

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202006004



二阶时滞多智能体系统分组一致性分析

李艳艳, 李钟慎

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 在连通二部图结构下, 研究二阶时滞多智能体系统分组一致性的问题. 根据二部图的特征, 给出基于竞争的二阶时滞多智能体系统分组控制协议. 利用代数图论和矩阵知识, 研究二阶时滞多智能体系统分组一致的充要条件, 以及系统在实现分组一致时容许的最大时滞. 仿真结果表明: 二阶时滞多智能体能够在连通二部图下实现分组一致.

关键词: 连通二部图; 多智能体系统; 时滞; 分组一致

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2021)01-0009-06

Group Consensus Analysis on Second-Order Multi-Agent Systems With Time Delay

LI Yanyan, LI Zhongshen

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Under a connected binomial graph topology, the group consensus problem of second-order multi-agent system with time delay was investigated. According to the characteristics of binomial graph, the second-order multi-agent system with time delay grouping control protocol based on competition was presented. By means of algebraic graph theory and matrix knowledge, the necessary and sufficient conditions for the group consensus of second-order multi-agent system with time delay, the maximum time delay allowed for the realization of the group consensus were studied. The simulation results show that the second-order multi-agent system with time delay can be grouped uniformly under the connected binomial graph.

Keywords: connected binomial graph; multi-agent system; time delay; group consensus

多智能体系统一致性在电力、交通、多机器人协同控制等方面得到广泛的应用^[1-4]. 多智能体系统一致性指的是随着时间的推移, 智能体之间进行信息交换, 最后, 使得各智能体的状态达到相同的值. 一致性协议是智能体之间进行信息交换后状态达到一致的规则. 多智能体系统一致性问题作为多智能系统研究的基本问题之一, 许多学者在这一问题上得到了丰富的理论成果. 这些成果包括一阶时滞多智能体系统一致性的研究^[5]、具有动态拓扑和不同时延的二阶多智能体系统的一致性的分析^[6]、具有时滞的多智能体系统一致性控制协议的设计^[7]及基于二阶网络的时滞多智能体一致性控制协议的设计^[8]等. 朱雪芳等^[5]研究基于加权平均预测的一阶时滞多智能体系统的一致性问题, 提高系统的鲁棒性和收敛速度. 闫超等^[6]设计一种新邻居的反馈法则, 研究在动态拓扑下具有不同通信时滞的二阶多智能体系统. 林森^[7]设计具有时滞的二阶和三阶多智能体系统分布式协同控制策略和提高系统收敛速度的局部控制策略. 戴彬婷等^[8]提出带有延时基于二阶网络的多智能体一致性控制和跟踪算法, 并且在提升系统一致

收稿日期: 2020-06-02

通信作者: 李钟慎(1971-), 男, 教授, 博士, 主要从事先进控制理论和控制工程的研究. E-mail: lzscyw@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2019J01060)

性收敛速度基础上研究编队控制算法.

近年来,分组一致性问题成为多智能体系统的研究热点之一.对多个智能体系统进行分组,使得子系统中各智能体的状态达到一定的值,不同子系统达到的状态不一样.Yu 等^[9]提出通信拓扑之间的交换存在通信延迟,引入双树行变换对原系统进行降阶,在加权有向图下,对一阶系统分组一致性的时滞和切换情况进行研究,并设计一阶系统分组一致性若干法则.Xie 等^[10]提出连续时间多智能体系统的分组一致性充分必要准则.Xia 等^[11]提出在切换拓扑和时变时滞情况下,一阶多智能体分组一致性的充分条件.Han 等^[12]提出智能度的概念,利用多一致性的方法,给出二阶系统在采样控制下实现分组一致性的充分必要条件.

在实际应用中,相互联系的多智能体之间不仅存在合作关系,也存在竞争关系.然而,基于竞争关系的多智能体研究问题却少有报道.文献[13-19]基于竞争协议下,研究一阶多智能体无时滞和时滞情况下的分组一致性问题.林瑜阳等^[14]研究二阶多智能体基于竞争协议下的分组一致性问题.本文在文献[14]的基础上,将无时滞的多智能体系统拓展到有时滞的多智能系统,给出二阶时滞多智能体系统分组一致性的竞争协议,并给出系统实现分组一致性所容许的最大时滞及实现分组一致性的充分必要条件.

1 预备知识与问题描述

1.1 代数图论

设 $G = \{V, E\}$ 表示一个无向图, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ 表示顶点的集合,即多智能体系统的集合. $E \subset V \times V$ 表示图的边集,即智能体之间信息交换. $(v_i, v_j) \in E$ 表示顶点 v_i 能够接收到顶点 v_j 传递的信息,顶点 v_i 的邻居集合用 N_i 表示.其中, $N_i = \{v_j \in V\}$.图 G 的邻接矩阵 $A = a_{i,j} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $a_{i,j}$ 表示 v_i 和 v_j 之间的连接权值.当 $v_j \in N_i$ 时, $a_{i,j} > 0$; 否则, $a_{i,j} = 0$.

对于无向图 $a_{i,j} = a_{j,i}$.文中不考虑自环拓扑结构度矩阵 $D = [d_{i,j}]_{n \times n}$, $d_{i,j}$ 表达式为

$$d_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k \in N_i} a_{i,k}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: k 为 $1, 2, 3, \dots, n$.存在无向序列 $\{(v_{i,1}, v_{i,2}), (v_{i,2}, v_{i,3}), \dots, (v_{i,r}, v_j)\}$ 使 v_i 到达 v_j , 则称 v_i 和 v_j 是连通的.若无向图中任意两点是连通的,则称该图是无向连通图.

1.2 问题描述

以连续二阶多智能体系统为研究对象,每个智能体系统的动态模型描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t). \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中: $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $x, \dot{x}, u_i \in \mathbf{R}$ 分别为智能体 i 在 t 时刻的位移、速度和控制输入.

定义 1 二部图^[20]. 设 $G = \{V, E\}$ 表示一个无向图,顶点集 V 分割为两个子集 V_1 和 V_2 , 设 $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ ($k > 1$) 为集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的一个分割,如果 $X_i \neq \emptyset, X_i \cap X_j = \emptyset$ 且 $\bigcup_{i=1}^h X_i = X$, 对 $x_i \in X_i$, 用 X_i 表示 x_i 的分组,显然,对任意 x_i 都有 $x_i \in X_i$, 若 x_i 和 x_j 有相同的分组,则 $\tilde{i} = \tilde{j}$.

为了研究系统(2),假设 $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ 为所有智能体的一个分割,给出分组一致性的定义 2.

定义 2 分组一致性. 给定系统初始条件 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), \dots, x_n(0)]^T$, $\mathbf{v}(0) = [v_1(0), v_2(0), v_3(0), \dots, v_n(0)]^T$, 其中, $x_i(0) \in \mathbf{R}, v_i(0) \in \mathbf{R}$. $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ 为智能体的一个分割,使得当 $\tilde{i} = \tilde{j}$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_j| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i - v_j| = 0$; 当 $\tilde{i} \neq \tilde{j}$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_j| \neq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |v_i - v_j| \neq 0$ 可实现分组一致.

研究带有通信时滞的二阶多智能体系统,设计基于竞争的控制协议的控制输入为

$$u_i(t) = - \sum_{j \in N_i} a_{i,j} [(x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau)) + \gamma(v_j(t-\tau) + v_i(t-\tau))]. \quad (3)$$

式(3)中: $\gamma > 0$ 表示耦合系数; τ 为系统时滞.由式(2),多智能系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = - \sum_{j \in N_i} a_{i,j} [(x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau)) + \gamma(v_j(t-\tau) + v_i(t-\tau))]. \end{cases} \quad (4)$$

其对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \mathbf{L} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-\tau) \\ \mathbf{v}(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式(5)中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$; $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]^T$; $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{A}$.

2 主要结果及其证明

为了研究系统(3)在时滞情况下的分组一致性问题, 给出引理 1, 2.

引理 1 如果图 $G(t)$ 的拓扑结构为连通二部图, 则在适当排序下, 图 G 对应的邻接矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

引理 2 如果图 G 的拓扑结构为连通二部图, 则矩阵 $\mathbf{D} + \mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$, 矩阵 $\mathbf{D} + \mathbf{A}$ 的非零特征值为正实数.

证明: 由于图 $G(t)$ 的拓扑结构为连通二部图, 设包含 n 个智能体的系统依图 G 分为两组, 智能体的个数分别为 s 和 $n-s$. $M = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$, $N = \{e_{s+1}, e_{s+2}, \dots, e_n\}$. 其中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{s \times s} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0}_{(n-s) \times (n-s)} \end{bmatrix}$.

根据矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 的定义, 令 $\xi = \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_s, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-s}\}^T$, 则 $(\mathbf{D} + \mathbf{A})\xi = 0$. 由于图 G 为无向图, 对于 $i \geq 1, j \leq n$, 有 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 由此可知

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\mathbf{D} + \mathbf{A}) \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n d_{i,i} x_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} (2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (x_i + x_j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n a_{i,j} (x_i + x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

拓扑图 G 为连通二部图, $\mathbf{x}^T (\mathbf{D} + \mathbf{A}) \mathbf{x}$ 有非零解, 当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_s = -x_{s+1} = \dots = -x_n$. 因此, $\text{rank}(\mathbf{D} + \mathbf{A}) = n-1$. 当 $1 \leq i \leq n$ 时, $\sum_{j \neq i}^n a_{i,j} = d_{i,i}$, 由圆盘定理^[22], 矩阵 $\mathbf{D} + \mathbf{A}$ 的特征值 λ 满足 $\|\lambda_i - d_{i,i}\| \leq \sum_{j \neq i}^n a_{i,j} = d_{i,i}$. 因此, 矩阵 $\mathbf{D} + \mathbf{A}$ 的非零特征值为正实数, 并且仅有一个零特征值.

定理 1 设二阶时滞多智能体的拓扑结构为连通二部图, 当 $\gamma > 0$ 时, 利用控制协议(3), 系统(4), 可以达到分组一致, $0 < \tau < \tau^*$ 即为系统的最大时滞.

$$\tau^* = \frac{\arccos \left[\frac{(\omega^*)^2}{\lambda_{\max}(1 + (\omega^*)^2 \gamma^2)} \right]}{\omega^*}, \quad (6)$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\lambda_{\max} \sqrt{4 + \lambda_{\max}^2 \gamma^2} + \lambda_{\max}^2 \gamma^2}{2}}. \quad (7)$$

证明: 利用频域分析法对系统(4)的稳定性进行分析, 并求出系统进行分组一致时 τ 的取值范围. 对系统(4)进行拉普拉斯变换, 即

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{x}(0). \quad (8)$$

$$\text{式(8)中: } \mathbf{G}(s) = [s\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S} - \mathbf{L} \otimes \mathbf{R} e^{-\tau s}]^{-1}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

令 $\mathbf{Y}(s) = s\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S} - \mathbf{L} \otimes \mathbf{R} e^{-\tau s}$, 由定理 2, 存在可逆矩阵 \mathbf{F} , 使得 $\mathbf{J} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{F} = \text{diag}\{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 其中, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \leq \lambda_n$ 为正实数且为 $(\mathbf{D} + \mathbf{A})$ 的特征值.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_2) (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{Y}(s) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_2) (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_2) = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_2) [s\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S} - \mathbf{L} \otimes \mathbf{R} e^{-\tau s}] (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_2) - \\ &= (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_2) \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_n - \mathbf{S} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & s\mathbf{I}_n - \mathbf{S} - \lambda_n \mathbf{R} e^{-\tau s} \end{bmatrix} (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_2). \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9),有

$$\text{Det}(\mathbf{Y}(s)) = s^2 \prod_{i=2}^n (s^2 + s\lambda_i \gamma e^{-\tau,s} + \lambda_i e^{-\tau,s}). \tag{10}$$

由式(10)可知, $\mathbf{Y}(s)$ 除了两个零特征值,其余零点均位于左半开平面,当且仅当

$$s^2 + s\lambda_i \gamma e^{-\tau,s} + \lambda_i e^{-\tau,s} = 0 \tag{11}$$

的根全部位于左半平面. 将 $s=j\omega$ 带入式(11), λ_i 为正实数,有

$$-\omega^2 + \omega \gamma \lambda_i \sin(\tau\omega) + \lambda_i \cos(\tau\omega) = 0, \tag{12}$$

$$\omega \gamma \lambda_i \cos(\tau) - \lambda_i \sin(\tau\omega) = 0. \tag{13}$$

由式(12),(13),可得

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\lambda \sqrt{4 + \lambda^2 \gamma^2} + \lambda^2 \gamma^2}{2}}, \quad \tau = 2n\pi \pm \frac{\arccos[\cos(\tau\omega)]}{\omega}. \tag{14}$$

因此,最小时滞 τ 为

$$\tau = \frac{\arccos\left[\frac{\omega^2}{\lambda_i(1 + \omega^2 \gamma^2)}\right]}{\omega}. \tag{15}$$

当 $\omega > 0$ 时, ω 随 λ_i 的增大而增大,而 $\arccos x$ 是一个减函数,所以 τ 是关于 λ_i 的减函数,记 $\lambda_{\max} = \max \lambda_i$ 为系统能容许的最大时滞,有

$$\tau^* = \frac{\arccos\left[\frac{(\omega^*)^2}{\lambda_{\max}(1 + (\omega^*)^2 \gamma^2)}\right]}{\omega^*}, \tag{16}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\lambda_{\max} \sqrt{4 + \lambda_{\max}^2 \gamma^2} + \lambda_{\max}^2 \gamma^2}{2}}. \tag{17}$$

同理可证,当 $\omega < 0$ 时,有相同的结果. 所以当 $0 < \tau < \frac{\arccos\left[\frac{\omega^2}{\lambda_i(1 + \omega^2 \gamma^2)}\right]}{\omega}$ 时,系统(4)稳定.

对系统(4)进行降维处理,令 $\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}$,有

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{L} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t - \tau). \tag{18}$$

又因为 $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix}$, 所以有

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{L} \otimes \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}(t - \tau). \tag{19}$$

由文献[10],由于式(17)除两个零特征值外,其余特征值均分布在坐标轴的左半平面,所以系统收敛,可实现分组一致.

3 数值仿真

图 1 为 5 个多智能体的连通二部图. 图 1 中:两顶点间连接权重为 1;任意产生的初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [-6, 5, -6, 0, 6]^T$, 而 $\mathbf{v}(0) = [4, 7, -5, 3, 2]^T$. 取耦合系数 $\gamma = 1, \tau^* = 0.29$, 有 $0 < \tau < 0.29$.

当 $\gamma = 1$ 时, $\tau = 0.134$ 时,即当多智能体系统时滞在最大容许时滞范围内,系统的各状态响应,如图 2 所示. 图 2 中: x 为位置; v 为速度. 由图 2 可知:智能体系统 1,2 收敛于同一位置和速度,而智能体系统 3~5 收敛于同一位置和速度,多智能体系统实现分组一致性.

当 $\gamma = 1$ 时, $\tau = 0.290$ 时,即当多智能体系统时滞处于最大容许时滞时,系统的各状态响应,如图 3 所示. 由图 3 可知:智能体系统 1,2 收敛于同一位置和速度,智能体系统 3~5 收敛于同一位置和速度,

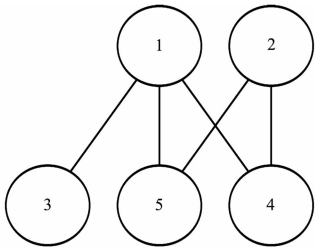


图 1 5 个多智能体系统的连通二部图
Fig.1 Connected binomial graph with 5 multi-agent systems

并且多智能系统出现振荡, 仍然能够实现分组一致, 但处于临界稳定的状态。

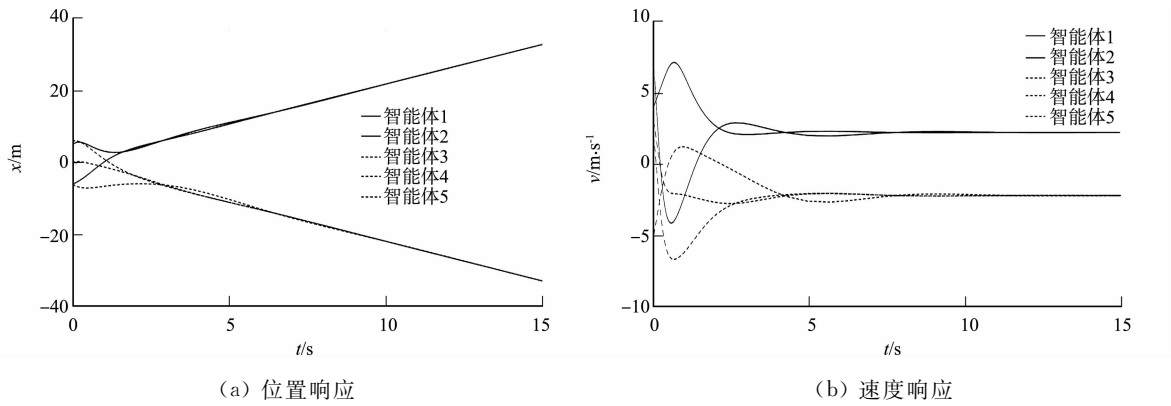


图 2 系统的各状态响应($\gamma=1, \tau=0.134$)

Fig. 2 Every state response of system ($\gamma=1, \tau=0.134$)

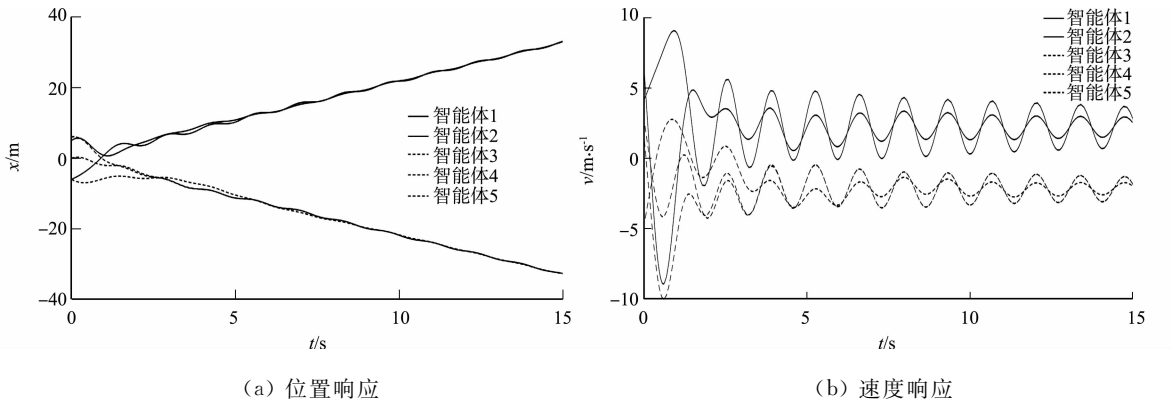


图 3 系统的各状态响应($\gamma=1, \tau=0.290$)

Fig. 3 Every state response of system ($\gamma=1, \tau=0.290$)

当 $\gamma=1$ 时, $\tau=0.350$ 时, 即多智能体系统时滞超过最大容许时滞, 系统的各状态响应, 如图 4 所示。由图 4 可知: 智能体系统 1, 2 既不收敛于同一位置和速度, 智能体系统 3~5 也不收敛于同一位置和速度, 即各智能体系统的状态发散, 验证了定理 1 的正确性。

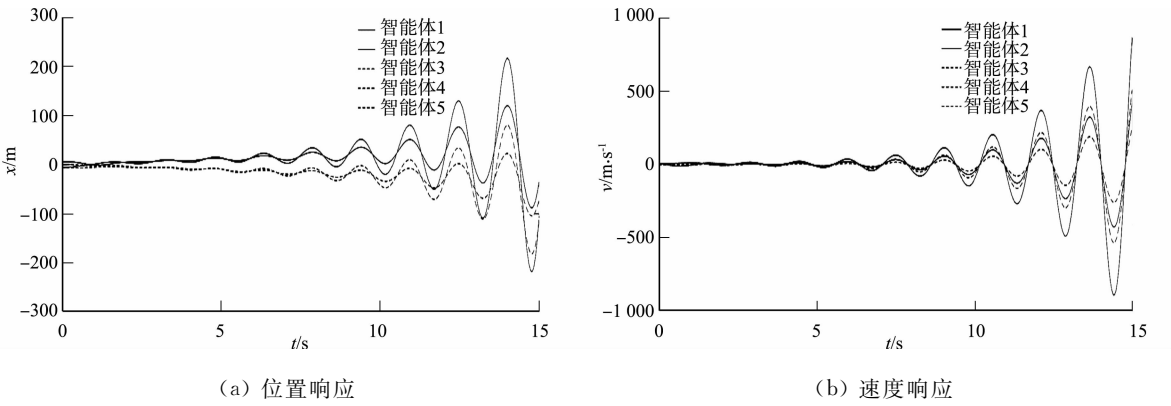


图 4 系统的各状态响应($\gamma=1, \tau=0.350$)

Fig. 4 Every state response of system ($\gamma=1, \tau=0.350$)

4 结论

研究二阶时滞多智能体系统在连通二部图下分组一致性问题, 根据连通二部图的特征, 设计基于竞争的二阶时滞多智能体系统的分组一致性协议, 通过频域分析法得到系统分组一致性的充要条件, 通过数值仿真验证了结果的正确性。

文中仅研究了连续二阶时滞多智能体系统的在连通二部图下的分组一致性问题, 对于基于连通二

部图下的离散多智能体系统、非线性多智能体系统的分组一致问题是后续将要解决的问题。

参考文献:

- [1] 王鑫. 基于强化学习的多机器人分布式协同机制研究[D]. 大连:大连理工大学, 2019.
- [2] 张袅娜, 张晓芳. 基于多智能体的电动汽车滑移率控制方法[J]. 燕山大学学报, 2020, 44(1): 63-69. DOI:10. 3969/j. issn. 1007-791X. 2020. 01. 009.
- [3] 王云龙. 多车辆系统的分布式包围控制研究[D]. 长春:长春工业大学, 2019.
- [4] 乐健, 周谦, 赵联港, 等. 基于一致性算法的电力系统分布式经济调度方法综述[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(3): 44-54. DOI:10. 16081/j. epae. 202002019.
- [5] 朱雪芳, 彭力. 一阶时滞多智能体系统一致性研究[J]. 现代制造技术与装备, 2019(8): 37-44. DOI:10. 16107/j. cnki. mmte. 2019. 0773.
- [6] 闫超, 朱伟. 具有动态拓扑和不同时延的二阶多智能体系统的一致性分析[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2011, 23(4): 478-482. DOI:10. 3979 /j. issn. 1673-825X. 2011. 04. 020.
- [7] 林森. 具有时滞的多智能体系统一致性控制协议设计[D]. 杭州:浙江工业大学, 2015.
- [8] 戴彬婷, 马林, 吴婷婷, 等. 基于二阶网络的时滞多智能体一致性控制[J]. 网络信息工程, 2019(13): 65-70. DOI:10. 3969/j. issn. 1000-8519. 2019. 13. 026.
- [9] YU Junyan, WANG Long. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays systems[J]. Control Letters, 2010(59): 340-348. DOI:10. 1016/j. sysconle. 2010. 03. 009.
- [10] XIE Dongmei, LIU Qingli, LYU Liangfu. Necessary and sufficient condition for the group consensus of multi-agent systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014(243): 870-878. DOI:10. 1016/j. amc. 2014. 06. 069.
- [11] XIA Hong, HUANG Tingzhu, SHAO Jinliang, *et al.* Group consensus of multi-agent systems with communication delay[J]. Neurocomputing, 2016, 171: 1666-1673. DOI:10. 1016/j. neucom. 2015. 07. 108.
- [12] HAN Guangsong, DING Xinhe, ZHI Hongguan, *et al.* Multi-consensus of multi-agent systems with various intelligences using switched impulsive protocols[J]. Information Sciences, 2016, 349/350: 188-198. DOI:10. 1016/j. ins. 2016. 02. 038.
- [13] 王强, 王玉振, 杨仁明. 一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 369-373, 378. DOI:10. 13195/j. cd. 2013. 03. 51. wangq. 018.
- [14] 林瑜阳, 李钟慎. 基于连通二部图的二阶多智能体系统分组一致性分析[J]. 信息与控制, 2017, 46(1): 7-12. DOI: 10. 13976 /j. cnki. xk. 2017. 0007.
- [15] 王玉振, 杜英雪, 王强. 多智能体时滞和有时滞网络的加权分组一致性分析[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 1993-1998. DOI:10. 13195/j. kzyjc. 2014. 1435.
- [16] 孟亚伟. 一类具有时滞和领导者的二阶离散多智能体系统一致性[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2012(6): 933-935. DOI:10. 3969/j. issn. 1008-1402. 2012. 06. 039.
- [17] 张越. 基于竞争关系的时延异构多智能体系统分组一致性[D]. 重庆:重庆邮电大学, 2019.
- [18] TAN Chong, YUE Liang, LI Yanjiang, *et al.* Group consensus control for discrete-time heterogeneous multi-agent systems with time delays[J]. Neurocomputing, 2020, 392: 70-85. DOI:10. 1016/j. neucom. 2020. 01. 092.
- [19] GODIL C, ROYLE G. Algebraic graph theory[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1985.
- [20] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1985.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 崔长彩)