\{b'\}$是 OEG 协调集，则对任意$x\in U$，$x^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=x^{\lessdot_{B-\{b'\}} \gtrdot_{B-\{b'\}}}$，即$H(B-\{b'\})=H(\mathrm{AT})$，从而$B-\{b'\}$是对象导出三支概念格的熵协调集，这与$B$是对象导出三支概念格的熵约简集矛盾，故$B$是 OEG 约简集.

3　决策形式背景的熵属性约简

定义 7　设$S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是一个决策形式背景，$\mathrm{AT}\cap D=\varnothing$，其中，$\mathrm{AT}$，$D$分别称为决策形式背景的条件属性和决策属性. 若$H(D|\mathrm{AT})=0$，则称$S$是对象导出三支熵协调的决策形式背景.

为方便起见，下面称对象导出三支熵协调决策形式背景为三支熵协调决策形式背景.

例 3　设$S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是一个决策形式背景，其中，$U=\{1,2,3,4,5\}$，$\mathrm{AT}=\{a,b,c,d,e\}$，$D=\{f,g,h\}$，如表 2 所示.

表 2　决策形式背景(U,AT,I,D,J)

Tab. 2　Decision formal contexts (U,AT,I,D,J)

U	a	b	c	d	e	f	g	h
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	1	0	1	0	1	1
3	1	1	0	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	0	1	0	1
5	1	0	0	0	1	0	1	0

经计算得$1^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=\{1\}$，$2^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=\{2\}$，$3^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=\{3\}$，$4^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=\{4\}$，$5^{\lessdot_{\mathrm{AT}} \gtrdot_{\mathrm{AT}}}=\{5\}$，$1^{\lessdot_D \gtrdot_D}=\{1,4\}$，$2^{\lessdot_D \gtrdot_D}=\{2\}$，$3^{\lessdot_D \gtrdot_D}=\{3,5\}$，$4^{\lessdot_D \gtrdot_D}=\{1,4\}$，$5^{\lessdot_D \gtrdot_D}=\{3,5\}$，由于$H(D|\mathrm{AT})=0$，故$S$是三支熵协调决策形式背景.

定义 8　设$S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景，对$B\subseteq \mathrm{AT}$及其对象导出三支概念格的条件信息熵$H(D|B)$，若满足$H(D|B)=H(D|\mathrm{AT})$，则称B是对象导出三支概念格的熵协调集. 对$B\subseteq \mathrm{AT}$，有$H(D|B)=H(D|\mathrm{AT})$，且对任意$B'\subset B$，都满足$H(D|B')\neq H(D|\mathrm{AT})$，则称$B$为对象导出三支概念格的熵约简集. 记其核心属性集为$\mathrm{core}_D(\mathrm{AT})$.

定理 10　设$S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景，对于任意$a\in \mathrm{AT}$，a为非核心属性当且仅当$H(D|\mathrm{AT}-\{a\})=0$.

证明：S是三支熵协调决策形式背景，故$H(D|\mathrm{AT})=0$. 由于a为非核心属性，故而$\mathrm{AT}-\{a\}$为对象导出三支概念格的熵协调集，从而$H(D|\mathrm{AT}-\{a\})=H(D|\mathrm{AT})$，也即$H(D|\mathrm{AT}-\{a\})=0$；反之，若$H(D|\mathrm{AT}-\{a\})=0$，则有$\mathrm{AT}-\{a\}$为对象导出三支概念格的熵协调集，故$a$为非核心属性.

定理 11　设$S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景，$B\subseteq \mathrm{AT}$，B是对象导出三支概念格的熵约简集当且仅当对于其对象导出三支概念格的条件信息熵$H(D|B)$，有$H(D|B)=H(D|\mathrm{AT})$且对任意$a\in B$，$H(D|B-\{a\})>0$.

证明：B是对象导出三支概念格的熵约简集，则B是对象导出三支概念格的熵协调集，则$H(D|B)=H(D|\mathrm{AT})$成立. 而对于任意$a\in B$，显然有

$$H(D|B-\{a\})=-\frac{1}{|U|}\sum_{x\in U}\log_2\frac{|x^{\lessdot_D \gtrdot_D}\cap x^{\lessdot_{B-\{a\}}\gtrdot_{B-\{a\}}}|}{|x^{\lessdot_{B-\{a\}}\gtrdot_{B-\{a\}}}|}\geqslant 0.$$

假设存在某个 $b\in B$ 使得 $H(D|B-\{b\})=0$,则 $B-\{b\}$ 为对象导出三支概念格的熵协调集,这与 B 是对象导出三支概念格的熵约简集矛盾,故任意 $a\in B$,均有 $H(D|B-\{a\})>0$.

若 $H(D|B)=H(D|\mathrm{AT})$,则 B 是对象导出三支概念格的熵协调集. 设存在 $C\subset B$ 使得 $H(D|C)=0$,则对任意 $x\in U$ 都有 $x^{\lessdot_C \gtrdot_C}\subseteq x^{\lessdot_D \gtrdot_D}$ 成立. 而 $C\subset B$,故存在 $a\in B$ 使得 $x^{\lessdot_{B-\{a\}}\gtrdot_{B-\{a\}}}\subseteq x^{\lessdot_C \gtrdot_C}\subseteq x^{\lessdot_D \gtrdot_D}$,此时 $H(D|B-\{a\})=0$,这与 B 是对象导出三支概念格的熵协调集矛盾,故 B 是对象导出三支概念格熵约简集.

定义 9 设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景,对于 $a\in B\subseteq\mathrm{AT}$,记 a 在决策属性 D 下相对于属性集 B 的重要度为 $\mathrm{Sig}(a,B,D)=H(D|B-\{a\})-H(D|B)$. 令 $C=\mathrm{AT}-B$,对于任意 $b\in C$ 在决策属性 D 下相对于属性集 B 的重要度记为 $\mathrm{SGF}(b,B,D)=H(D|B)-H(D|B\cup\{b\})$.

定理 12 设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景,对于任意 $a\in\mathrm{AT}$,a 为核心属性当且仅当 $\mathrm{Sig}(a,\mathrm{AT},D)>0$.

证明:S 是三支熵协调决策形式背景,则有 $H(D|\mathrm{AT})=0$. a 为核心属性当且仅当 $H(D|\mathrm{AT})\neq H(D|\mathrm{AT}-\{a\})$,又因为 $H(D|\mathrm{AT}-\{a\})\geqslant 0$,从而 $H(D|\mathrm{AT}-\{a\})>0$,即 a 为核心属性当且仅当 $\mathrm{Sig}(a,\mathrm{AT},D)>0$.

推论 1 $\mathrm{core}_D(\mathrm{AT})=\{a|\mathrm{Sig}(a,\mathrm{AT},D)>0\}$.

证明:由定理 12 知.

上述内容虽只给出三支熵协调决策形式背景中核心属性的判别定理,并未给出非核心属性的区分方法,但仍可以获得约简集. 即通过 $\mathrm{Sig}(a,\mathrm{AT},D)$来确定核心属性集,判别核心属性集是否是约简集,若是则停止寻找;否则根据属性重要度 $\mathrm{SGF}(b,B,D)$选择恰当属性添加到核心属性中,直至获得对象导出三支概念格的熵约简集为止.

例 4 续例 3,因为 $\mathrm{Sig}(a,\mathrm{AT},D)=0$, $\mathrm{Sig}(b,\mathrm{AT},D)=0$, $\mathrm{Sig}(c,\mathrm{AT},D)>0$, $\mathrm{Sig}(d,\mathrm{AT},D)=0$, $\mathrm{Sig}(e,\mathrm{AT},D)=0$,故 c 为核心属性. 不妨取 $B=\{c\}$,此时 $H(D|B)\neq 0$,因此 B 不是熵约简集.

下面依照属性重要度依次计算,事实上,只需计算 $H(D|B\cup\{b\})$这部分,选择 $H(D|B\cup\{b\})$值较小的属性添加即可. 由于 $H(D|\{ac\})=0$,$H(D|\{bc\})>0$,$H(D|\{cd\})=0$,$H(D|\{ce\})=0$,故重要度最大的三个属性分别为 a,d,e,且此时 a,d,e 相对于 B 都是核心属性,因此对象导出三支概念格的熵约简集可以为$\{a,c\}$,$\{c,d\}$与$\{c,e\}$.

定义 10 设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景,记条件属性 AT 和决策属性 D 之间的互信息 $I(\mathrm{AT},D)=H(D)-H(D|\mathrm{AT})$.

定义 11 设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景, $B\subset\mathrm{AT}$, $a\in\mathrm{AT}-B$, 属性 a 对决策属性 D 的重要度函数:$\mathrm{SGF}(a,B,D)=(I(B\cup\{a\},D)-I(B,D))/H(D|\{a\})=(H(D|B)-H(D|B\cup\{a\}))/H(D|\{a\})$.

定理 13 设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$是三支熵协调决策形式背景,$B\subseteq\mathrm{AT}$,若 B 是对象导出三支概念格的熵约简集当且仅当 $I(\mathrm{AT},D)=I(B,D)$,且对任意 $a\in B$,$I(B,D)>I(B-\{a\},D)$.

证明:由定理 11 易得.

注 1 基于互信息中属性重要度的定义,给出了另外一种计算对象导出三支概念格的熵约简集的方式. 该方法引入了属性对于决策的重要性作为分子定义属性的重要度函数,改进了属性重要性的排序. 同样可通过找核心属性集,判别核心属性集是否是约简集,若是则停止寻找;否则根据互信息中属性重要度的定义,选择重要度最大的属性添加到核心属性中,直至获得约简集.

例 5 续例 3,c 为核心属性,经计算可得 $H(D|\{a\})=H(D|\{d\})=H(D|\{e\})=\frac{1}{5}\log_2\frac{27}{4}$,$H(D|\{b\})=\frac{1}{5}\log_2 27$,$H(D|\{c\})=\frac{1}{5}\log_2 27$,且又有 $H(D|\{ac\})=0$,$H(D|\{bc\})=\frac{1}{5}\log_2 4$,$H(D|\{cd\})=0$,$H(D|\{ce\})=0$,因此 $\mathrm{SGF}(a,\{c\},D)=\mathrm{SGF}(d,\{c\},D)=\mathrm{SGF}(e,\{c\},D)=\log_2\frac{81}{4}$,

$\mathrm{SGF}(b,\{c\},D)<0$，因此在核心属性集上添加 a,d,e 中任意一个，同样可得 $\{a,c\}$，$\{c,d\}$ 与 $\{c,e\}$ 为对象导出三支概念格的熵协调集.

定义 12[15]　设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$ 是一个决策形式背景，若对任意 $x\in U$ 均满足 $x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，称是三支粒协调的决策形式背景.

定义 13　设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$ 是一个决策形式背景，若存在 $B\subseteq\mathrm{AT}$，对任意 $x\in U$ 均满足 $x^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，称 B 是 OEG 协调集. 若 B 是 OEG 协调集而任意的 $C\subset B$ 均不是 OEG 协调集，则称 B 是 OEG 约简集.

定理 14　设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$ 是一个决策形式背景，若 S 是三支粒协调当且仅当 S 是对象导出三支熵协调.

证明：若 S 是三支粒协调的决策形式背景，则对任意 $x\in U$，都有 $x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，显然有 $H(D|\mathrm{AT})=0$，故 S 是对象导出三支熵协调.

若 S 是对象导出三支熵协调的决策形式背景，则 $H(D|\mathrm{AT})=0$. 对于任意 $x\in U$，都有 $\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\cap x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}|}{|x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}\leqslant\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}{|x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}=0$，也即 $H(D|\mathrm{AT})\geqslant0$. 若存在某个 $x_i\in U$ 使 $x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\not\subset x_i^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，则 $\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\cap x_i^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}|}{|x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}<\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}{|x_i^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}|}=0$，即 $H(D|\mathrm{AT})>0$，这与 S 是三支熵协调的决策形式背景矛盾. 故 $\forall x\in U$，都有 $x^{\lessdot_{\mathrm{AT}}\gtrdot_{\mathrm{AT}}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，即 S 是三支粒协调的决策形式背景.

定理 15　设 $S=(U,\mathrm{AT},I,D,J)$ 是三支熵协调决策形式背景，$B\subseteq\mathrm{AT}$，若 B 是 OEG 协调集当且仅当 B 是对象导出三支概念格的熵协调集，B 是 OEG 约简集当且仅当 B 是对象导出三支概念格的熵约简集.

证明：若 B 是 OEG 协调集，对任意 $x\in U$，有 $x^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，则 $H(D|B)=0$，故 B 是对象导出三支概念格的熵协调集.

反之，若 B 是对象导出三支概念格的熵协调集，则有 $H(D|B)=0$. 若存在 $x_i\in U$，使其满足 $x_i^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\not\subset x_i^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，则有 $\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\cap x_i^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}|}{|x_i^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}|}<\log_2\dfrac{|x_i^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}|}{|x_i^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}|}$，即有 $H(D|B)=-\dfrac{1}{|U|}\times\sum\limits_{x\in U}\log_2\dfrac{|x^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\cap x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}|}{|x^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}|}>0$，这与 B 是对象导出三支概念格的熵协调集矛盾. 因此对任意 $x\in U$，都有 $x^{\lessdot_{B}\gtrdot_{B}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，也即 B 是 OEG 协调集.

若 B 是 OEG 约简集，假设存在 $b_0\in B$，$B-\{b_0\}$ 是对象导出三支概念格的熵协调集，则对任意 $x\in U$，$x^{\lessdot_{B-\{b_0\}}\gtrdot_{B-\{b_0\}}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，从而 $B-\{b_0\}$ 是 OEG 协调集，这与 B 是 OEG 约简集矛盾，故而 B 是对象导出三支概念格的熵约简集.

反之，若 B 是对象导出三支概念格的熵约简集，假设存在某个 $b'\in B$，$B-\{b'\}$ 是 OEG 协调集，对任意 $x\in U$，$x^{\lessdot_{B-\{b'\}}\gtrdot_{B-\{b'\}}}\subseteq x^{\lessdot_{D}\gtrdot_{D}}$，则 $H(D|B-\{b'\})=0$，即 $B-\{b'\}$ 是对象导出三支概念格的熵协调集，这与 B 是对象导出三支概念格的熵约简集矛盾，故而 B 是 OEG 约简集.

4　结束语

文中引入对象导出三支概念格的信息熵、条件熵和互信息等概念，分别在形式背景与决策形式背景上探讨了对象导出三支概念格的熵属性约简方法. 在此基础上，证明了对象导出三支概念格的熵协调集等价于 OEG 协调集，对象导出三支概念格的熵约简集等价于 OEG 约简集. 然而，文中仍有很多不足之处，如举例中的数据集较小，未设计算法和分析其时间及复杂度，未给出不完备形式背景中对象导出三支概念格的熵属性约简方法等，这些问题将在后续做进一步的研究.

参考文献：

[1]　WILLE R. Restructuring lattice theory：An approach based on hierarchies of concepts[C]// Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Banff：Springer，1982：314-339. DOI：10.1007/978-94-009-7798-3_15.

[2] ZHANG Wenxiu, WEI Ling, QI Jianjun. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China, 2005, 48(6): 713-726. DOI: 10.1360/122004-104.
[3] WANG Xia, MA Jianmin. A novel approach to attribute reduction in concept lattices[C]// Rough Sets and Knowledge Technology, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Heidelberg: Springer, 2006: 522-529.
[4] LI Tong jun, LI Mingzhi, GAO Yu. Attribute reduction of concept lattice based on irreduction elements[J]. International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(6): 1-24. DOI: 10.1142/S021969131350046X.
[5] WU Weizhi, LEUNG Yee, MI Jusheng. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474. DOI: 10.1109/TKDE.2008.223.
[6] WEI Ling, QI Jianjun, ZHANG Wenxiu. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China Series F: Information Science, 2008, 51(7): 910-923. DOI: 10.1007/s11432-008-0067-4.
[7] LIU Minqian, WEI Ling, ZHAO Wei. The reduction theory of object oriented concept lattices and property oriented concept lattices[C]// Rough Sets and Knowledge Technology, Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer, 2009: 587-593. DOI: 10.1007/978-3-642-02962-2_74.
[8] YAO Yiyu. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Heidelberg: Springer, 2009: 642-649. DOI: 10.1007/978-3-642-02962-2_81.
[9] YAO Yiyu. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353. DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.021
[10] YAO Yiyu. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554. DOI: 10.1007/s12559-016-9397-5.
[11] QI Jianjun, WEI Ling, YAO Yiyu. Three-way formal concept analysis[C]// Rough Sets and Knowledge Technology. Heidelberg: Springer, 2014: DOI: 732-741. 10.1007/978-3-319-11740-9_67.
[12] QI Jianjun, QIAN Ting, WEI Ling. The connections between three-way and classical concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151. DOI: 143-151. 10.1016/j.knosys.2015.08.006.
[13] REN Ruisi, WEI Ling. The attribute reduction of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102. DOI: 10.1016/j.knosys.2016.01.045.
[14] 常欣欣,秦克云.基于对象导出三支概念格的形式背景粒约简方法[J].计算机科学,2018,45(10):225-228.DOI:10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.041.
[15] 林洪,秦克云.决策形式背景三支粒约简[J].计算机科学,2018,45(10):47-50,68.
[16] SHANNON C E. The mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(3/4): 379-423. DOI: 10.1063/1.3067010.
[17] LI Junli, HE Zongyi, ZHU Qiaoli, *et al*. An entory-based weighted concept lattice for merging multi-source geo-ontologies[J]. Entropy, 2013, 15(6): 2303-2318. DOI: 10.3390/e15062303.
[18] SINGH P K, CHERUKURI A K, LI Jinhai. Concepts reduction in formal concept analysis with fuzzy setting using shannon entropy[J]. International Journal of Machine Learing and Cybernetics, 2017, 8(1): 179-189. DOI: 10.1007/s13042-014-0313-6.
[19] 李美争,李磊军,米据生,等.概念格中基于粗糙熵的属性约简方法[J].计算机科学,2018,45(1):84-89.DOI:10.11896/j.issn.1002-137X.2018.01.013.
[20] 张晓鹤,陈德刚,米据生.基于信息熵的对象加权概念格[J].智能系统学报,2020,15(6):1097-1103.DOI:10.11992/tis.202006043.
[21] 陈东晓,李进金,林荣德,等.基于信息熵的形式背景属性约简[J].模式识别与人工智能,2020,33(9):786-798.DOI:10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202009003.
[22] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[M]. FERRÉ S, RUDOLPH S. Formal Concept Analysis. ICFCA 2009: Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer, 2009: 314-339. DOI: 10.1007/978-3-642-01815-2_23.
[23] 祁建军,魏玲,姚一豫.三支概念分析与决策[M].北京:科学出版社,2019.

(**责任编辑: 黄仲一　　英文审校: 黄心中**)