第 42 卷 第 4 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 42 No. 4
2021 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2021

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202011005

一类解析函数的 Bohr 定理

李程鹏,李锦成

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 定义单位开圆盘 D 内的一个解析函数类 $P_\alpha(D)=\{f\in A(D):\mathrm{Re}[f(z)/z]\geqslant\alpha\}(0<\alpha\leqslant 1)$,给出其增长和掩盖定理.作为应用,得到 $P_\alpha(D)$ 上的 Bohr 半径 r_0.特别地,当 $\alpha=1/2$ 时,$r_0=1/3$,推广了凸函数的 Bohr 半径.

关键词: Bohr 半径;Bohr 不等式;凸函数;解析函数

中图分类号: O 174.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2021)04-0547-04

Bohr Theorem for A Class of Analytic Functions

LI Chengpeng, LI Jincheng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The class $P_\alpha(D)=\{f\in A(D):\mathrm{Re}[f(z)/z]\geqslant\alpha\}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ of analytic functions in the open unit disk D is introduced. We establish the growth and covering theorem for this analytic function class. As an application, we obtain the Bohr radius r_0. In particular, $r_0=1/3$ when $\alpha=1/2$, which extends the Bohr radius of convex functions.

Keywords: Bohr radius; Bohr inequality; convex function; analytic function

用 $\mathbf{C}$ 表示复平面,$D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$表示 $\mathbf{C}$ 中的单位开圆盘,$D_r=D(0,r)$表示以原点为圆心、r 为半径的开圆盘.$H(D,\Omega)$表示从 D 映到$\Omega\subset\mathbf{C}$ 中的解析函数全体,$A(D)$表示 D 内正规化解析函数的全体,$K(D)$表示 D 内正规化单叶解析凸函数的全体.在单复变几何函数论中,凸函数都与正实部函数密切相关.定义正实部函数子类,记为 $P_\alpha(D)$[1],$0<\alpha\leqslant 1$,即

$$P_\alpha(D):=\{f\in A(D):\mathrm{Re}[f(z)/z]\geqslant\alpha\}.$$

注 1 当 $\alpha=1$ 时,由极值原理可知,$f(z)\equiv z$.

注 2[1] $K(D)\subset P_{1/2}(D)$.

在单复变中,Bohr[2]得到了经典的 Bohr 定理.

定理 A[2] 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 D 内解析,且$|f(z)|<1$,则在 $D_{1/3}$内,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|<1$.且$\dfrac{1}{3}$是最佳半径,称为 Bohr 半径.

该定理被应用到数论中,并与 Dirichlet 级数有关.Bohr[2]最早得到不等式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|<1$ 对所有的$|z|<\dfrac{1}{6}$恒成立,并标注精确值为$\dfrac{1}{3}$.之后,$|z|<\dfrac{1}{6}$被改进为$|z|<\dfrac{1}{3}$,而且证明了$\dfrac{1}{3}$是最好的常数.这个

收稿日期: 2020-11-02

通信作者: 李锦成(1974-),男,讲师,主要从事复分析的研究.E-mail:hquljc@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12071161);福建省自然科学基金资助项目(2020J01073);华侨大学高层次人才科研启动项目(19BS102)

最好的结果分别由数学家 Wiener,Riesz 和 Schur 等独立给出,更多关于 Bohr 半径的证明见文献[3-5].

定理 A 中的不等式 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|<1$ 称为 Bohr 不等式,可将其改写成 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|<1-|a_0|$,从而 Bohr 不等式可以表示为距离形式

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|,|a_0|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|<1-|a_0|=d(f(0),\partial D).$$

上式中:d 为欧式距离;∂D 为 D 的边界.基于此形式,Bohr 不等式可以被推广到任何区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$[6-9].

给定一个区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$,找出最大的半径 $r_\Omega>0$,使得对任一 $f\in H(D,\Omega)$ 和 $|z|<r_\Omega$,有

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|,|f(0)|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|<d(f(0),\partial\Omega).$$

文献[6]研究表明:当 Ω 是凸域时,r_Ω 与经典 Bohr 半径一致为$\frac{1}{3}$,且不依赖于 Ω.

类似地,可以定义一类解析函数满足 Bohr 现象.

定义 1[10-11] 设 M 是由 D 内解析函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 组成的类,若存在 $r_*>0$,使得对于任意一个 $f\in M$ 和 $|z|<r_*$,有

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|,|f(0)|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|<d(f(0),\partial f(D)),$$

则称 M 满足 Bohr 现象,其中,最大的 r_* 称为 M 的 Bohr 半径.

Bohr 现象是一个活跃的研究领域,Ali 等[11]确定了几类解析函数的 Bohr 半径,包括 α 级凸函数类及近于凸函数子类.

由于 $K(D)\subset P_{1/2}(D)$,解析函数族 $P_\alpha(D)$的 Bohr 半径将是一个有意义的问题.

给出上述问题的解答,通过建立 $P_\alpha(D)$的增长和掩盖定理,得到了 $P_\alpha(D)$的 Bohr 定理,给出了相应的 Bohr 半径.

1 相关引理

为了给出文中的主要结果,需引入以下 2 个引理.

引理 1[12] 设函数 $h(z)$在 D 内解析,$\mathrm{Re}[h(z)]>0$,且 $h(0)=1$,则当 $z\in D$ 时,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\mathrm{Re}[h(z)]\leqslant|h(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

引理 2[13] 设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 D 内解析,且 $\mathrm{Re}[f(z)]>0$,则对于任意一个正整数 $n\geqslant1$,

$$|a_n|\leqslant2\mathrm{Re}(a_0).$$

证明:为了读者方便,给出证明,具体可参考文献[13].

不妨设 $f(z)$在 $\overline{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z|\leqslant1\}$内解析,这是因为一般情形可用 $f(rz)(0<r<1)$代替 $f(z)$,然后,令 $r\to1$ 即可.

对于任一正整数 $n\geqslant1$,由于

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\overline{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\mathrm{Re}[f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta,$$

从而,

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|2\mathrm{Re}[f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]|\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\mathrm{Re}[f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta=2\mathrm{Re}[f(0)],$$

即 $|a_n|\leqslant2\mathrm{Re}(a_0)$.

2 主要结果

定理 1 设 $f\in P_\alpha(D)$,$0<\alpha\leqslant1$,则当 $z\in D$ 时,有

$$\frac{|z|(1-(1-2\alpha)|z|)}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|(1+(1-2\alpha)|z|)}{1-|z|}.$$

从而，$D_\alpha\subset f(D)$.

证明：由于 $f\in P_\alpha(D)$，从而当 $z\in D$ 时，$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]>\alpha$，即 $\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}-\alpha\right]>0$.

令 $\varphi(z)=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{f(z)}{z}-\alpha\right)$，则 $\varphi(0)=1$，$\mathrm{Re}[\varphi(z)]>0$. 由引理 1，可得

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\mathrm{Re}[\varphi(z)]\leqslant|\varphi(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

从而，

$$\alpha+(1-\alpha)\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]\leqslant\left|\frac{f(z)}{z}-\alpha\right|+\alpha\leqslant\alpha+(1-\alpha)\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

于是，

$$\frac{1-(1-2\alpha)|z|}{1+|z|}\leqslant\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]\leqslant\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\left|\frac{f(z)}{z}-\alpha\right|+\alpha\leqslant\frac{1+(1-2\alpha)|z|}{1-|z|},$$

即

$$\frac{|z|(1-(1-2\alpha)|z|)}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|(1+(1-2\alpha)|z|)}{1-|z|}.$$

上式左边令 $|z|\to1$，可得 $D_\alpha\subset f(D)$.

注 3　若 $f\in P_\alpha(D)$，则 $f(0)=0$，且 $d(f(0),\partial f(D))=d(0,\partial f(D))\geqslant\alpha$.

定理 2　设 $f\in P_\alpha(D)$，$0<\alpha\leqslant1$. 记 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则当 $|z|<r_0$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz^n|<d(f(0),\partial f(D)),\tag{1}$$

其中，

$$r_0=\begin{cases}\frac{-(1+\alpha)+\sqrt{(1-\alpha)(1+7\alpha)}}{2(1-2\alpha)}, & 0<\alpha<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{3}, & \alpha=\frac{1}{2},\\ \frac{(1+\alpha)-\sqrt{(1-\alpha)(1+7\alpha)}}{2(2\alpha-1)}, & \frac{1}{2}<\alpha\leqslant1\end{cases}\tag{2}$$

为 $P_\alpha(D)$ 的 Bohr 半径.

证明：由于 $f\in P_\alpha(D)$，故 $f(0)=f'(0)-1=0$，且 $\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}-\alpha\right]>0$.

令 $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}-\alpha$，则 $\varphi(z)=(1-\alpha)+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1}$ 在 D 内解析，且 $\mathrm{Re}[\varphi(z)]>0$.

根据引理 2，有

$$|a_n|\leqslant2(1-\alpha),\qquad n\geqslant2.$$

从而，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz^n|=|z|+\sum_{n=2}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant|z|+2(1-\alpha)\frac{|z|^2}{1-|z|}.$$

再结合注 3，有 $d(f(0),\partial f(D))=d(0,\partial f(D))\geqslant\alpha$.

于是，当 $|z|<1$，且 $|z|+2(1-\alpha)\frac{|z|^2}{1-|z|}<\alpha$ 时，式(1)成立.

解不等式组

$$\begin{cases}|z|<1,\\ |z|+2(1-\alpha)\frac{|z|^2}{1-|z|}<\alpha.\end{cases}$$

经计算,可得$|z|<r_0$.故当$|z|<r_0$时,式(1)成立.

下面证明r_0为$P_\alpha(D)$的Bohr半径,即r_0为最佳常数.

取$\dfrac{f(z)}{z}=\alpha+(1-\alpha)\dfrac{1+z}{1-z}$,则

$$f(z)=\frac{z(1+(1-2\alpha)z)}{1-z}=z+2(1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}z^n,$$

且$\mathrm{Re}\left[\dfrac{f(z)}{z}\right]>\alpha$(当$z\in D$时).从而,$f(z)\in P_\alpha(D)$,且$d(f(0),\partial f(D))=\alpha$.因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz^n|<d(f(0),\partial f(D))\Leftrightarrow|z|+2(1-\alpha)\frac{|z|^2}{1-|z|}<\alpha\Leftrightarrow|z|<r_0.$$

这表明r_0为$P_\alpha(D)$的Bohr半径.

推论1 设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in K(D)$,则当$|z|<\dfrac{1}{3}$时,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz^n|<d(f(0),\partial f(D))$,且$\dfrac{1}{3}$为Bohr半径.

证明:由文献[1]知,$K(D)\subset P_{1/2}(D)$.由定理2知,当$\alpha=\dfrac{1}{2}$时,$r_0=\dfrac{1}{3}$.此时,极值函数为$f(z)=\dfrac{z}{1-z}\in K(D)$,故结论成立.

参考文献:

[1] SUFFRIDGE T J. Some special classes of conformal mappings[M]// KÜHNAU R. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 2005. DOI: 10.1016/S1874-5709(05)80011-3.

[2] BOHR H. A theorem concerning power series[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1914, 13(1): 1-5. DOI: 10.1112/plms/s2-13.1.1.

[3] TOMIC M. Sur un théorême de H. Bohr[J]. Mathematica Scandinavica, 1962, 11: 103-106. DOI: 10.7146/math.scand.a-10653.

[4] PAULSEN V I, POPESCU G, SINGH D. On Bohr's inequality[J]. Proceeding of the London Mathmatical, 2002, 85(2): 493-512. DOI: 10.1112/S0024611502013692.

[5] SIDON S. Über einen Satz von Herrn Bohr[J]. Mathematische Zeitschrift, 1927, 26: 731-732. DOI: 10.1007/bf01475487.

[6] AIZENBERG L. Generalization of results about the Bohr radius for power series[J]. Studia Mathematica, 2007, 180(2): 161-168. DOI: 10.4064/sm180-2-5.

[7] ALI R M, BARNARD R W, SOLYNIN A Y. A note on Bohr's phenomenon for power series[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2017, 449(1): 154-167. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.11.049.

[8] MUHANNA Y A. Bohr's phenomenon in subordination and bounded harmonic classes[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2010, 5(11): 1071-1078. DOI: 10.1080/17476931003628190.

[9] BHOWMIK B, DAS N. Bohr phenomenon for subordinating families of certain univalent functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2018, 462(2): 1087-1098. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.01.035.

[10] ALLU V, HALDER H. Bohr radius for certain classes of starlike and convex univalent functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2021, 493(1): 124519. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124519.

[11] ALI R M, JAIN N K, RAVICHANDRAN V. Bohr radius for classes of analytic functions[J]. Results in Mathematics, 2019, 74(4): 179(1-13). DOI: 10.1007/s00025-019-1102-z.

[12] CONWAY J B. Functions of one complex variable Ⅱ[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1995.

[13] LANDAU E, GAIER D. Darstellung und begründung einiger neuerer ergebnisse der funktionentheorie[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

(**责任编辑:** 黄晓楠 **英文审校:** 黄心中)