

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202006022



单位球  $B^n$  上改进的  
Roper-Suffridge 算子

胡春英, 王建飞

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 研究单位球  $B^n$  上改进的 Roper-Suffridge 算子的几何与分析特性, 证明当  $k(k \geq 2)$  次齐次多项式  $P_k$  满足条件  $\|P_k\| \leq \frac{\cos \beta}{|1-\lambda|(k+2)}$  时, 改进的 Roper-Suffridge 算子  $F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0)f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}z_0)^T$  保持  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星性. 同时, 证明该算子保持 Bloch 性质.  
**关键词:** 双全纯映射; Roper-Suffridge 算子;  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星映射; Bloch 映射  
**中图分类号:** O 174.56      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2020)06-0829-06

Modified Roper-Suffridge Extension  
Operator on Unit Ball  $B^n$

HU Chunying, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Geometric and analytic properties of the modified Roper-Suffridge extension operator defined on the unit ball  $B^n$  are studied, and prove that the operator  $F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0)f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}z_0)^T$  preserves the property of almost spirallikeness of type  $\beta$  with complex number order  $\lambda$  if  $\|P_k\| \leq \frac{\cos \beta}{|1-\lambda|(k+2)}$ , where  $P_k$  is a homogeneous polynomial of degree  $k$  ( $k \geq 2$ ). The operator preserves the property of Bloch mapping.  
**Keywords:** biholomorphic mappings; Roper-Suffridge extension operator; almost spirallike mappings of type  $\beta$  with complex number order  $\lambda$ ; Bloch mapping

1 预备知识

用  $\mathbb{C}$  表示复数域,  $\mathbb{C}^n$  表示  $n$  维复欧氏空间, 具有内积  $\langle z, u \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{u}_j, z, u \in \mathbb{C}^n$ , 且欧氏范数为  $\|z\| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}, B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$  表示  $\mathbb{C}^n$  中的单位球, 显然,  $B^1$  为  $\mathbb{C}$  中的单位圆盘, 通常记为  $U, \partial B^n = \{z \in B^n : \|z\| = 1\}$  表示单位球面.

设  $f: B^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  是全纯映射, 若  $f$  满足  $f(0)=0, Df(0)=I_n$ , 则称  $f$  是  $B^n$  上的正规化全纯映射, 这里  $Df(z)$  表示  $f$  在点  $z$  处的 Jacobian 矩阵,  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵; 若  $f$  的逆映射  $f^{-1}$  存在, 且  $f^{-1}$  在  $f(B^n)$

**收稿日期:** 2020-06-22  
**通信作者:** 胡春英(1979-), 女, 讲师, 主要从事复分析的研究. E-mail: huchunying\_79@sina.com.  
**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11671362, 11971182); 国家自然科学基金面上项目(12071161); 福建省自然科学基金资助项目(2019J01066, 2020J01073); 福建省自然科学基金青年创新项目(2020J05157); 华侨大学高层次人才科研启动项目(19BS102)

上全纯,则称  $f$  是  $B^n$  上的双全纯映射;若对每点  $z \in B^n$ ,  $Df(z)$  都是非奇异的,则称  $f$  是  $B^n$  上的局部全纯映射.

若对所有  $z \in \mathbf{C}^n$  和  $\lambda \in \mathbf{C}$ , 多项式  $P_k: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$  都满足  $P_k(\lambda z) = \lambda^k P_k(z) (k \in \mathbf{N})$ , 则称  $P_k$  为  $\mathbf{C}^n$  上的  $k$  次齐次多项式.  $P_k$  的范数为  $\|P_k\| = \sup\{|P_k(z)| : z \in \partial B^n\}$ ,  $\nabla P_k(z) = (\frac{\partial P_k}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial P_k}{\partial z_n})$  表示  $P_k$  在  $z$  点处的梯度, 容易看出,  $\nabla P_k(z)z = kP_k(z)$ , 且  $|P_k(z)| = \left|P_k(\|z\| \cdot \frac{z}{\|z\|})\right| \leq \|z\|^k \|P_k\|$ .

Roper 等<sup>[1]</sup>于 1995 年提出的 Roper-Suffridge 算子为

$$F(z) = (f(z_1), \sqrt{f'(z_1)} z_0)^T.$$

上式中:  $f$  是单位圆盘  $U$  上的正规化局部双全纯函数,  $z = (z_1, z_0)^T \in B^n, z_1 \in U, z_0 = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ , 幂函数取使  $\sqrt{f'(0)} = 1$  的单值分支.

文献[1-2]分别证明了 Roper-Suffridge 算子有如下 3 个性质:

- 1) 若  $f$  是  $U$  上的正规化双全纯凸函数, 则  $F(z)$  是  $B^n$  上的正规化双全纯凸映射;
- 2) 若  $f$  是  $U$  上的正规化双全纯星形函数, 则  $F(z)$  是  $B^n$  上的正规化双全纯星形映射;
- 3) 若  $f$  是  $U$  上的正规化双全纯 Bloch 函数, 则  $F(z)$  是  $B^n$  上的正规化双全纯 Bloch 映射.

由于对  $B^n$  上具体凸映射、星形映射及 Bloch 映射等双全纯映射的研究甚少, 而用 Roper-Suffridge 算子可以构造出许多这样的映射, Liu<sup>[3]</sup>证明 Roper-Suffridge 算子保持  $\alpha$  次的星形性, 文献[4-5]用不同的方法证明 Roper-Suffridge 算子保持  $\alpha$  次的殆星性. 2005 年, Muir<sup>[6]</sup>将 Roper-Suffridge 算子改进为

$$F(z) = (f(z_1) + P_2(z_0)f'(z_1), \sqrt{f'(z_1)} z_0)^T.$$

上式中:  $P_2(z_0)$  是  $\mathbf{C}^{n-1}$  上的 2 次齐次多项式, 并证明了该算子保持凸性当且仅当  $\|P_2\| \leq \frac{1}{2}$ , 保持星形性当且仅当  $\|P_2\| \leq \frac{1}{4}$ . Muir<sup>[6]</sup>将上述算子进一步改进为

$$F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0)f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}} z_0)^T.$$

上式中:  $P_k(z_0)$  是  $\mathbf{C}^{n-1}$  上的  $k(k \geq 2)$  次齐次多项式. 王建飞等<sup>[7]</sup>证明了当  $\|P_k\| \leq \frac{1 - |2\alpha - 1|}{2(k+2)\alpha}$  时, 该算子保持  $\alpha$  次的星形性, 当  $\|P_k\| \leq \frac{1 - \alpha}{k+2}$  时, 该算子保持  $\alpha$  次的殆星性. 冯淑霞等<sup>[8]</sup>证明了当  $\|P_k\| \leq \frac{(1-\alpha)\cos\beta}{k+2}$  时, 该算子保持  $\beta$  型  $\alpha$  次的殆星性.

殆星映射是星形映射的子族, 近些年, 有很多关于殆星映射的相关研究<sup>[4-17]</sup>. 文中将研究由下面定义所给出的一类殆星映射.

**定义 1**<sup>[13]</sup> 设  $f(z)$  是  $B^n$  上的正规化局部双全纯映射,  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$  且  $\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}) \leq 0$ , 若

$$\operatorname{Re}((1-\lambda)e^{-i\beta}z^T(Df(z))^{-1}f(z)) \geq -\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta})\|z\|^2, \quad z \in B^n,$$

则称  $f(z)$  是  $B^n$  上的  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星映射.

当  $\beta=0$  时,  $f(z)$  是  $B^n$  上的复数阶  $\lambda$  次殆星映射; 当  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  时,  $f(z)$  是  $B^n$  上的  $\beta$  型  $\alpha$  次殆星映射; 当  $\beta=0$  且  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  时,  $f(z)$  是  $B^n$  上的  $\alpha$  次殆星映射; 当  $\beta=0$  且  $\lambda=0$  时,  $f(z)$  是  $B^n$  上的星形映射,  $\alpha \in [0, 1)$ .

**定义 2**<sup>[14]</sup> 设  $f(z)$  是单位圆盘  $U$  上的全纯函数, 若

$$\sup_{z \in U} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty, \tag{1}$$

则称  $f(z)$  是  $U$  上的 Bloch 函数.

**定义 3**<sup>[15]</sup> 设  $f: B^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  是全纯映射, 若

$$\sup_{z \in B^n} (1 - \|z\|^2) \|Df(z)\| < \infty, \tag{2}$$

则称  $f(z)$  是  $B^n$  上的 Bloch 映射.

## 2 相关引理

**引理 1**<sup>[14]</sup> 设  $\varphi(z)$  是单位圆盘  $U$  上的全纯函数, 则  $\operatorname{Re}(\varphi(z)) \geq 0$  的充要条件为存在一个定义在  $[0, 2\pi]$  上的非单减函数  $\mu(t)$ , 使得  $\mu(2\pi) - \mu(0) = \operatorname{Re}(\varphi(0))$  且

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) + i\operatorname{Im}(\varphi(0)), \quad z \in U.$$

**引理 2** 设  $\varphi(z)$  是单位圆盘  $U$  上的全纯函数, 若  $\operatorname{Re}(\varphi(z)) \geq 0$ , 则

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{2\operatorname{Re}(\varphi(z))}{1 - |z|^2}, \quad z \in U.$$

证明: 若  $\operatorname{Re}(\varphi(z)) \geq 0$ , 由引理 1, 有

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t) + i\operatorname{Im}(\varphi(0)), \quad z \in U.$$

上式中:  $\mu(t)$  是  $[0, 2\pi]$  上的非单减函数. 由于  $\operatorname{Re}(\varphi(z)) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right) d\mu(t) \geq 0$ , 因此

$$|\varphi'(z)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2}{|1 - ze^{-it}|^2} d\mu(t) = \frac{2}{1 - |z|^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right) d\mu(t) = \frac{2\operatorname{Re}(\varphi(z))}{1 - |z|^2}, \quad z \in U.$$

**引理 3**<sup>[16]</sup> 设  $f(z)$  是单位圆盘  $U$  上的正规化双全纯函数, 常数  $\nu \geq 2$ , 则

$$\left| (1 - |z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - \nu \bar{z} \right| \leq \nu + 2, \quad z \in U.$$

## 3 保持复数阶殆星性的改进的 Roper-Suffridge 算子

**定理 1** 设常数  $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  且  $\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}) \leq 0$ ,  $f$  是单位圆盘  $U$  上的正规化双全纯  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星函数,  $P_k: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  是  $k(k \geq 2)$  次齐次多项式且  $\|P_k\| \leq \frac{\cos \beta}{|1 - \lambda|(k + 2)}$ , 则

$$F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0) f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}} z_0)^T$$

是  $B^n$  上的  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星映射, 其中, 幂函数取使  $[f'(0)]^{\frac{1}{k}} = 1$  的单值分支.

证明: 由定义 1, 定理 1 的证明只需证明

$$\operatorname{Re}((1 - \lambda)e^{-i\beta} \bar{z}^T (DF(z))^{-1} F(z)) \geq -\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}) \|z\|^2 \quad (3)$$

对所有的  $z \in B^n$  成立即可.

令  $z = (z_1, z_0)^T \in B^n$ , 其中,  $z_1 \in U, z_0 = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ . 当  $z_0 = 0$  时, 定理 1 显然成立. 当  $z_0 \neq 0$  时, 因为  $F(z)$  在  $z = (z_1, z_0)^T \in \bar{B}^n$  且  $z_0 \neq 0$  上全纯, 由调和函数的最小模原理, 只需证明定理 1 对所有满足  $\|z\| = 1$  且  $z_0 \neq 0$  的点成立, 即证明

$$\operatorname{Re}((1 - \lambda)e^{-i\beta} \bar{z}^T (DF(z))^{-1} F(z)) \geq -\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}) \quad (4)$$

对所有满足  $\|z\| = 1$  且  $z_0 \neq 0$  的点成立.

令  $z = \xi w$ , 其中,  $w \in \mathbb{C}^n, \|w\| = 1, \xi \in \mathbb{C}, |\xi| = 1$ . 将  $z$  代入式(4), 得

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(1 - \lambda)e^{-i\beta} \bar{w}^T (DF(\xi w))^{-1} F(\xi w)}{\xi}\right) + \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}) \geq 0. \quad (5)$$

因为不等式左边是  $|\xi| \leq 1$  上的调和函数, 由调和函数的最小模原理, 式(5)在  $|\xi| \leq 1$  上也成立. 因此, 只需验证式(4)对所有满足  $z \in \partial B^n$  且  $z_0 \neq 0$  的点成立即可.

假定  $\|z\|^2 = |z_1|^2 + \|z_0\|^2 = 1$ , 由于

$$F(z) = \begin{bmatrix} f(z_1) + P_k(z_0) f'(z_1) \\ [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}} z_0^T \end{bmatrix},$$

则

$$DF(z) = \begin{bmatrix} f'(z_1) + P_k(z_0) f''(z_1) & f'(z_1) \nabla P_k(z_0) \\ \frac{1}{k} [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}-1} f''(z_1) z_0^T & [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}} \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

式(6)中: $\nabla P_k(\mathbf{z}_0)=\left(\frac{\partial P_k}{\partial z_2},\cdots,\frac{\partial P_k}{\partial z_n}\right)$ .

通过计算,可得

$$F(\mathbf{z})=DF(\mathbf{z})\begin{pmatrix}\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}-(k-1)P_k(\mathbf{z}_0)\\ \left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{k[f'(z_1)]^2}+\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right)\mathbf{z}_0^T\end{pmatrix}.$$

因此有

$$\bar{\mathbf{z}}^T(DF(\mathbf{z}))^{-1}F(\mathbf{z})=\bar{z}_1\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}+\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{k[f'(z_1)]^2}\right)\|\mathbf{z}_0\|^2+\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\|\mathbf{z}_0\|^2-k\bar{z}_1\right).$$

再由  $\|\mathbf{z}\|^2=|z_1|^2+\|\mathbf{z}_0\|^2=1$ , 得

$$\begin{aligned}(1-\lambda)e^{-i\beta}\bar{\mathbf{z}}^T(DF(\mathbf{z}))^{-1}F(\mathbf{z})+\lambda e^{-i\beta}\|\mathbf{z}\|^2=\\ (1-\lambda)e^{-i\beta}\bar{z}_1\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}+\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{k[f'(z_1)]^2}\right)\|\mathbf{z}_0\|^2+\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\|\mathbf{z}_0\|^2-k\bar{z}_1\right)\Bigg]+\\ \lambda e^{-i\beta}\|\mathbf{z}\|^2=(1-\lambda)e^{-i\beta}\left(\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}|z_1|^2+\left(1-\frac{f(z_1)f''(z_1)}{k[f'(z_1)]^2}\right)(1-|z_1|^2)+\right.\\ \left.\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-k\bar{z}_1\right)\right)+\lambda e^{-i\beta}[|z_1|^2+(1-|z_1|^2)]=\\ \Bigg[(1-\lambda)\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}+\lambda\Bigg]e^{-i\beta}|z_1|^2+\Bigg[1-(1-\lambda)\frac{f(z_1)f''(z_1)}{k[f'(z_1)]^2}\Bigg]e^{-i\beta}(1-|z_1|^2)+\\ (1-\lambda)\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\Bigg[\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-k\bar{z}_1\Bigg]e^{-i\beta}.\end{aligned}\tag{7}$$

令  $\varphi(z_1)=\left[(1-\lambda)\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}+\lambda\right]e^{-i\beta}$ , 则有  $\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}=\frac{z_1[\varphi(z_1)e^{i\beta}-\lambda]}{1-\lambda}$ , 得

$$\frac{f(z_1)f''(z_1)}{[f'(z_1)]^2}=\frac{1-\varphi(z_1)e^{i\beta}-z_1\varphi'(z_1)e^{i\beta}}{1-\lambda}.\tag{8}$$

将式(8)代入式(7),得

$$\begin{aligned}(1-\lambda)e^{-i\beta}\bar{\mathbf{z}}^T(DF(\mathbf{z}))^{-1}F(\mathbf{z})+\lambda e^{-i\beta}\|\mathbf{z}\|^2=\varphi(z_1)|z_1|^2+\\ \left[e^{-i\beta}-\frac{e^{-i\beta}-\varphi(z_1)-z_1\varphi'(z_1)}{k}\right](1-|z_1|^2)+\\ (1-\lambda)\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\Bigg[\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-k\bar{z}_1\Bigg]e^{-i\beta}=\\ \frac{1+(k-1)|z_1|^2}{k}\varphi(z_1)+\frac{1-|z_1|^2}{k}z_1\varphi'(z_1)+\frac{k-1}{k}e^{-i\beta}(1-|z_1|^2)+\\ (1-\lambda)\frac{k-1}{k}P_k(\mathbf{z}_0)\Bigg[\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-k\bar{z}_1\Bigg]e^{-i\beta},\end{aligned}\tag{9}$$

从而有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}((1-\lambda)e^{-i\beta}\bar{\mathbf{z}}^T(DF(\mathbf{z}))^{-1}F(\mathbf{z}))+\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\beta}\|\mathbf{z}\|^2)\geqslant\\ \frac{1+(k-1)|z_1|^2}{k}\operatorname{Re}(\varphi(z_1))-\frac{1-|z_1|^2}{k}|z_1||\varphi'(z_1)|+\frac{k-1}{k}(1-|z_1|^2)\cos\beta-\\ |1-\lambda|\frac{k-1}{k}|P_k(\mathbf{z}_0)|\left|\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2)-k\bar{z}_1\right|.\end{aligned}\tag{10}$$

因为  $f(z_1)$  是  $U$  上的正规化双全纯  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星函数, 所以  $\operatorname{Re}(\varphi(z_1))\geqslant 0$ . 由引理 2, 可得

$$|\varphi'(z_1)|\leqslant\frac{2\operatorname{Re}(\varphi(z_1))}{1-|z_1|^2},$$

从而有

$$\frac{1+(k-1)|z_1|^2}{k}\operatorname{Re}(\varphi(z_1))-\frac{1-|z_1|^2}{k}|z_1||\varphi'(z_1)|\geqslant\frac{(|z_1|-1)^2}{k}\operatorname{Re}(\varphi(z_1))\geqslant 0.\tag{11}$$

再由  $\|P_k\| \leq \frac{\cos \beta}{|1-\lambda|(k+2)}$  及引理 3, 得

$$\begin{aligned} & \frac{k-1}{k}(1-|z_1|^2)\cos\beta - |1-\lambda|\frac{k-1}{k}|P_k(z_0)| \left| \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1-|z_1|^2) - k\bar{z}_1 \right| \geq \\ & \frac{k-1}{k}(1-|z_1|^2)\cos\beta - |1-\lambda|\frac{(k-1)(k+2)}{k}\|P_k\|(1-|z_1|^2)^{\frac{k}{2}} \geq \\ & \frac{k-1}{k}(1-|z_1|^2)\cos\beta - \frac{k-1}{k}(1-|z_1|^2)\cos\beta = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

结合式(10)~(12), 得  $\operatorname{Re}((1-\lambda)e^{-i\vartheta}\bar{z}^T(DF(z))^{-1}F(z)) + \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\vartheta})\|z\|^2 \geq 0$ , 故  $F(z)$  是单位球  $B^n$  上的  $\beta$  型复数阶  $\lambda$  次殆星映射.

特殊地, 当  $\beta=0$  时, 得到下面推论 1.

**推论 1** 设常数  $\lambda \in \mathbf{C}$  且  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ ,  $f$  是单位圆盘  $U$  上的正规化双全纯复数阶  $\lambda$  次殆星函数,  $P_k: \mathbf{C}^{n-1} \rightarrow \mathbf{C}$  是  $k(k \geq 2)$  次齐次多项式且  $\|P_k\| \leq \frac{1}{|1-\lambda|(k+2)}$ , 则  $F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0)f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}z_0)^T$  是单位球  $B^n$  上的复数阶  $\lambda$  次殆星映射, 其中, 幂函数取使  $[f'(0)]^{\frac{1}{k}} = 1$  的单值分支.

当  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) 时, 定理 1 就是文献[8]中的定理 3.1; 当  $\beta=0$  且  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) 时, 定理 1 就是文献[7]中的定理 3.1.

## 4 保持 Bloch 性质的改进的 Roper-Suffridge 算子

**定理 2** 设  $f$  是单位圆盘  $U$  上的正规化局部双全纯 Bloch 函数,  $P_k: \mathbf{C}^{n-1} \rightarrow \mathbf{C}$  是  $k(k \geq 2)$  次齐次多项式, 则  $F(z) = (f(z_1) + P_k(z_0)f'(z_1), [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}z_0)^T$  是单位球  $B^n$  上的 Bloch 映射, 其中, 幂函数取使  $[f'(0)]^{\frac{1}{k}} = 1$  的单值分支.

证明: 因为  $f$  是单位圆盘  $U$  上的正规化局部双全纯函数, 由式(6), 可得

$$DF(z)\zeta = \begin{pmatrix} [f'(z_1) + P_k(z_0)f''(z_1)]\zeta_1 + f'(z_1)\nabla P_k(z_0)\zeta_0^T \\ \frac{1}{k} \frac{[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}f''(z_1)}{f'(z_1)}\zeta_1 z_0 + [f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}\zeta_0 \end{pmatrix}.$$

上式中:  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_0)^T \in \partial B^n$ ,  $\zeta_1 \in \bar{U}$ ,  $\zeta_0 = (\zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ . 所以

$$\begin{aligned} (1 - \|z\|^2) \|DF(z)\| & \leq (1 - |z_1|^2) |f'(z_1)| \left( 1 + \left| P_k(z_0) \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \right| + |\nabla P_k(z_0)\zeta_0^T| \right) + \\ & \frac{1}{k} (1 - |z_1|^2) \left| \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \right| |[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}| \|z_0\| + (1 - |z_1|^2) |[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}|. \end{aligned} \quad (13)$$

因为  $f$  是  $U$  上的 Bloch 函数, 由定义 3 可知, 必存在一个常数  $M \geq 1$ , 使得

$$(1 - |z_1|^2) |f'(z_1)| \leq M, \quad z_1 \in U. \quad (14)$$

从而有

$$|[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}| \leq \frac{M^{\frac{1}{k}}}{(1 - |z_1|^2)^{\frac{1}{k}}}, \quad z_1 \in U. \quad (15)$$

因此, 当  $k \geq 2$  时, 有

$$(1 - |z_1|^2) |[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}| \leq M^{\frac{1}{k}} (1 - |z_1|^2)^{1 - \frac{1}{k}} \leq M^{\frac{1}{k}}. \quad (16)$$

由引理 3, 对任意  $z_1 \in U$ , 有

$$\left| (1 - |z_1|^2) \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} - \nu \bar{z}_1 \right| \leq \nu + 2, \quad \nu \geq 2.$$

从而有

$$(1 - |z_1|^2) \left| \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \right| \leq 2(\nu + 1), \quad \nu \geq 2. \quad (17)$$

再由式(15),(17),得

$$\frac{1}{k}(1-|z_1|^2)\left|\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right|\left|[f'(z_1)]^{\frac{1}{k}}\right|\|z_0\|\leqslant\frac{2(\nu+1)M^{\frac{1}{k}}}{k}.$$

因为

$$\left|P_k(z_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right|\leqslant\|P_k\|(1-|z_1|^2)\left|\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right|\leqslant 2(\nu+1)\|P_k\|,$$

又由于  $P_k$  是  $k$  次齐次多项式,可得  $P_k(z_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}$  在  $B^n$  上有界,且  $\nabla P_k(z_0)\zeta_0^T$  在  $C^{n-1}$  上有界,结合式(13)~(19)得,  $(1-\|z\|^2)\|DF(z)\|$  在  $B^n$  上有界,从而  $F(z)$  是单位球  $B^n$  上的 Bloch 映射.

当  $P_k\equiv 0$  时,定理 2 就是文献[2]中的定理 2.6.

参考文献:

[1] ROPER K A,SUFFRIDGE T J. Convex mappings on the unit ball of  $C^n$ [J]. J Anal Math,1995,65(1):333-347. DOI:10.1007/BF02788776.

[2] GRAHAM I,KOHR G. Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator[J]. J Anal Math,2000,81(1):331-342. DOI:10.1007/BF02788995.

[3] LIU Xiaosong. The generalized Roper-Suffridge extension operator for some biholomorphic mappings [J]. J Math Anal Appl,2006,324(1):604-614. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.12.037.

[4] FENG Shuxia,LIU Taishun. The generalized Roper-Suffridge extension operator[J]. Acta Math Sci,2008,28B(1):63-80. DOI:10.1016/S0252-9602(08)60007-7.

[5] LIU Taishun,XU Qinghua. Loewner chains associated with the generalized Roper-Suffridge extension operator[J]. J Math Anal Appl,2006,322(1):107-120. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.08.055.

[6] MUIR J R. A modification of the Roper-Suffridge extension operator[J]. Comput Methods Funct Theory,2005,5(1):237-251. DOI:10.1007/BF03321096.

[7] 王建飞,刘太顺. 全纯映射子族上改进的 Roper-Suffridge 算子[J]. 数学年刊,2010,31A(4):487-496.

[8] FENG Shuxia,YU Lin. Modified Roper-Suffridge operator for some holomorphic mappings[J]. Front Math China,2011,6(3):411-426. DOI:10.1007/s11464-011-0116-y.

[9] 冯淑霞,刘太顺,任广斌. 复 Banach 空间单位球上几类映射的增长掩盖定理[J]. 数学年刊,2007,28A(2):215-230.

[10] 刘名生,朱玉灿. 有界完全 Reinhardt 域上推广的 Roper-Suffridge 算子[J]. 中国科学(A 辑:数学),2007,37(10):1193-1206. DOI:10.3321/j.issn:1006-9232.2007.10.006.

[11] WANG Jianfei,LIU Taishun. The Roper-Suffridge extension operator and its applications to convex mappings in  $C^2$  [J]. Trans Amer Math Soc,2018,370(11):7743-7759. DOI:10.1090/tran/7221.

[12] 王洁,林珍连,王建飞.  $B^2$  上  $\alpha$  次殆星映射的一类有界构造[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2020,41(1):126-129. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201904046.

[13] ZHANG Xiaofei. Almost spirallike mappings of type  $\beta$  and complex order  $\lambda$  on the unit ball[J]. Complex Var Elliptic Equ,2019,64(2):243-255. DOI:10.1080/17476933.2018.1427081.

[14] GRAHAM I,KOHR G. Geometric function theory in one and higher dimensions[M]. New York:Marcel Dekker Inc,2003. DOI:10.1201/9780203911624.

[15] HAMADA H. Bloch-type spaces and extended Cesàro operators in the unit ball of a complex Banach space[J]. Sci China Math,2019,62(4):617-628.

[16] MUIR J R. A class of Loewner chain preserving extension operators[J]. J Math Anal Appl,2008,337(2):862-879. DOI:10.1016/j.jmaa.2007.03.019.

[17] FENG Shuxia,LU Keping. The growth theorem for almost starlike mappings of order  $\alpha$  on bounded starlike circular domains[J]. Chinese Quart J Math,2000,15(2):50-56.

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 黄心中)