DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202010025

由 Grothendieck 型刻画生成的非超弱紧测度和赋范半群

涂昆

(扬州大学 数学科学学院，江苏 扬州 225002)

摘要： 由超弱紧集的 Grothendieck 型刻画研究非超弱紧测度的表示，并给出经典的非超弱紧测度的表示方式. 定义非超弱紧测度，并研究非超弱紧测度与赋范半群、超自反子空间构成的商空间、算子生成的测度之间的关系. 结果表明：非超弱紧测度实质上具有半范数在解析上的特点.

关键词： 非超弱紧测度；Banach 空间；赋范半群；超弱紧集

中图分类号： O 177.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2021)03-0398-04

Measure of Super Weak Noncompactness Through Grothendieck′s Characterization and Normed Semi-Group

TU Kun

(School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China)

Abstract: Representation of super weak noncompactness measure is studied with the Grothendieck type characterization of super weak compactness sets, and the classical representation of super weak noncompactness measure is given. Giving the definition of super weak noncompactness measure, and the relationship between super weak noncompactness measure and normed semi-group, quotient space constructed by super-reflexive subspace, the measure generated by operators is studied. The results show that the analytic properties of the super weak noncompactness, in fact, are similar to that of semi-norms.

Keywords: measure of super weak noncompactness; Banach spaces; normed semi-group; super weak compactness set

Banach 空间 X 是自反的当且仅当其闭单位球 B_X 是弱紧的. 一致凸 Banach 空间是自反的，但是自反空间不一定是一致凸的[1]. 由 James[2] 和 Enflo[3] 的结论，可知 Banach 空间是一致凸当且仅当它是超自反空间. 许多学者研究由空间的局部性质刻画超自反性[4-7]，文献[8-9]引入超弱紧集的概念，并证明一个 Banach 空间是超自反的当且仅当其闭单位球是超弱紧集. 弱紧集和自反空间的关系一样，超弱紧性质被视为超自反空间的局部化，因此，超弱紧集提供了一个研究超自反和一致凸性的新方向.

非紧性测度是抽象概念“紧性”的定量刻画，衡量 Banach 空间中的一个有界集离“紧”的差距. 自 1930 年 Kuratowski[10] 引入集合非紧性测度以来，非紧性测度一直受到研究者的重视，并被推广成各种形式，在积分方程理论中得到广泛应用[11-14]. 本文研究由 Grothendieck 型刻画生成的非超弱紧测度和赋范半群.

收稿日期： 2020-10-19
通信作者： 涂昆(1987-)，男，讲师，博士，主要从事泛函分析的研究. E-mail: tukun@yzu.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金青年基金资助项目(11701501)

1　基本概念

用$(X,\|\cdot\|)$表示实的无限维 Banach 空间，B_X 为其闭单位球，X^* 为其对偶空间. 对任意非空集 $A\subset X$，$\mathrm{CO}(A)$表示 A 的凸包，$\overline{A}^w$ 为 A 的弱闭包. $\beta(X)$表示 X 上所有非空有界集构成的集族.

定义 1　称集合 $A\subset X$ 为相对超弱紧集，如果对任意自由超滤子 U，那么 A_U 是相对弱紧集，相对超弱紧集的弱闭包是相对弱紧集.

容易看到，相对超弱紧集是有界的. Cheng 等[9]证明相对超弱紧集在连续线性映射下的像是相对超弱紧集，并且如果 A,B 是相对超弱紧集，那么 $A\cup B, A\times B, A+B$ 是相对超弱紧集. 另外，相对超弱紧集 A 的凸包 $\mathrm{CO}(A)$也被证明是相对超弱紧集.

Cheng 等[9]得到超弱紧集的 Grothendieck 型刻画定理，非空有界集 $A\subset X$ 是相对超弱紧集当且仅当对任意正数 $\varepsilon>0$，存在相对超弱紧集 $S\subset X$，使得 $A\subset S+\varepsilon B_X$. 由此刻画定理，定义函数 $\sigma:\beta(X)\to[0,\infty)$为

$$\sigma(A)=\inf\{t>0:A\subset S+tB_X, S \text{ 为相对超弱紧}\},\qquad \forall A\in\beta(X).$$

容易证明 σ 具有如下 7 个性质：

1) $\sigma(A)=0$ 当且仅当 A 是相对超弱紧集；

2) $\sigma(A)\leqslant\sigma(B)$，如果 $A\subset B$；

3) $\sigma(A)=\sigma(\overline{A}^w)$；

4) $\sigma(A)=\sigma(\mathrm{CO}(A))$；

5) $\sigma(A\cup B)=\max\{\sigma(A),\sigma(B)\}$；

6) $\sigma(A+B)\leqslant\sigma(A)+\sigma(B)$；

7) $\sigma(tA)=|t|\sigma(A), t\in\mathbf{R}$.

2　主要定理及证明

设 $\beta^C(X)$和 $S^C(X)$分别表示 X 上的非空有界闭子集和非空超弱紧子集. 在 $B^C(X)$上定义加法和数乘分别为

$$A\oplus B=\overline{A+B}=\overline{\{a+b:a\in A,b\in B\}},$$
$$\lambda\cdot A=\{\lambda a:a\in A\},$$

则$(\beta^C(X),\oplus,\cdot)$为模，同样，$S^C(X)$ 是$(\beta^C(X),\oplus,\cdot)$的一个子模. 注意到模是一个半群.

考虑到商半群为 $\beta^C(X)/S^C(X)$，如果 $A\in\beta^C(X)$，那么

$$A+S^C(X)\in\beta^C(X)/S^C(X).$$

记$[A]=A+S^C(X)$，商半群中具有继承而来的加法和数乘，即任意$[A],[B]\in\beta^C(X)/S^C(X),\lambda\in F$，$[A]+[B]=[A+B]$，$\lambda[A]=[\lambda A]$，则 $\beta^C(X)/S^C(X)$在上述加法和数乘下为模. 进一步可以证明，非紧性测度 σ 可以生成此模上的一个范数.

定理 1　由 $\|\cdot\|:\beta^C(X)/S^C(X)\to[0,\infty)$，$\|[A]\|=\mu(A)$定义的函数为半群 $\beta^C(X)/S^C(X)$上的范数.

证明　1) 函数 $\|\cdot\|$ 是良定义的. 若有 $A,B\in\beta^C(X)$，使得$[A]=[B]$，则存在相对超弱紧集 S，使得 $A=B+S$. 进而 $\|[A]\|=\sigma(A)\leqslant\sigma(B)+\sigma(S)=\sigma(B)=\|B\|$. 同理，由 $B\subset A-S$，可得 $\|B\|\leqslant\|A\|$，故函数 $\|\cdot\|$ 是良定义的.

2) 若存在 $A\in\beta^C(X)$，使得 $\|[A]\|=0$，则 $\sigma(A)=0$，进而 A 是超弱紧集，即$[A]=0$.

3) 任意 $A,B\in\beta^C(X)$，$\|[A]+[B]\|=\sigma(A+B)\leqslant\sigma(A)+\sigma(B)=\|A\|+\|B\|$.

4) 任意 $A\in\beta^C(X),\lambda\in\mathbf{R}$，$\|t[A]\|=\sigma(tA)=|t|\sigma(A)=|t|\,\|[A]\|$.

在 $\beta(X)$上赋予 Hausdorff 度量 d_{H}，即任意 $A,B\in\beta(X)$，有

$$d_{\mathrm{H}}(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(A,b)\}=$$
$$\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\},$$

则$(\beta^{C}(X),d_{H})$为完备度量空间,$(S^{C}(X),d_{H})$为其闭子空间.

设$S(X)$表示X中的非空相对超弱紧集构成的集族,则可得到关于σ的表示定理(定理2).

定理2 设$A\in\beta(X)$,则$\sigma(A)=d_{H}(A,S^{C}(X))=d_{H}(A,S(X)):=\inf\limits_{S\in S(X))}d_{H}(A,S)$.

证明 1) $\sigma(A)=\inf\limits_{S\in S(X))}d_{H}(A,S)$. 设$\inf\limits_{S\in S(X))}d_{H}(A,S)=\beta$,则对任意正数$\varepsilon>0$,存在$S\in S(X)$,使得

$$d_{H}(A,S)<(\beta+\varepsilon),$$

进而$\sigma(A)\leqslant\beta+\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性,可知$\sigma(A)\leqslant\beta$.

另一方面,若存在相对超弱紧集S,使得

$$A\subset S+(\sigma(A)+\varepsilon)B_{X},$$

显然$d(a,S)\leqslant(\sigma(A)+\varepsilon)$. 若存在$s_1\in S$,使得$d(A,s_1)>(\sigma(A)+\varepsilon)$,则

$$A\subset S\backslash\{s_1\}+(\sigma(A)+\varepsilon)B_{X}.$$

进而存在$W\subset S$,使得$A\subset W+(\sigma(A)+\varepsilon)B_{X}$且对任意$w\in W$,$d(A,w)\leqslant(\sigma(A)+\varepsilon)$. 因此,有$d_{H}(A,W)\leqslant(\sigma(A)+\varepsilon)$,即证.

2) $d_{H}(A,S^{C}(X))=d_{H}(A,S(X))$,设$S\in S(X)$,任取$a\in A$,由$d(a,S)=d(a,\overline{S})$,有

$$\sup_{a\in A}d(a,S)=\sup_{a\in A}d(a,\overline{S}).$$

要证$\alpha:=\sup\limits_{s\in S}d(A,s)=\sup\limits_{s\in\overline{S}}d(A,s):=\beta$,只需证$\alpha\geqslant\beta$. 任取$s_0\in\overline{S}$,存在$s_n\in S$,使得$\|s_n-s_0\|<1/n$. 对任意$s_n$,存在$a_n\in A$,使得$\|s_n-a_n\|\leqslant\alpha+1/n$,进而$d(A,s_0)\leqslant\|s_0-a_n\|\leqslant\alpha+2/n$,命题得证.

设Y为X的闭子空间,A是X中的非空有界子集,设$\|A/Y\|=\sup\limits_{a\in A}\|Q_{Y}(a)\|$,其中,$Q_{Y}$是从$X$到$X/Y$的商映射. 对Hausdorff非紧性测度$\chi$,有

$$\chi(A)=\inf\{\|A/Y\|:Y\text{为有限维子空间}\}.$$

对于超弱紧集的情形,如定理3所示.

定理3 设X为无穷维Banach空间,则对任意$A\in\beta(X)$,有

$$\sigma(A)\leqslant\inf\{\|A/Y\|:Y\text{为超自反子空间}\}.$$

证明 设Y为X的超自反子空间,$\|Q_{Y}(A)\|\neq0$,否则,$A\subset Y$为相对超弱紧集,则任取$a\in A$,$n\in\mathbf{N}$,存在$y\in Y$,使得

$$\|a-y\|\leqslant\|Q_{Y}(a)\|+1/n,$$

进而$\|y\|\leqslant\|a\|+\|Q_{Y}(a)\|+1/n$. 故存在有界集$S\subset Y$,使得$A\subset S+(\|Q_{Y}(A)\|+1/n)B_{X}$,由$S$为相对超弱紧及$n$的任意性,可知$\sigma(A)\leqslant\|Q_{Y}(A)\|$,即命题得证.

与紧集的情形不同,超弱紧生成空间是超弱紧算子生成,而不是超自反空间生成. 任何一个紧集一定是某个有限维空间中的子集,与此不同的是,Raja[6]构造了一个Banach空间X,且存在一个超弱紧集$S\subset X$,但S不是任何超自反子空间的子集. 故上述定理的逆并不一定成立.

设X,Y是Banach空间,如果$T(B_{Y})$是超弱紧集,有界线性算子$T:Y\rightarrow X$称为超弱紧算子. Astala[15]研究了一类由算子定义的测度,被视为连接算子理论与空间的桥梁,类似地,可以构建一个由超弱紧算子生成的关于此测度的一个子类. 对任意$A\in\beta(X)$,定义

$$\gamma(A)=\inf\{t>0:A\subset T(B_{Y})+tB_{X},T\text{是超弱紧算子}\},$$

其下确界取遍所有Banach空间Y和超弱紧算子T.

定理4 设X为Banach空间,任取$A,B\in\beta(X)$,有

1) $\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$,如果$A\subset B$;

2) $\gamma(A)=\gamma(\mathrm{CO}(A))$;

3) $\gamma(A\cup B)=\max\{\gamma(A),\gamma(B)\}$;

4) $\gamma(A+B)\leqslant\gamma(A)+\gamma(B)$‘

5) $\gamma(tA)=|t|\gamma(A)$,$t\in\mathbf{R}$.

定理5 设X为Banach空间,任取$A\in\beta(X)$,则$\sigma(A)=\gamma(A)$.

证明 当T是Y到X的超弱紧算子时,$T(B_{Y})$是相对超弱紧集,故$\sigma(A)\leqslant\gamma(A)$. 另一方面,由文

献[5]，给定任一相对超弱紧集 S，必存在一个自反空间 Y 及超弱紧算子 $T:Y\to X$，使得 $S\subset T(B_Y)$，进而 $\gamma(A)\leqslant\sigma(A)$，命题得证.

参考文献：

[1] DAY M M. Reflexive banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces[J]. Bulletin of the American Mathematical Society，1941，47(4)：313-317. DOI：10.1090/S0002-9904-1941-07451-3.

[2] JAMES R C. Super-reflexive Banach spaces[J]. Canadian Journal of Mathematics，1972，24(5)：896-904. DOI：10.4153/CJM-1972-089-7.

[3] ENFLO P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm[J]. Israel Journal of Mathematics，1972，13：281-288. DOI：10.1007/BF02762802.

[4] BEAUZAMY B. Opérateurs uniformément convexifiants[J]. Studia Mathematica，1976，57(2)：103-139. DOI：10.4064/sm-57-2-103-139.

[5] RAJA M. Finitely dentable functions, operators and sets[J]. Journal of Convex Analysis，2008，15(2)：219-233.

[6] RAJA M. Super WCG Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2016，439(1)：183-196. DOI：10.1016/j.jmaa.2016.02.057.

[7] FABIAN M，MONTESINOS V，ZIZLER V. Sigma-finite dual dentability indices[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，350(2)：498-507. DOI：10.1016/j.jmaa.2008.02.031.

[8] CHENG Lixin，CHENG Qingjin，WANG Bo，*et al*. On super-weakly compact sets and uniformly convexifiable sets[J]. Studia Mathematica，2010，199(2)：145-169. DOI：10.4064/sm199-2-2.

[9] CHENG Lixin，CHENG Qingjin，LUO Sijie，*et al*. On super weak compactness of subsets and its equivalences in Banach spaces[J]. Journal of Convex Analysis，2018，25(3)：899-926.

[10] KURATOWSKI K. Sur les espaces complets[J]. Fundamenta Mathematicae，1930，15(1)：301-309. DOI：10.4064/fm-15-1-301-309.

[11] BANAS J，GOEBEL K. Measures of noncompactness in Banach spaces[M]. New York：Marcel Dekker Inc，1980.

[12] FALSET J G，LATRACH K，GALVEZ E M，*et al*. Schaefer-Krasnoselskii fixed point theorems using a usual measure of weak noncompactness[J]. Journal of Differential Equations，2012，252(5)：3436-3452. DOI：10.1016/j.jde.2011.11.012.

[13] ABLET E，CHENG Lixin，CHENG Qingjin，*et al*. Every Banach space admits a homogenous measure of non-compactness not equivalent to the Hausdorff measure[J]. Science China Mathematics，2019，62(1)：147-156. DOI：10.1007/s11425-018-9379-y.

[14] KACENA M，KLENDA O F K，SPURNY J. Quantitative Dunford-Pettis property[J]. Advances in Mathematics，2013，234：488-527. DOI：10.1016/j.aim.2012.10.019.

[15] ASTALA K. On measures of noncompactness and ideal variations in banach spaces[M]. Helsinki：Annales Academiae Scientiarum Fennicae：Mathematica，1980.

（**责任编辑：** 陈志贤　　**英文审校：** 黄心中）