第 42 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 42 No. 1
2021 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2021

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202008001

广义 Dickman 方程的一些新结果

冯利文, 汪东树

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类广义 Dickman 方程正解的大时间动力学性态,通过分析广义 Dickman 方程主解与次主解的渐近行为,给出所有解的表达式及其渐近估计,所得结果推广并改进了广义 Dickman 方程的相关结果.实例验证结果表明:这一类广义 Dickman 方程所有解的表达式及其渐近估计更具有普遍性.

关键词: 广义 Dickman 方程; 主解; 次主解; 渐近行为

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2021)01-0135-06

Some New Results of Generalized Dickman Equation

FENG Liwen, WANG Dongshu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Study the large-time dynamical properties for the positive solution of a class of generalized Dickman equations. By analyzing the asymptotic behaviors of generalized Dickman equations dominant solutions and sub-dominant solutions, the expressions of all solutions and their asymptotic estimations are given, and some related results of generalized Dickman equations are generalized and improved. An example is given to show that the expressions of all solutions of the generalized Dickman equations and their asymptotic estimations are more universal.

Keywords: generalized Dickman equation; dominant solution; sub-dominant solution; asymptotic behavior

考虑广义 Dickman 方程

$$x'(t)=-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}x(t-1) \tag{1}$$

的大时间动力学性态.其中,$t\geqslant t_0$,t_0 充分大;n 为正整数;α 为一个固定的常数,$\alpha\geqslant 1$.

显然,当 $\alpha=1$ 且 $n=1$ 时,方程(1)退化为经典的 Dickman 方程,即

$$x'(t)=-\frac{1}{t}x(t-1). \tag{2}$$

在解析数论中,Dickman 方程具有非常重要的应用.Dickman 函数是一个特殊函数,常用于估计方程(2)给定范围内的平滑数的频率.

极限 $\lim\limits_{y\to\infty}\Psi(y^t,y)y^{-t}$,$t>0$ 是 $[0,1]$ 上,由单位初始函数生成的方程(2)的解,$\Psi(y_1,y_2)$ 表示不超过 y_1 的素数,且不超过 y_2 的正整数的个数,也称为 Dickman 函数.

当 $n=1$ 时,方程(1)退化为广义的 Dickman 方程,即

收稿日期: 2020-08-01

通信作者: 汪东树(1981-),男,教授,博士,主要从事微分方程理论和应用的研究.E-mail:wangds@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11871231);国家自然科学基金青年资助项目(11501221);华侨大学研究生科研创新能力培育计划项目(18013070005)

$$x'(t)=-\frac{\alpha}{t}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}x(t-1). \tag{3}$$

方程(3)包含经典的 Dickman 方程(2),因而方程(3)受到学术界的广泛关注[1-5].鉴于时滞微分方程解的渐近行为具有非常重要的理论和实际意义[6-12],Diblík[13]研究了方程(3)的主解、次主解及所有解的渐近行为等大时间动力学性态,得到定理 A~C.

定理 A 对任意给定的常数 $k_1>0$ 与 $\varepsilon>0$,如果不等式 $\varepsilon>\alpha k_1$ 成立,则对充分大的 t_0,在区间$[t_0-1,\infty)$上存在方程(3)的一个正的主解 $x_1(t)$,满足

$$\left|x_1(t)-\frac{k_1}{t^{\alpha}}\right|<\frac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}},\qquad t\in[t_0-1,\infty).$$

定理 B 对任意给定的常数 $M_2>0$,当 t_0 充分大时,在区间$[t_0-1,\infty)$上存在方程(3)的一个正的次主解 $x_2(t)$,满足

$$0<x_2(t)<M_2\exp(-\sqrt{t}),\qquad t\in[t_0-1,\infty).$$

考虑初值问题

$$x(t)=\varphi(t),\qquad t\in[t_0-1,t_0]. \tag{4}$$

式(4)中:$\varphi(t)$是方程(1)的连续初值函数,方程(3)是方程(1)的特殊情形,因此,$\varphi(t)$也是方程(3)的连续初值函数.

定理 C 若 $x(t_0,\varphi)(t)$是方程(3)满足初值条件(4)的唯一解,则 $x(t_0,\varphi)(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}t^{\alpha}x(t_0,\varphi)(t)=C_{\alpha}(t_0,\varphi).$$

上式中:$C_{\alpha}(t_0,\varphi):=t_0^{\alpha}\varphi(t_0)-\alpha\int_{t_0-1}^{t_0}s^{\alpha-1}\varphi(s)\mathrm{d}s.$

因为方程(3)是方程(1)的特殊情况,而定理 A~C 是通过研究方程(3)得到的结果,因此,考虑将方程(3)上的定理 A~C 的可行性推广到方程(1)上.

1 预备知识

考虑线性时滞微分方程

$$x'(t)=-C(t)x(t-\tau(t)). \tag{5}$$

式(5)中:$C(t)$,$\tau(t)$均为连续函数.

定义 1[14] 如果存在初值函数 $\varphi(t)$使方程(5)在初值条件下存在一个最终正解(最终负解),那么,称方程(1)是非振荡的(振荡的).

方程(5)最终正解($t\to\infty$)存在性问题的证明可参考文献[14-15]的著名积分准则.

引理 1[13] 若方程(5)在区间$[t_0-1,\infty)$上存在一个正解,则方程(5)在区间$[t_0-1,\infty)$存在两个正解 $x_{\mathrm{d}}(t)$,$x_{\mathrm{s}}(t)$,满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_{\mathrm{s}}(t)}{x_{\mathrm{d}}(t)}=0, \tag{6}$$

使方程(5)在区间$[t_0-1,\infty)$上的任意解 $x=x(t)$都可以被唯一地表示为

$$x(t)=kx_{\mathrm{d}}(t)+o(x_{\mathrm{s}}(t)). \tag{7}$$

式(7)中:常数 k 依赖于 x.

定义 2[16] 如果在区间$[t_0-1,\infty)$上,方程(5)的正解 $x_{\mathrm{s}}(t)$,$x_{\mathrm{d}}(t)$满足方程(6),则称 $x_{\mathrm{d}}(t)$为主解,$x_{\mathrm{s}}(t)$为次主解.

引理 2[17] 对任意 $t\geqslant t_0$,$\varphi\in C_r$,$(t+\theta,\varphi(\theta))\in\Omega$,$\Omega:=\{(t,x):t\geqslant t_0-r,\rho(t)<\varphi(t)<\delta(t)\}$,$\theta\in[-r,0)$,若当 $\varphi(0)=\delta(t)$时,有

$$\delta'(t)<-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t^n}\right)^{\alpha-1}\varphi(t-1) \tag{8}$$

成立,且当 $\varphi(0)=\rho(t)$时,有

$$\rho'(t)>-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t^n}\right)^{\alpha-1}\varphi(t-1) \tag{9}$$

成立，则方程(5)在区间$[t_0-r,\infty)$上存在一个解$x(t)$满足

$$\rho(t)<x(t)<\delta(t),\qquad t\in[t_0-r,\infty).\tag{10}$$

引理 3[13]　若$x_2^*(t)$和$x_2^{**}(t)$分别是方程(5)在区间$[t_0-1,\infty)$上的两个次主解，则存在一个常数$M>0$，使

$$x_2^*(t)M^{-1}\leqslant x_2^{**}(t)\leqslant Mx_2^*(t)\tag{11}$$

成立. 其中，$t\in[t_0-1,\infty)$，t_0是充分大的.

在方程(5)中，令$C(t)=\dfrac{\alpha}{t^n}\left(1-\dfrac{1}{t^n}\right)^{\alpha-1}$，$\tau(t)=1$，那么，方程(5)退化为方程(1)，此时，引理 1～3 仍然成立.

2　主要结果及证明

通过理论分析和过程推导，针对方程(1)可得定理 1～3.

定理 1　对于任意给定的常数$k_d>0$与$\varepsilon>0$，如果不等式

$$\varepsilon>\alpha k_d\tag{12}$$

成立，那么，对于充分大的t_0，在区间$[t_0-1,\infty)$上存在方程(1)的一个正的主解$x_d(t)$，满足

$$\left|x_d(t)-\frac{k_d}{t^\alpha}\right|<\frac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}},\qquad t\in[t_0-1,\infty).\tag{13}$$

证明：在引理 2 中，令$\delta(t):=\dfrac{k_d}{t^\alpha}+\dfrac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}}$，$\rho(t):=\dfrac{k_d}{t^\alpha}-\dfrac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}}$，当$t_0$充分大时，式(10)成立.

首先，证明不等式(8)成立，考虑函数

$$\psi_n(t)=-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi(t-1).$$

当t_0充分大时，需证明不等式

$$\begin{aligned}\psi_n(t)&>-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\delta(t-1)=-\frac{\alpha}{t^n}\frac{(t-1)^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}}\left[\frac{k_d}{(t-1)^\alpha}+\frac{\varepsilon}{(t-1)^{\alpha+1}}\right]=\\&-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha-1}}\frac{(t-1)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha}-\frac{\alpha\varepsilon}{t^{n+\alpha-1}}\frac{(t-1)^{\alpha-1}}{(t-1)^{\alpha+1}}=-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha-1}}\frac{1}{t-1}-\frac{\alpha\varepsilon}{t^{n+\alpha-1}}\frac{1}{(t-1)^2}=\\&-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}\frac{t}{t-1}-\frac{\alpha\varepsilon}{t^{n+\alpha+1}}\frac{t^2}{(t-1)^2}=-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}\frac{1}{1-\frac{1}{t}}-\frac{\alpha\varepsilon}{t^{n+\alpha+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right)^2=\\&-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{\alpha\varepsilon}{t^{n+\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)=-\frac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}-\frac{\alpha(k_d+\varepsilon)}{t^{n+\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)>\\&-\frac{\alpha k_d}{t^{\alpha+1}}-\frac{(\alpha+1)\varepsilon}{t^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)\end{aligned}$$

成立，而若要式(8)成立，则不等式$\dfrac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}+\dfrac{\alpha(k_d+\varepsilon)}{t^{n+\alpha+1}}<\dfrac{\alpha k_d}{t^{\alpha+1}}+\dfrac{(\alpha+1)\varepsilon}{t^{\alpha+2}}$成立即可. 由于满足不等式(5)，则不等式(8)成立.

类似地，对不等式(9)的证明可采用同样的方法. 因此，由引理 2 可知，不等式(10)成立，有定理 1 中的不等式$\left|x_d(t)-\dfrac{k_d}{t^\alpha}\right|<\dfrac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}}$，$t\in[t_0-1,\infty)$成立.

证毕.

注 1　比较定理 1 和定理 A. 当$n=1$时，定理 1 与定理 A 一致；当$n>1$时，若使不等式$\dfrac{\alpha k_d}{t^{n+\alpha}}+\dfrac{\alpha(k_d+\varepsilon)}{t^{n+\alpha+1}}<\dfrac{\alpha k_d}{t^{\alpha+1}}+\dfrac{(\alpha+1)\varepsilon}{t^{\alpha+2}}$成立，需$t$充分大. 因此，当$t\to\infty$时，定理 1 即使不含式(5)，结论仍成立.

根据注 1，可得推论 1.

推论 1　对任意给定的常数$k_d>0$，$\varepsilon>0$，当t_0充分大时，在区间$[t_0-1,\infty)$上存在方程(1)的一个

正的主解 $x_{\mathrm{d}}(t)$,满足

$$\left|x_{\mathrm{d}}(t)-\frac{k_{\mathrm{d}}}{t^{\alpha}}\right|<\frac{\varepsilon}{t^{\alpha+1}},\qquad t\in[t_0-1,\infty).$$

定理 2 对于任意给定的常数 $M_{\mathrm{s}}>0$,当 t_0 充分大时,则在区间 $[t_0-1,\infty)$ 上存在方程(1)的正的次主解 $x_{\mathrm{s}}(t)$,满足

$$0<x_{\mathrm{s}}(t)<M_{\mathrm{s}}\exp(-\sqrt{t}),\qquad t\in[t_0-1,\infty).\tag{14}$$

证明:在引理 2 中,令 $\rho(t):=0$,$\delta(t):=M_{\mathrm{s}}\exp(-\sqrt{t})$,当 t_0 充分大时,不等式(10)成立.

首先,证明不等式(8)成立,考虑函数

$$\psi_n(t)=-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi(t-1).$$

根据引理 2,则有不等式 $\psi_n(t)>-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\delta(t-1)$ 成立.

若对 $\delta(t)$ 求导,可得

$$\begin{aligned}\delta'(t)=&-\frac{M_{\mathrm{s}}}{2\sqrt{t}}\exp(-\sqrt{t})<-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\delta(t-1)=\\&-\frac{\alpha M_{\mathrm{s}}}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\exp(-\sqrt{t-1})\end{aligned}\tag{15}$$

成立,或 $1>\frac{2\alpha}{t^{n-\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\exp(\sqrt{t}-\sqrt{t-1})$ 成立,即可证明不等式(8)成立.

当 $t\to\infty$,式(15)右极限等于 0,因此,当 t_0 充分大时,存在区间 $[t_0-1,\infty)$,使式(8)成立.

类似地,对不等式(9)的证明,可采用同样的方法求证.因为 $\delta'(t)=0$ 和 $\varphi(t-1)>0$ 满足引理 2 中的条件(式(8),(9)),由引理 2 可得不等式(10)成立,则定理 2 中的不等式 $0<x_{\mathrm{s}}(t)<M_{\mathrm{s}}\exp(-\sqrt{t})$,$t\in[t_0-1,\infty)$ 成立.

证毕.

定理 3 若 $x(t_0,\varphi)(t)$ 是方程(1)满足初值条件(4)的唯一解,则 $x(t_0,\varphi)(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}t^{\alpha}x(t_0,\varphi)(t)=C_{\alpha}(t_0,\varphi).\tag{16}$$

其中,

$$C_{\alpha}(t_0,\varphi):=t_0^{\alpha}\varphi(t_0)-\alpha\int_{t_0-1}^{t_0}(s+1)^{1-n}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s.\tag{17}$$

证明:由于 $[t^{\alpha}x(t)]'=\alpha t^{\alpha-1}x(t)+t^{\alpha}x'(t)$ 成立,代入式(1),可得

$$\int_{t_0}^{t}[s^{\alpha}x(s)]'\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0}^{t}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s=-\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{s^{\alpha}}{s^n}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}x(s-1)\mathrm{d}s.$$

方程(1)的初值问题等价于

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t_0-1\leqslant t\leqslant t_0,\\ \frac{1}{t^{\alpha}}\left\{t_0^{\alpha}x(t_0)+\alpha\int_{t_0}^{t}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0-1}^{t-1}(s+1)^{1-n}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s\right\}, & t>t_0.\end{cases}\tag{18}$$

由引理 1,3 及方程式(5),(18)可知,存在两个非负常数 L_1,L_2,使

$$\begin{aligned}|t^{\alpha}x(t)-C_{\alpha}(t_0,\varphi)|=&\alpha\int_{t_0}^{t}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0}^{t-1}(s+1)^{1-n}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s=\\&\int_{t_0}^{t}\alpha s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0}^{t-1}s^{\alpha-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{n-1}x(s)\mathrm{d}s=\\&\int_{t_0}^{t}\alpha s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0}^{t-1}s^{\alpha-1}(1+o(s))^{n-1}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_{t_0}^{t}\alpha s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{t_0}^{t-1}s^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_{t-1}^{t}\alpha s^{\alpha-1}[L_1x_{\mathrm{d}}(s)+L_2x_{\mathrm{s}}(s)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

成立.其中，x_{d}，x_{s} 分别为方程(1)的主解和次主解.

若取 $k_{\mathrm{d}}=M_{\mathrm{s}}=1$，则可根据定理1，2得到主解、次主解，分别满足

$$x_{\mathrm{d}}(t)=t^{-\alpha}(1+o(1)), \qquad 0<x_{\mathrm{s}}(t)<\exp(-\sqrt{t}).$$

利用引理1中的式(7)，且 $\alpha\geqslant1$，易知存在非负常数 $L_1^*\geqslant L_1$，使

$$\alpha\int_{t-1}^{t}s^{\alpha-1}[L_1x_{\mathrm{d}}(s)+L_2x_{\mathrm{s}}(s)]\mathrm{d}s\leqslant\alpha L_1^*\int_{t-1}^{t}\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\mathrm{d}s=\alpha L_1^*\int_{t-1}^{t}\frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

成立.此时，当 $t\to\infty$ 时，上式右侧极限为0.

因此，可得

$$\lim_{t\to\infty}|t^{\alpha}x(t)-C_{\alpha}(t_0,\varphi)|=0,$$

即式(8)成立.

证毕.

注2 当 $n=1$ 时，定理1～3退化为定理A～C.此外，定理1～3还包含 n 为其他正整数的情形，故定理1～3更加广泛.

由定理1，2可知：方程(1)中的主解和次主解都是正解，而方程(1)又是方程(5)的特殊形式，则根据定义1，可得方程(1)的任意解均为最终的正解，即方程(1)是非振荡的.

3 典型例题及一些开问题

例1 针对定理1，取 $n=2$，$\alpha=1$，$k_{\mathrm{d}}=1$，$\varepsilon=1$，则方程(1)可化为

$$x'(t)=-\frac{1}{t^2}x(t-1). \tag{19}$$

例1中的 α，k_{d}，ε 并不满足定理A中的条件，而是满足定理1中的 $\varepsilon=\alpha k_{\mathrm{d}}$，这与定理A相矛盾.在引理2中，令 $\rho(t):=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$，$\delta(t):=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$，考虑函数

$$\psi_2(t)=-\frac{1}{t^2}\varphi(t-1).$$

当 t_0 充分大时，易得

$$\psi_2(t)>-\frac{1}{t^2}\delta(t-1)=-\frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right]=$$

$$-\frac{1}{t^2}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t^2}\frac{1}{(t-1)^2}=-\frac{1}{t^3}\frac{1}{1-\frac{1}{t}}-\frac{1}{t^4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right)^2=$$

$$-\frac{1}{t^3}\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^4}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)=-\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^4}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right),$$

而 $\delta'(t)=-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}$，则有 $\psi_2(t)>\delta'(t)$，同理可得 $\psi_2(t)<\rho'(t)$，根据引理2可知定理1成立，即证得方程(19)的近似解满足式(6).

在例1中，取 $\varepsilon=\alpha k_{\mathrm{d}}$，但方程(19)的近似解仍满足式(6)，因此，定理1比定理A的应用更加广泛.

开问题1 对于方程

$$x'(t)=-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t^n}\right)^{\alpha-1}x(t-1),$$

定理1～3是否仍适用?

开问题2 对于方程

$$x'(t)=-\frac{\alpha}{t^n}\left(1-\frac{1}{t^n}\right)^{\alpha-1}x(t-\tau(t)),$$

定理1～3是否仍适用? 其中，$\tau(t)$ 是依赖于时间 t 的时滞函数.

参考文献:

[1] de BRUIJN N G. On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $>y$[J]. Indagationes Mathematicae,1951,54:50-60. DOI:10.1016/S1385-7258(51)50008-2.

[2] DICKMAN K. On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude[J]. Arkiv for Matematik, Astronomi Och Fysik,1930,22A(10):1-14.

[3] MOREE P. Integers without large prime factors: From Ramanujan to de Bruijn[J]. Integers,2014,14A:1-13.

[4] DIBLÍK J,MEDINA R. Exact asymptotics of positive solutions to Dickman equation[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,2018,23(1):101-121. DOI:10.3934/dcdsb.2018007.

[5] PITUK M,RÖST G. Large time behavior of a linear delay differential equation with asymptotically small coefficient [J]. Boundary Value Problems,2014(1):114. DOI:10.1186/1687-2770-2014-114.

[6] BEREKETOGLU H,PITUK M. Asymptotic constancy for nonhomogeneous linear differential equations with unbounded delays[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,2003,2003(s):100-107. DOI:10.3934/proc.2003.2003.100.

[7] DOMOSHNITSKY A. Maximum principles and nonoscillation intervals for first order Volterra functional differential equations[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis,2008,15(6):769-814.

[8] 李兵.几类时滞动力系统的渐近行为及其应用[D].成都:四川大学,2006.

[9] 杨志春.脉冲微分方程的渐近行为和周期解及其在种群生态学中的应用[D].成都:四川大学,2002.

[10] DIBLÍK J,MEDINA R. Dominant and subdominant positive solutions to generalized Dickman equation[J]. Applied Mathematics and Computation,2018,333(C):169-186. DOI:10.1016/j.amc.2018.03.090.

[11] GYÖRI I,PITUK M. Stability criteria for linear delay differential equations[J]. Differential and Integral Equations,1997,10(5):841-852.

[12] GYÖRI I,PITUK M. Asymptotic formulas for a scalar linear delay differential equation[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2016,72:1-14. DOI:10.14232/ejqtde.2016.1.72.

[13] DIBLÍK J. Positive solutions to generalized Dickman equation[J]. Applied Mathematics Letters,2018,82:111-117. DOI:10.1016/j.aml.2018.03.004.

[14] AGARWAL R P,BEREZANSKY L,BRAVERMAN E,*et al*. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications[M]. New York:Springer,2012. DOI:10.1007/978-1-4614-3455-9.

[15] GYÖRI I,LADAS G. Oscillation theory of delay differential equations[M]. Oxford:Clarendon Press,1991.

[16] DIBLÍK J,RŪŽIKOVÁ M. Asymptotic behavior of solutions and positive solutions of differential delayed equations [J]. Functional Differential Equations,2007,14(1):83-105.

[17] DIBLÍK J. Explicit integral criteria for the existence of positive solutions of the linear delayed equation $\dot{x}(t)=-c(t)x(t-\tau)$ [J]. Advances in Mathematics,2015,280:1-20. DOI:10.1016/j.aim.2015.04.013.

(**责任编辑:** 钱筠　　**英文审校:** 黄心中)