

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202006049



# 模糊 $\beta$ -最小和最大描述的矩阵表示

黄建新<sup>1</sup>, 许丽婷<sup>2</sup>, 于佩秋<sup>2</sup>, 李进金<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;  
2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

**摘要:** 利用矩阵方法研究模糊  $\beta$ -覆盖近似空间中有关模糊  $\beta$ -最小和最大描述的问题, 并研究模糊  $\beta$ -覆盖近似空间的约简问题. 首先, 通过定义的新矩阵计算模糊  $\beta$ -最小和最大描述, 并用相关的实例进行验证. 其次, 定义去除交可约元的约简, 提出有效计算约简的一种矩阵方法. 最后, 研究模糊  $\beta$ -最大描述和去除交可约元产生的约简之间的联系.

**关键词:** 模糊  $\beta$ -覆盖; 模糊  $\beta$ -最小描述; 模糊  $\beta$ -最大描述; 约简; 矩阵

**中图分类号:** O 29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2021)03-0402-08

## Matrix Representation of Fuzzy $\beta$ -Minimal and Maximal Descriptions

HUANG Jianxin<sup>1</sup>, XU Liting<sup>2</sup>, YU Peiqiu<sup>2</sup>, LI Jinjin<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematiccal Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;  
2. School of Mathematics Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

**Abstract:** A matrix method is used to study the fuzzy  $\beta$ -minimal and maximal descriptions in the fuzzy  $\beta$ -covering approximation spaces, and the reduction of fuzzy  $\beta$ -covering approximation space. Firstly, we calculate fuzzy  $\beta$ -minimal and maximal descriptions by the defined new matrix, and verify them by related examples. Secondly, we define the reduction that removes intersection reducible elements, and propose a matrix method to calculate efficiently the reduction. Finally, we study the relationship between the fuzzy  $\beta$ -maximal descriptions and reductions produced by removing intersection reducible elements.

**Keywords:** fuzzy  $\beta$ -covering; fuzzy  $\beta$ -minimal description; fuzzy  $\beta$ -maximal description; reduction; matrix

Zakowski<sup>[1]</sup> 在 20 世纪 80 年代提出的覆盖粗糙集理论是 Pawlak 经典粗糙集理论<sup>[2]</sup> 的推广, 是知识发现、规则获取领域强有力的数学工具. 它不仅丰富了粗糙集理论, 而且扩展了粗糙集理论在实际问题中的应用. 覆盖粗糙集和经典粗糙集都旨在处理定性(离散)数据, 由于数据库中属性的值既可以是符号的, 也可以是实值的<sup>[3]</sup>, 因此, 在处理实值数据集时存在很大的局限性. 然而, 模糊集理论<sup>[4]</sup> 对于克服这些局限性非常有用, 因为它可以有效地处理模糊的概念和分级的不可分辨性. 因此, 学者们将覆盖粗糙集模型扩展为模糊覆盖粗糙集.

许多学者基于模糊覆盖概念构建一些模糊粗糙集模型<sup>[5-8]</sup>, 可以看作是覆盖粗糙集理论和模糊粗糙集理论的桥梁. 在文献[5, 7]中模糊覆盖的定义中  $\beta$  的值为 1, 具有一定局限性. Ma<sup>[9]</sup> 通过引入模糊  $\beta$ -覆盖和模糊  $\beta$ -邻域的概念, 定义更一般的模糊覆盖粗糙集模型, 其中, 参数  $\beta$  的范围为  $(0, 1]$ . Yang 等<sup>[10]</sup> 对模糊  $\beta$ -覆盖近似空间的性质和基于模糊覆盖的粗糙集模型<sup>[9]</sup> 进行研究, 提出 3 种基于模糊覆盖

的粗糙集模型作为模型的推广. D'err 等<sup>[11]</sup>将 4 种基于覆盖的邻域算子的定义扩展到模糊集, 并且将模糊邻域算子与模糊覆盖相结合, 得到 16 个不同的模糊邻域算子, 并研究这 16 个算子之间的偏序关系. Yang 等<sup>[12]</sup>通过引入邻域系统、模糊  $\beta$ -最小和最大描述等概念, 研究这些模糊邻域算子的性质及其相互关系, 并构造 6 种类型的模糊  $\beta$  覆盖.

知识约简是知识发现的重要过程, 是寻找最简单规则和最大泛化规则的重要手段, 因而也是粗糙集理论的核心内容之一. 知识库中知识并不是同等重要的, 甚至其中某些知识是冗余的, 当知识库数据是随机采集时, 其冗余性更为普遍. 冗余知识的存在一方面资源的浪费(需要储存空间); 另一方面, 干扰人们作出正确而简洁的决策. 因此, 知识约简的概念被提出, 即在保持知识库分类能力不变的前提下, 删除不相关或不重要的知识. 通过知识约简, 去掉不必要的知识, 简化知识的同时, 又不丢失基本信息.

在覆盖粗造集中, Wang 等<sup>[13]</sup>提出 IN-可约元及 IN-约简, 使用矩阵方法计算最小和最大描述和覆盖约简. 在模糊  $\beta$  覆盖近似空间中, Yang 等<sup>[10]</sup>提出如果模糊  $\beta$  覆盖中的某一个元素可表示为其余某些元素的并集, 则这个元素被称为模糊  $\beta$  覆盖中的可约元的定义. Yang 等<sup>[14]</sup>提出了模糊  $\beta$ -最小描述的定义, 研究模糊  $\beta$ -最小描述的矩阵表示, 并讨论了模糊  $\beta$ -最小描述与约简之间的联系. 但是在模糊  $\beta$  覆盖中对于交可约元及模糊  $\beta$ -最大描述与约简之间的联系没有相关研究. 因此, 本文利用一种新的矩阵方法计算模糊  $\beta$  最小和最大描述, 从而讨论模糊  $\beta$ -最大描述与约简之间的联系.

### 1 预备知识

**定义 1**<sup>[9]</sup> 设  $U$  是非空有限集合,  $F(U)$  为  $U$  的模糊幂集. 对任意  $\beta \in (0, 1]$ , 称  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 其中,  $C_i \in F(U) (i = 1, 2, \dots, m)$ . 若对任意  $x \in U$ , 有  $(\bigcup_{i=1}^m C_i)(x) \geq \beta$ , 则称  $(U, \hat{C})$  为一个模糊  $\beta$ -覆盖近似空间.

实际上, 文献[5, 7]中的模糊  $\beta$  覆盖的  $\beta = 1$  是模糊  $\beta$ -覆盖的特例.

**定义 2**<sup>[14]</sup> 设  $(U, \hat{C})$  为一个模糊  $\beta$ -覆盖近似空间,  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 其中,  $\beta \in (0, 1]$ . 对任意  $x \in U$ ,  $x$  的模糊  $\beta$ -最小描述定义为

$$(\widetilde{Md}_x^\beta)_{\hat{C}} = \{C \in \hat{C} : (C(x) \geq \beta) \wedge (\forall D \in \hat{C} \wedge D(x) \geq \beta \wedge D \subseteq C \Rightarrow C = D)\}.$$

**定义 3**<sup>[12]</sup> 设  $(U, \hat{C})$  为一个模糊  $\beta$ -覆盖近似空间,  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 其中,  $\beta \in (0, 1]$ . 对任意  $x \in U$ ,  $x$  的模糊  $\beta$ -最大描述定义为

$$(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = \{C \in \hat{C} : (C(x) \geq \beta) \wedge (\forall D \in \hat{C} \wedge D(x) \geq \beta \wedge D \supseteq C \Rightarrow C = D)\}.$$

为了简化模糊  $\beta$ -最小和最大描述的定义, Yang 等<sup>[12]</sup>给出  $x$  的  $\beta$ -邻域系统的定义.

**定义 4**<sup>[12]</sup> 设  $(U, \hat{C})$  为一个模糊  $\beta$ -覆盖近似空间, 对任意  $x \in U$ ,  $x$  的  $\beta$ -邻域系统定义为

$$\widetilde{N}_C^\beta(x) = \{C \in \hat{C} : C(x) \geq \beta\}.$$

根据定义 4,  $x \in U$  的模糊  $\beta$ -最小和最大描述分别表示为

$$\widetilde{Md}_C^\beta(x) = \{C \in \widetilde{N}_C^\beta(x) : \forall D \in \widetilde{N}_C^\beta(x) \wedge D \subseteq C \Rightarrow C = D\},$$

$$\widetilde{MD}_C^\beta(x) = \{C \in \widetilde{N}_C^\beta(x) : \forall D \in \widetilde{N}_C^\beta(x) \wedge D \supseteq C \Rightarrow C = D\}.$$

**定义 5**<sup>[9]</sup> 设  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是非空有限集合,  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖,  $\hat{C}$  用矩阵表示为  $\mathbf{P}^{\hat{C}} = (p_{i,j}^{\hat{C}})_{n \times m}$ , 其中,  $p_{i,j}^{\hat{C}} = C_j(x_i)$ .

**定义 6**<sup>[14]</sup> 设  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖,  $\beta \in (0, 1]$ ,  $\hat{C}_1 \subseteq \hat{C}$ , 则  $\hat{C}_1$  在  $\hat{C}$  中的隶属函数定义为

$$f(\hat{C}_1) = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_m)^T.$$

$$\text{其中, } z_i = \begin{cases} 1, & C_i \in \hat{C}, i = 1, 2, \dots, m, \\ 0, & C_i \notin \hat{C}, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

2 模糊  $\beta$ -最小和最大描述与约简

2.1 矩阵表示

Yang 等<sup>[14]</sup>提出模糊  $\beta$  最小描述的定义通过,研究模糊  $\beta$  最小描述的矩阵表示. 通过定义一些新的矩阵,从而给出一种新的模糊  $\beta$  最小和最大描述的矩阵表示.

**定义 7** 设  $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$  是非空有限集合,  $\hat{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖. 若  $\mathbf{P}^{\hat{C}}=(\hat{p}_{i,j}^{\hat{C}})_{n\times m}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ , 其中,  $\boldsymbol{\alpha}_j=(p_{1,j} \ p_{2,j} \ \cdots \ p_{n,j})^T, j=1,2,\cdots,m$ , 则有  $\mathbf{P}^{\hat{C}(x_i)}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ , 其中,  $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_j, p_{i,j}\geq\beta, i\in\{1,2,\cdots,n\}, j\in\{1,2,\cdots,m\}, \\ 0, p_{i,j}<\beta, i\in\{1,2,\cdots,n\}, j\in\{1,2,\cdots,m\}. \end{cases}$

**例 1** 设  $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ ,  $U$  的模糊子集族  $\hat{C}=\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5\}$ , 其中,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{0.6}{x_5}, & C_2 &= \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.4}{x_5}, \\ C_3 &= \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.2}{x_5}, & C_4 &= \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.4}{x_5}, \\ C_5 &= \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.2}{x_5}. \end{aligned}$$

根据定义 5,有

$$\mathbf{P}^{\hat{C}} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

对于  $\beta=0.5$  时,根据定义 7,有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\hat{C}(x_1)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}^{\hat{C}(x_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}^{\hat{C}(x_3)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}^{\hat{C}(x_4)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}^{\hat{C}(x_5)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**定义 8** 设  $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$  是非空有限集合,  $\hat{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖,  $\hat{C}$  的关系特征矩阵定义为  $\mathbf{Q}^{\hat{C}}=(\hat{q}_{i,j}^{\hat{C}})_{m\times m}, \hat{q}_{i,j}^{\hat{C}}=\begin{cases} 1, \exists x\in U, C_i(x)\neq 0, C_j(x)\neq 0, C_i\subseteq C_j, i,j\in\{1,2,\cdots,m\}, \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$

**定义 9** 设  $\hat{Q}^{\hat{C}}=\hat{q}_{i,j}^{\hat{C}}_{m\times m}$ , 定义矩阵  $\hat{M}^{\hat{C}}=(\hat{c}_i^{\hat{C}})_{m\times 1}$ , 其中,  $\hat{c}_i^{\hat{C}}=\begin{cases} 1, \hat{q}_{i,i}^{\hat{C}}=1 \wedge \hat{q}_{j,i}^{\hat{C}}\neq 1, i\neq j \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$

**定义 10** 设  $\hat{Q}^{\hat{C}}=\hat{q}_{i,j}^{\hat{C}}_{m\times m}$ , 定义矩阵  $\hat{N}^{\hat{C}}=(\hat{d}_i^{\hat{C}})_{m\times 1}$ , 其中,  $\hat{d}_i^{\hat{C}}=\begin{cases} 1, \hat{q}_{i,i}^{\hat{C}}=1 \wedge \hat{q}_{i,j}^{\hat{C}}\neq 1, i\neq j, \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$

根据定义 6,9,可以得到模糊  $\beta$ -最小描述的矩阵表示.

**定理 1** 设  $\hat{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖. 对于  $\beta\in(0,1], x\in U$ , 则  $f(\widetilde{Md}_{x_i}^{\beta})=\mathbf{M}^{\hat{C}(x_i)}$ .  
证明:  $C_t\in\widetilde{Md}_{x_i}^{\beta}\Leftrightarrow (C_t(x_i)\geq\beta)\wedge(\forall C_s\in\hat{C}\wedge(C_s(x_i)\geq\beta)\wedge(C_s\subseteq C_t\Rightarrow C_t=C_s))\Leftrightarrow (C_t\in\hat{C}(x_i))\wedge$

$$(\forall C_s \in \hat{C} \wedge (C_s \in \hat{C}(x_i)) \wedge (C_s \subseteq C_t \Rightarrow C_t = C_s)) \Leftrightarrow q_{t,i}^{\hat{C}(x_i)} = 1 \wedge q_{s,i}^{\hat{C}(x_i)} \neq 1 (t \neq s) \Leftrightarrow \hat{c}_i^{\hat{C}(x_i)} = 1.$$

根据定义 6,10,可以得到模糊  $\beta$ -最大描述的矩阵表示.

**定理 2** 设  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的模糊  $\beta$ -覆盖. 对于  $\beta \in (0, 1], x \in U$ , 则  $f(\widetilde{MD}_{x_i}^\beta) = N^{\hat{C}(x_i)}$ .

证明: 类似定理 1 可证明.

提出的模糊  $\beta$ -最小和最大描述的矩阵表示跟文献[14]中的相比, 计算步骤、利用到的矩阵较少. 计算的方法简洁明了且快速, 提高计算效率.

**例 2** 设  $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $U$  的模糊子集族  $\hat{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ , 其中,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.5}{x_4} + \frac{0.3}{x_5} + \frac{0.6}{x_6}, & C_2 &= \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.4}{x_5} + \frac{0.7}{x_6}, \\ C_3 &= \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.2}{x_5} + \frac{0.1}{x_6}, & C_4 &= \frac{0.4}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{0.7}{x_5} + \frac{0.4}{x_6}, \\ C_5 &= \frac{0.9}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{0.6}{x_5} + \frac{0.6}{x_6}. \end{aligned}$$

根据定义 5, 可得

$$\hat{P}^{\hat{C}} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 & 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.1 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

对于  $\beta=0.5$  时, 根据定义 7, 有

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\hat{C}(x_1)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, & \hat{P}^{\hat{C}(x_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{P}^{\hat{C}(x_3)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, & \hat{P}^{\hat{C}(x_4)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 & 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \\ \hat{P}^{\hat{C}(x_5)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, & \hat{P}^{\hat{C}(x_6)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.8 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对于  $x_i \in U$ , 根据矩阵  $\hat{P}^{\hat{C}(x_i)}$  都可以产生对应的一个  $\hat{C}(x_i) = \{C_1^i, C_2^i, \dots, C_m^i\}$ , 从而可以得到每个  $x_i$

对应的  $\hat{C}(x_i) = \{C_1^i, C_2^i, \dots, C_m^i\}$ , 即  $\hat{C}(x_1) = \{C_1^1, C_2^1, C_3^1, C_4^1, C_5^1\}$ , 其中,

$$C_1^1 = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.5}{x_4} + \frac{0.3}{x_5} + \frac{0.6}{x_6}, \quad C_2^1 = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.4}{x_5} + \frac{0.7}{x_6},$$

$$C_3^1=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0}{x_5}+\frac{0}{x_6}, \quad C_4^1=\frac{0}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0}{x_5}+\frac{0}{x_6},$$
$$C_5=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{0.9}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.6}{x_6}.$$

根据定义 8,  $\hat{C}(x_1)$  对应的关系特征矩阵为

$$\hat{Q}^{\hat{C}(x_1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定义 9,10,  $x_1$  的模糊  $\beta$ -最小和最大描述的矩阵表示为

$$\mathbf{M}^{\hat{C}(x_1)}=[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{N}^{\hat{C}(x_1)}=[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

由上述步骤,  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的模糊  $\beta$ -最小和最大描述的矩阵分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\hat{C}(x_2)} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T, & \mathbf{M}^{\hat{C}(x_3)} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T, & \mathbf{M}^{\hat{C}(x_4)} &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T, \\ \mathbf{M}^{\hat{C}(x_5)} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T, & \mathbf{M}^{\hat{C}(x_6)} &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, & \mathbf{N}^{\hat{C}(x_2)} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T, \\ \mathbf{N}^{\hat{C}(x_3)} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T, & \mathbf{N}^{\hat{C}(x_4)} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T, \\ \mathbf{N}^{\hat{C}(x_5)} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T, & \mathbf{N}^{\hat{C}(x_6)} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T. \end{aligned}$$

由定理 1, 当  $\beta=0.5$  时, 模糊  $\beta$ -最小描述分别为

$$\begin{cases} \widetilde{Md}_{\hat{C}(x_1)}^\beta = \{C_1, C_2\}, & \widetilde{Md}_{\hat{C}(x_2)}^\beta = \{C_3, C_4\}, & \widetilde{Md}_{\hat{C}(x_3)}^\beta = \{C_2, C_5\}, \\ \widetilde{Md}_{\hat{C}(x_4)}^\beta = \{C_1, C_2, C_4\}, & \widetilde{Md}_{\hat{C}(x_5)}^\beta = \{C_2, C_1\}. \end{cases}$$

根据定理 2, 当  $\beta=0.5$  时, 模糊  $\beta$ -最大描述分别为

$$\begin{cases} \widetilde{MD}_{\hat{C}(x_1)}^\beta = \{C_2, C_5\}, & \widetilde{MD}_{\hat{C}(x_2)}^\beta = \{C_3, C_4\}, & \widetilde{MD}_{\hat{C}(x_3)}^\beta = \{C_2, C_5\}, \\ \widetilde{MD}_{\hat{C}(x_4)}^\beta = \{C_2, C_4, C_5\}, & \widetilde{MD}_{\hat{C}(x_5)}^\beta = \{C_2, C_5\}. \end{cases}$$

2.2 模糊  $\beta$ -覆盖的约简

若模糊  $\beta$ -覆盖中的某一个元素可以表示为其余某些元素的并集, 则这个元素被称为模糊  $\beta$ -覆盖中的可约元<sup>[10]</sup>. 模糊  $\beta$ -覆盖中的某一个元素可以表示为其余某些元素的交集的情况, 即定义 11.

**定义 11** 设  $\hat{C}=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 对于  $\beta \in (0, 1], C \in \hat{C}$ , 若  $C$  表示为  $\hat{C}-\{C\}$  中某些元素的交, 则称  $C$  为  $\hat{C}$  的交可约元; 否则,  $C$  为  $\hat{C}$  的交不可约元.

**例 3** 根据例 1, 可以得到  $\hat{C}$  是一个模糊  $\beta$ -覆盖 ( $0<\beta\leqslant 1$ ). 由于  $C_2=C_1 \wedge C_4, C_5=C_3 \wedge C_4$ , 所以  $C_2, C_5$  为  $\hat{C}$  的交可约元,  $C_1, C_3, C_4$  为  $\hat{C}$  的交不可约元.

**定理 3** 设  $\hat{C}=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖. 如果  $C$  是  $\hat{C}$  的交可约元, 则  $\hat{C}-\{C\}$  仍然是一个模糊  $\beta$ -覆盖.

证明: 设  $\hat{C}=\{C, C_1, C_2, \cdots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 其中,  $C, C_i \in F(U) (i=1, 2, \cdots, m)$ , 从而有  $((\bigcup_{i=1}^m C_i) \cup C)(x) \geqslant \beta$ . 由于  $C$  是  $\hat{C}$  的交可约元, 从而  $C$  可以表示为  $\hat{C}-\{C\}$  中某些元素的交, 即  $C=\bigcap_{j \in \{1, 2, \cdots, m\}} C_j$ . 因此, 对于  $\forall x \in U, \exists j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ , 使得  $C_j(x)=C(x)$ , 则  $(\bigcup_{i=1}^m C_i)(x) \geqslant \beta, \hat{C}-\{C\}$  仍然是一个模糊  $\beta$ -覆盖.

定理 3 表明在模糊  $\beta$ -覆盖  $\hat{C}$  中删除了所有的交可约元, 则其余部分仍然是一个模糊  $\beta$ -覆盖.

**例 4** 根据例 3,  $C_2, C_5$  为  $\hat{C}$  的交可约元,  $\{C_1, C_3, C_4\}$  仍然是一个模糊  $\beta$ -覆盖 ( $0<\beta\leqslant 1$ ).

**定理 4** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖,  $C$  是  $\hat{C}$  的交可约元,  $C_1 \in \hat{C} - \{C\}$ , 则  $C_1$  是  $\hat{C}$  的交可约元当且仅当  $C_1$  是  $\hat{C} - \{C\}$  的交可约元.

证明: 设  $\hat{C} = \{C, C_1, C_2, \dots, C_m\}$ , 由于  $C$  是  $\hat{C}$  的交可约元, 所以  $\exists C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,t} \in \hat{C} - \{C\} (1 \leq t \leq m)$ , 使得  $C = \bigcap_{j=1}^t C_{i,j}$ .

因为  $C_1$  是  $\hat{C}$  的交可约元, 所以  $\exists C_{p1}, C_{p2}, \dots, C_{ps} \in \hat{C} - \{C_1\} (1 \leq s \leq m)$ , 使得  $C_1 = \bigcap_{q=1}^s C_{pq}$ . 考虑以下两种情况:

- 1) 若  $C \notin \{C_{p1}, C_{p2}, \dots, C_{ps}\}$ , 则  $C_1$  是  $\hat{C} - \{C\}$  的交可约元;
- 2) 若  $C \in \{C_{p1}, C_{p2}, \dots, C_{ps}\}$ , 则  $\exists r \in \{1, 2, \dots, s\}$ , 使得  $C = C_{pr}$ . 因此,  $C_1 = (\bigcap_{((q=1) \wedge (q \neq r))} C_{pq}) \cap C = (\bigcap_{((q=1) \wedge (q \neq r))} C_{pq}) \cap (\bigcap_{j=1}^t C_{i,j})$ ,  $C_1$  是  $\hat{C} - \{C\}$  的交可约元.

因为  $C_1$  是  $\hat{C} - \{C\}$  的交可约元, 所以  $\exists C_{p1}, C_{p2}, \dots, C_{ps} \in \hat{C} - \{C, C_1\} (1 \leq s \leq m)$ , 使得  $C_1 = \bigcap_{q=1}^s C_{pq} \leq$ . 显然,  $C_1 \leq$  是  $\hat{C}$  的交可约元. 综上所述, 命题成立.

定理 4 表明在模糊  $\beta$ -覆盖中删除交可约元不会生成任何新的交可约元, 也不会使其他在原始模糊  $\beta$ -覆盖中的交可约元成为新模糊  $\beta$ -覆盖中的交不可约元. 因此, 可以通过同时删除所有交可约元或逐步删除可约元计算模糊  $\beta$ -覆盖的约简.

**例 5** 根据例 3 可知  $C_2, C_5$  为  $\hat{C}$  的交可约元,  $C_5$  也是  $\hat{C} - \{C_2\}$  的交可约元.

**定义 12** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖,  $\hat{D}$  是  $\hat{C}$  的一个子集. 若  $\hat{C} - \hat{D}$  是  $\hat{C}$  的所有交可约元的集合, 则  $\hat{D}$  被称为  $\hat{C}$  的约简, 定义为  $\Gamma(\hat{C})$ .

**例 6** 根据例 3,  $\{C_2, C_5\} = \hat{C} - \{C_1, C_3, C_4\}$  为  $\hat{C}$  的所有交可约元的集合, 从而  $\hat{D} = \{C_1, C_3, C_4\}$  为  $\hat{C}$  的约简.

**定义 13** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 若  $\hat{C}$  中的所有元素都是交不可约元, 即  $\Gamma(\hat{C}) = \hat{C}$ , 则称  $\hat{C}$  是不可约的; 否则, 称  $\hat{C}$  是可约的.

**算法 1** 计算模糊  $\beta$ -覆盖的约简

输入:  $\hat{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}, \beta \in (0, 1], U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

输出: 模糊  $\beta$ -覆盖的约简  $\Gamma(\hat{C})$

1: For $i=1 \rightarrow n$	12: For $k=1 \rightarrow m$ ,
2: $C(x_i) \leftarrow 0$	13: $T \leftarrow \emptyset$
3: For $j=1 \rightarrow m$	14: For $l=1 \rightarrow m$
4: $C(x_i) \leftarrow C(x_i) \vee C_j(x_i)$	15: If $C_k \subseteq C_l (k \neq l)$
5: End For	16: $T \leftarrow T \cup C_l$
6: If $C(x_i) < \beta$	17: End If
7: Return “ $\hat{C}$ 不是 $U$ 的一个模糊 $\beta$ -覆盖”	18: End For
8: Break	19: If $T = C_k$
9: End If	20: $\Gamma(\hat{C}) = \Gamma(\hat{C}) - \{C_k\}$
10: End For	21: End If
11: $\Gamma(\hat{C}) = \hat{C}$	22: End For

算法 1 中: 总的时间复杂度为  $O(m^2 |U|)$ ; 步骤 1~10 是为了判断  $\hat{C}$  是否是  $U$  的一个模糊  $\beta$ -覆盖, 其时间复杂度为  $O(m |U|)$ ; 步骤 11~22 是要计算  $\Gamma(\hat{C})$ , 其时间复杂度为  $O(m^2 |U|)$ .

2.3 模糊  $\beta$ -最大描述与约简的关系

Yang 等<sup>[14]</sup>研究讨论模糊  $\beta$  最小描述与去除并可约元的约简之间的联系. 定理 5 研究模糊  $\beta$  覆盖中去除交可约元的约简与模糊  $\beta$  最大描述之间的关系.

**定理 5** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖.  $C \in \hat{C}$ , 若  $C$  是  $\hat{C}$  中的一个交可约元, 则对于任意的  $x \in U$ ,  $C \notin (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}}$ .

证明: 由于  $C$  是  $\hat{C}$  中的一个交可约元, 所以  $\exists C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,s} \in \hat{C} - \{C\} (1 \leq s \leq m)$ , 使得  $C = \bigcap_{k=1}^s C_{i,k}$ , 从而对于  $\forall x \in U$ , 存在  $r \in \{1, 2, \dots, s\}$ , 使得  $C \subseteq C_{i,r}$ . 根据最大模糊  $\beta$  描述的定义可知,  $C \notin (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}}$ .

由定理 5, 删除交可约元的模糊  $\beta$  覆盖对模糊  $\beta$  最大描述没有影响. 由于定理 5 的逆命题不成立, 即对任意的  $x \in U, C \notin (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}}, C$  不一定是  $\hat{C}$  中的一个交可约元, 因此,  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} \neq \Gamma(\hat{C})$ .

**例 7** 根据例 3, 可知  $C_2, C_5$  为可约元,  $\Gamma(\hat{C}) = \{C_1, C_3, C_4\}$ , 根据例 2, 有  $\forall x_i \in U, C_2, C_5 \notin (\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}}$  且  $(\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}} \subseteq \Gamma(\hat{C})$ , 因此, 有  $\bigcup_{i=1}^5 (\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}} = \{C_1, C_3, C_4\} \subseteq \Gamma(\hat{C})$ .

由定理 5 的逆否命题“存在  $x \in U, C \in (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}}$ , 则  $C$  是  $\hat{C}$  中的交不可约元”成立. 由此可以得到如下定理 6.

**定理 6** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖.  $\Gamma(\hat{C})$  是  $\hat{C}$  的约简, 任意  $x_i \in U, i = 1, 2, \dots, n$ , 有  $(\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}} \subseteq \Gamma(\hat{C})$ , 从而  $\bigcup_{i=1}^n (\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}} \subseteq \Gamma(\hat{C})$ .

**例 8** 设  $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $U$  的模糊子集族  $\hat{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ ,  $C_1 = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}, C_2 = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.6}{x_4}, C_3 = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.7}{x_4}$ . 若  $\beta = 0.5$ , 则通过计算得到  $(\widetilde{MD}_{x_1}^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_{x_2}^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_{x_3}^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_{x_4}^\beta)_{\hat{C}} = \{C_3\}$ , 对于  $\forall x_i \in U (i = 1, 2, 3, 4), C_1, C_2 \notin (\widetilde{MD}_{x_i}^\beta)_{\hat{C}}$ , 但是  $C_1, C_2$  不是可约元.

**定理 7** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖.  $C$  是  $\hat{C}$  中的一个交可约元. 对于任意的  $x \in U, \beta \in (0, 1]$ , 有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C} - \{C\}}$ .

证明: 设  $\hat{C} = \{C, C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖, 其中,  $C, C_i \in F(U) (i = 1, 2, \dots, m)$ .  $C$  是  $\hat{C}$  的交可约元. 根据定理 1,  $\hat{C} - \{C\}$  仍然是  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖, 从而  $\exists C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{is} \in \hat{C} - \{C\} (1 \leq s \leq m)$ , 使得  $C = \bigcap_{k=1}^s C_{ik}$ . 对于  $\forall x \in U$ , 若  $C(x) < \beta$ , 则根据模糊  $\beta$  最大描述的定义, 显然有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C} - \{C\}}$ . 若  $C(x) \geq \beta$ , 由于  $C = \bigcap_{k=1}^s C_{ik}$ , 则存在  $r \in \{1, 2, \dots, s\}$ , 使得  $C \subseteq C_{ir}$ . 显然,  $C \notin (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}}$ . 因此, 对于  $\forall x \in U$ , 有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C} - \{C\}}$ .

**推论 1** 设  $\hat{C}$  是  $U$  的一个模糊  $\beta$  覆盖. 对于任意  $x \in U, \beta \in (0, 1]$ , 有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C})}$ .

证明: 根据定理 4, 6, 直接可得  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C})}$ .

**例 9** 根据例 3, 可知  $C_2, C_5$  为可约元,  $\hat{C}$  的约简为  $\Gamma(\hat{C}) = \{C_1, C_3, C_4\}$ , 则计算可得  $(\widetilde{MD}_{x_1}^\beta)_{\Gamma(\hat{C})} = \{C_1, C_4\} = (\widetilde{MD}_{x_1}^\beta)_{\hat{C}}, (\widetilde{MD}_{x_2}^\beta)_{\Gamma(\hat{C})} = \{C_3, C_4\} = (\widetilde{MD}_{x_2}^\beta)_{\hat{C}}, (\widetilde{MD}_{x_3}^\beta)_{\Gamma(\hat{C})} = \{C_4\} = (\widetilde{MD}_{x_3}^\beta)_{\hat{C}}, (\widetilde{MD}_{x_4}^\beta)_{\Gamma(\hat{C})} = \{C_1, C_4\} = (\widetilde{MD}_{x_4}^\beta)_{\hat{C}}, (\widetilde{MD}_{x_5}^\beta)_{\Gamma(\hat{C})} = \{C_1\} = (\widetilde{MD}_{x_5}^\beta)_{\hat{C}}$ .

**推论 2** 设  $\hat{C}_1, \hat{C}_2$  是  $U$  的两个模糊  $\beta$  覆盖. 对于任意的  $x \in U$ , 若  $\Gamma(\hat{C}_1) = \Gamma(\hat{C}_2)$ , 则  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_1} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_2}$ .

证明: 由于  $\Gamma(\hat{C}_1) = \Gamma(\hat{C}_2)$ , 从而有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C}_1)} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C}_2)}$ . 由推论 1, 有  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_1} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C}_1)},$

$(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_2} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\Gamma(\hat{C}_2)}$ , 因此,  $(\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_1} = (\widetilde{MD}_x^\beta)_{\hat{C}_2}$ .

### 3 结束语

模糊 $\beta$ 覆盖近似空间是模糊覆盖的推广,可以解决模糊覆盖的局限性.模糊 $\beta$ 覆盖近似空间是近年才提出的定义,对其研究具有一定意义.在模糊 $\beta$ 覆盖近似空间中,许多基本问题与模糊 $\beta$ 最小和最大描述有关.对于具有大基数的模糊 $\beta$ 覆盖近似空间,使用集合表示解决关于模糊 $\beta$ 最小和最大描述的问题将是繁琐而复杂的.因此,有必要通过矩阵表示,将计算变为算法,并由计算机轻松实现.

#### 参考文献:

- [1] ZAKOWSKI W. Approximations in the space  $(u, \pi)$ [J]. Demonstratio Mathematica, 1983, 16(3): 761-770. DOI: 10.1515/dema-1983-0319.
- [2] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356. DOI: 10.1007/BF01001956.
- [3] JENSEN R, SHEN Q. Fuzzy-rough attribute reduction with application to web categorization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 141(3): 469-485. DOI: 10.1016/S0165-0114(03)00021-6.
- [4] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
- [5] FENG Tao, ZHANG Shaopu, MI Jusheng. The reduction and fusion of fuzzy covering systems based on the evidence theory[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(1): 87-103. DOI: 10.1016/j.ijar.2011.10.002.
- [6] INUIGUCHI M. Approximation-oriented fuzzy rough set approaches[J]. Fundamenta Informaticae, 2015, 142(1/2/3/4): 21-51. DOI: 10.3233/FI-2015-1283.
- [7] LI Tongjun, LEUNG Y, ZHANG Wenxiu. Generalized fuzzy rough approximation operators based on fuzzy coverings[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 48(3): 836-856. DOI: 10.1016/j.ijar.2011.06.011.
- [8] WU Mingfen, HAN Haohan, SI Yanfei. Properties and axiomatization of fuzzy rough sets based on fuzzy covering [C]//2012 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. [S. l.]: IEEE Press, 2012: 184-189. DOI: 10.1109/ICMLC.2012.6358909.
- [9] MA Liwen. Two fuzzy covering rough set models and their generalizations over fuzzy lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 294: 1-17. DOI: 10.1016/j.fss.2015.05.002.
- [10] YANG Bin, HU Baoqing. On some types of fuzzy covering-based rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 312: 36-65. DOI: 10.1016/j.fss.2016.10.009.
- [11] D'ER L, CORNELIS C, GODO L. Fuzzy neighborhood operators based on fuzzy coverings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 312: 17-35. DOI: 10.1016/j.fss.2016.04.003.
- [12] YANG Bin, HU Baoqing. Fuzzy neighborhood operators and derived fuzzy coverings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 370: 1-33. DOI: 10.1016/j.fss.2018.05.017.
- [13] WANG Jingqian, ZHANG Xiaohong. Matrix approaches for some issues about minimal and maximal descriptions in covering-based rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 104: 126-143. DOI: 10.1016/j.ijar.2018.10.021.
- [14] YANG Bin, HU Baoqing. A fuzzy covering-based rough set model and its generalization over fuzzy lattice[J]. Information Sciences, 2016, 367/368: 463-486. DOI: 10.1016/j.ins.2016.05.053.
- [15] 黄正华, 胡宝清. 模糊粗糙集理论研究进展[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(4): 125-134. DOI: 10.3969/j.issn.1001-7402.2005.04.022.
- [16] 林姿琼, 王敬前, 祝峰. 矩阵方法计算覆盖粗糙集中最小、最大描述[J]. 山东大学学报(理学版), 2014(49): 101. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.1.2014.034.
- [17] 陈应生, 李进金. 决策信息系统协调性的关系矩阵表示[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(6): 823-829. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201810106.
- [18] 陈东晓, 李进金. 形式背景的下近似协调与粒协调的关系[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, 41(1): 130-136. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201907035.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)