

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202002020



采用局部粗糙集模型的决策规则提取

张晓萍¹, 李伟康¹, 李进金^{1,2}

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;
2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要: 研究基于局部粗糙集模型下的决策规则提取. 对经典粗糙集的决策规则提取进行改进, 给出局部粗糙集模型下的决策规则公式, 并研究相关性质. 结合局部粗糙集模型给出的规则提取公式, 引入参数值 $\alpha, \alpha \in (0, 1]$, 使规则提取公式的泛化能力更强, 适用性更广. 通过 3 个实例对局部粗糙集模型决策规则提取的运用进行说明.

关键词: 局部粗糙集; 决策规则; 经典粗糙集; 包容度

中图分类号: TP 18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2020)06-0824-05

Decision Rule Extraction Using Local Rough Set Model

ZHANG Xiaoping¹, LI Weikang¹, LI Jinjin^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: We mainly study the decision rule extraction based on local rough set model. Make improvement on the rule extraction based on classical rough set, we give the decision rule formula based on the local rough set model, and find its related theorems. Parameter value $\alpha, \alpha \in (0, 1]$ is introduced into the rule extraction formula based on local rough, which makes the generalization ability and applicability of the rule extraction formula stronger. Three examples are given to illustrate the application of decision rule extraction in local rough set model.

Keywords: local rough set; decision rule; classical rough set; include degree

经典粗糙集理论由波兰学者 Pawlak^[1]首次提出, 该理论可处理不确定、不精确、不一致的不完全数据信息. 虽然经典粗糙集理论不需要数据的先验信息, 但仍具有一定的局限性^[2-3]; 需建立在等价关系基础上、在大数据背景下计算效率低、属性约简的过拟合.

为满足数据处理的要求, 许多学者对经典粗糙集理论进行一系列推广, 如一般关系下的粗糙集、变精度粗糙集^[4-5]、局部粗糙集^[3]、决策理论粗糙集^[6]等, 变精度粗糙集是在经典粗糙集的基础上, 引入参数 $\beta (0 \leq \beta < 0.5)$, 即允许一定的错误分类率发生^[7-8]. 当 $\beta = 0$ 时, 经典粗糙集就是变精度粗糙集的特例. 局部粗糙集理论可以更好地应用于大数据处理, 在计算上、下近似时, 无需考虑论域中的所有对象, 只需考虑样本中的对象, 提高了数据处理的效率. 文献^[6]引入决策风险, 作出的决策规则需使决策风险最小. 目前, 粗糙集理论及其推广已广泛地应用于模式识别^[9-10]、知识发现^[9, 11-12]、规则提取^[9, 13]和决策管理等领域.

收稿日期: 2020-02-20
通信作者: 李进金(1960-), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事拓扑学和不确定性理论的研究. E-mail: jinjinli@mnnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11871259, 61379021, 11701258)

概念逼近与属性约简是研究粗糙集的两个关键因素^[3], 对给出的新样本做有效的概念逼近可以更加客观地观察新样本, 通过属性约简、对象与属性值之间的关系, 可以对决策信息系统进行有效的决策规则提取. 决策规则提取往往出现在决策信息系统数据的处理中. 利用粗糙集理论进行决策规则提取时, 一般会有两类决策规则: 确定性和可能性决策规则^[14-16]. 基于此, 文中对基于局部粗糙集模型下的决策规则提取进行研究.

1 基础知识

假设 U 是一非空有限集合, 称为论域, $R \subseteq U \times U$ 是 U 上一等价关系, 则 $K = (U, R)$ 称为近似空间. $x \in U$ 的等价类记为 $[x]_R$, 若 $[x]_R = [y]_R$, 则称对象 x 与 y 在等价关系 R 上是不可区分的.

定义 1^[3] 给出一个近似空间 $K = (U, R)$ 及 U 的任意非空子集 X , X 的下近似和上近似分别为

$$\underline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \subseteq X, x \in U\} = \bigcup \{[x]_R \mid [x]_R \subseteq X, x \in U\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset, x \in U\} = \bigcup \{[x]_R \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset, x \in U\},$$

则 $\langle \underline{R}(X), \overline{R}(X) \rangle$ 称为 X 是关于等价关系 R 的粗糙集.

2 局部粗糙集

在数据处理过程中, 为了计算给定的每个样本 X 的上、下近似, 需要考虑给定数据集的所有对象, 在大数据背景下, 要花费较多的时间和精力. 因此, 为了提高数据处理的效率, 文献[3]结合经典粗糙集和决策理论粗糙集提出局部粗糙集.

定义 2^[3] 任取 $X, Y, Z \subseteq U$, 如果函数 $D: 2^U \times 2^U \rightarrow [0, 1]$ 满足: 1) 若 $X \subseteq Y$, 则 $D(Y \mid X) = 1$; 2) 若 $X \subseteq Y \subseteq Z$, 则 $D(X \mid Z) \leq D(X \mid Y)$, 称 $D(Y \mid X)$ 为 Y 包含 X 的程度. 不失一般性, $D(Y \mid X) = \frac{|X \cap Y|}{|X|}$.

定义 3^[3] 设 (U, R) 为一近似空间, $R \subseteq U \times U$ 为 U 上一二元关系, D 是定义 $2^U \times 2^U$ 上的包容度函数, 则 U 上的任一非空子集 X 的 α -下近似和 β -上近似分别为

$$\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X) = \{x \mid D(X \mid [x]_R) \geq \alpha, x \in X\},$$

$$\overline{R}_{(\text{LRS}, \beta)}(X) = \{x \mid D(X \mid [x]_R) > \beta, x \in U\} = \bigcup \{[x]_R \mid D(X \mid [x]_R) > \beta, x \in X\},$$

则称 $\langle \underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X), \overline{R}_{(\text{LRS}, \beta)}(X) \rangle$ 为 X 是基于二元关系 R 下的局部粗糙集, 其中, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$.

称 $\text{BN}_R(X) = \overline{R}_{(\text{LRS}, \beta)}(X) - \underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X)$ 为 X 的局部边界区域. 当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时, 局部粗糙集模型即经典粗糙集模型, 有

$$\underline{R}_{(\text{LRS}, 1)}(X) = \{x \mid D(X \mid [x]_R) \geq 1, x \in X\} = \{x \mid [x]_R \subseteq X, x \in U\} = \underline{R}(X),$$

$$\overline{R}_{(\text{LRS}, 0)}(X) = \bigcup \{[x]_R \mid D(X \mid [x]_R) > 0, x \in X\} = \{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset, x \in U\} = \overline{R}(X).$$

如果 $\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X)$ 的确定集和不确定集分别记为 $\text{CL}_R(X) = \{x \mid D(X \mid [x]_R) = 1, x \in X\}$, $\text{PL}_R(X) = \{x \mid \alpha \leq D(X \mid [x]_R) < 1, x \in X\}$, 则有

$$\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X) = \text{CL}_R(X) \cup \text{PL}_R(X),$$

$$|\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X)| = |\text{CL}_R(X)| + |\text{PL}_R(X)|.$$

例 1 某公司面试人员的基本信息表, 如表 1 所示. 表 1 中: $x_1 \sim x_7$ 分别表示 7 名应聘者. 假设 $\alpha = 0.6, \beta = 0.4, X = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7\}, R = \{\text{学位}\}$, 由计算可得 $[x_1]_R = \{x_1, x_5, x_6\} = [x_5]_R = [x_6]_R$, $[x_2]_R = \{x_2, x_3\} = [x_3]_R, [x_4]_R = \{x_4, x_7\} = [x_7]_R$, 则在局部粗糙集的基础上, 有 $\underline{R}_{(\text{LRS}, 0.6)}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}, \overline{R}_{(\text{LRS}, 0.4)}(X) = U$. 但在经典粗糙集基础上, 有 $\underline{R}(X) = \{x_2, x_3\}, \overline{R}(X) = U$. 由此可知, 局部粗糙集对 X 的近似更逼近.

由例 1 可知:在局部粗糙集与经典粗糙集中,给出论域的任一子集,调整参数值可使子集的上、下近似更加接近该子集,即应用局部粗糙集理论可以对集合做更有效的概念逼近,数据处理更加精确.

3 局部粗糙集模型中的决策规则提取

3.1 规则提取^[14]

用 \wedge 与 \vee 分别表示逻辑连接词“和”与“或”. 在决策信息系统 $S=(U,C\cup\{d\})$ 中, C 为条件属性, d 为决策属性. 任何属性值对 (a,v) 称为 A 原子, $a\in A\subseteq C, v\in V_a, V_a$ 为

对象在属性 a 下的取值. 任何 A 原子或者不同的 A 原子的 \wedge 称为 A 描述. 若 t 是 A 描述, 则出现在 t 中的属性记为 $A(t), A(t)=\{a|(a,v)\in t\}$, 具有描述 t 的对象集称为 t 的支持, 用 $\|t\|$ 表示, $\|t\|=\{x\in U|a(x)=v, \forall (a,v)\in t\}$, 则易得 $\|t\cap s\|=\|t\|\cap\|s\|, \|t\cup s\|=\|t\|\cup\|s\|$.

对于 $A\subseteq C$, 记 $DES(A)=\{t|t \text{ 是一个 } A \text{ 描述且 } \|t\|\neq\emptyset\}$, 若对任何的 $t\in DES(A)$, 有 $A(t)=A$, 则称 t 是一个满的 A 描述, 记 $FDES(A)=\{t|t\in DES(A) \text{ 且 } A(t)=A\}$.

例 2 继例 1, 取 $A=\{\text{学位, 性别}\}, t_1=(\text{学位, 本科}),$ 则 $\|t\|=\{x_1, x_5, x_6\},$ 此时, $A(t)=\{\text{学位}\}, A(t)\neq A,$ 故 t_1 不是满的 A 描述; 取 $t_2=(\text{学位, 本科})\wedge(\text{性别, 男}),$ 则 $\|t_2\|=\{x_1, x_6\},$ 此时, $A(t_2)=\{\text{学位, 性别}\}, A(t_2)=A,$ 则 t_2 是一个满的 A 描述.

以下讨论都建立在 t 是一个满的 A 描述的基础上, 即 $t\in FDES(A)$.

对于任意非空 $X\subseteq U$ 及 $A\subseteq C$, 基于经典粗糙集理论, 有 $R_A(X)=\{\|t\||\|t\|\subseteq X\}, \bar{R}_A(X)=\{\|t\||\|t\|\cap X\neq\emptyset\},$ 对于 A 描述 $t, \partial(t)=\{d(x)|x\in\|t\|\}$ 称为 t 在决策信息系统 S 中的广义决策. 任意取 $w\in\partial(t),$ 则 (d,w) 称为 t 的广义决策描述.

在决策信息系统 $S=(U,C\cup\{d\})$ 中, 令 $t=\wedge(a,v), a\in A\subseteq C, v\in V_a, s=(d,w), w\in V_d,$ 则有决策规则: $t\rightarrow s,$ 其中, t, s 分别为决策规则的条件部分和决策部分. 规则的确定性因子为 $Cer(t\rightarrow s)=\frac{|\|t\|\cap\|s\||}{|\|t\||},$ 当 $Cer(t\rightarrow s)=1$ 时, 称决策规则是确定性规则; 当 $0\leq Cer(t\rightarrow s)<1$ 时, 称决策规则是可能性规则, 即不确定规则.

3.2 局部粗糙集的决策规则提取

在每个决策信息系统 $S=(U,C\cup\{d\})$ 中都可以产生决策规则, 合理的决策规则对新样本的决策具有重要的参考作用, 这不仅要求数据具有真实性和有效性, 也要求在分析数据时提取合理的决策规则.

定理 1 对于决策信息系统 $S=(U,C\cup\{d\}), s=(d,w), w\in V_d, t\in FDES(C),$ 且 $0\leq\beta<\alpha\leq 1,$ 则
1) $D(\|s\||\|t\|)\geq\alpha,$ 当且仅当 $|\{x\in U|d(x)=w\in\partial(t), \forall a\in C, (a,a(x))\in t\}|\geq\alpha|\|t\||;$
2) $D(\|s\||\|t\|)>\beta,$ 当且仅当 $|\{x\in U|d(x)=w\in\partial(t), \forall a\in C, (a,a(x))\in t\}|>\beta|\|t\||.$

证明: 1) “ \Rightarrow ”必要性. $D(\|s\||\|t\|)\geq\alpha,$ 则有 $\frac{|\|t\|\cap\|s\||}{|\|t\||}\geq\alpha\neq 0,$ 故 $\|t\|\cap\|s\|\neq\emptyset,$ 即存在 $x\in\|t\|\cap\|s\|,$ 使 $d(x)=w,$ 故 $w\in\partial(t)=\{d(x)|x\in\|t\|\}.$

又因为 $\frac{|\|t\|\cap\|s\||}{|\|t\||}=\frac{|\{x|a(x)=v, \forall (a,v)\in t\}\cap\{x|d(x)=w, w\in V_d\}|}{|\|t\||}\geq\alpha,$ 有
 $|\{x\in U|d(x)=w\in\partial(t), \forall a\in C, (a,a(x))\in t\}|\geq\alpha|\|t\||.$

“ \Leftarrow ”充分性. $w\in\partial(t)=\{d(x)|x\in\|t\|\},$ 则 $\|t\|\cap\|s\|\neq\emptyset,$ 即 $D(\|s\||\|t\|)>0.$ 又因为
 $|\{x\in U|d(x)=w\in\partial(t), \forall a\in C, (a,a(x))\in t\}|\geq\alpha|\|t\||,$

即 $\frac{|\{x|d(x)=w, x\in\|t\|\}|}{|\|t\||}\geq\alpha, D(\|s\||\|t\|)\geq\alpha.$

2) 当 $0<\beta$ 时, 证明同 1).

当 $\beta=0$ 时, $D(\|s\||\|t\|)>0,$ 当且仅当 $|\{x\in U|d(x)=w\in\partial(t), \forall a\in C, (a,a(x))\in t\}|>0.$

表 1 某公司面试人员的基本信息表

Tab.1 Basic information table of interviewers of company

U	学位	性别	工作或实习次数	是否录用
x_1	本科	男	2	否
x_2	硕士	女	3	是
x_3	硕士	男	1	否
x_4	博士	男	2	是
x_5	本科	女	1	否
x_6	本科	男	3	是
x_7	博士	女	2	是

“ \Rightarrow ”必要性. 当 $D(\|s\| \mid \|t\|) > 0$ 时, $\|t\| \cap \|s\| \neq \emptyset$, 存在 $x \in \|t\| \cap \|s\|$, 使 $d(x) = w$, 故 $w \in \partial(t) = \{d(x) \mid x \in \|t\|\}$. 同时, 有 $\{x \in U \mid d(x) = w \in \partial(t), \forall a \in C, (a, a(x)) \in t\} \neq \emptyset$.

“ \Leftarrow ”充分性显然可见.

证毕.

定理 2 决策信息系统 $S = (U, C \cup \{d\})$ 中, $s = (d, w), w \in V_d, t \in \text{FDES}(C)$, 且 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 则

- 1) $\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(\|s\|) = \bigcup \{ \|t\| \mid |\{x \in U \mid d(x) = w \in \partial(t), \forall a \in C, (a, a(x)) \in t\}| \geq \alpha \|t\| \}$;
- 2) $\overline{R}_{(\text{LRS}, \beta)}(\|s\|) = \bigcup \{ \|t\| \mid |\{x \in U \mid d(x) = w \in \partial(t), \forall a \in C, (a, a(x)) \in t\}| > \beta \|t\| \}$.

证明: 由定理 1 即可证明.

对于 $X \subseteq U, A \subseteq C$, 基于局部粗糙集模型, 推广可得

$$\underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(X) = \bigcup \{ \|t\| \mid D(X \mid \|t\|) \geq \alpha \}, \quad \overline{R}_{(\text{LRS}, \beta)}(X) = \bigcup \{ \|t\| \mid D(X \mid \|t\|) > \beta \},$$

且有决策规则: $t \rightarrow s$, 其中, t, s 分别为规则的条件部分和决策部分. 规则的确定性因子为 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = \frac{|\|t\| \cap \|s\||}{|\|t\||} \geq \alpha$, 当 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = \alpha, \alpha \in (0, 1]$ 时, 记 $t \xrightarrow{\alpha} s$.

命题 1 在决策信息系统 $S = (U, C \cup \{d\})$ 中, 由于 $s = (d, w), w \in V_d, t \in \text{FDES}(C)$, 则称决策规则 $t \xrightarrow{\alpha} s$, 有 1) 在 S 中是 α -确定的, 当且仅当 $\|t\| \subseteq \underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}(\|s\|)$, 当且仅当 $t \in \underline{R}_{(\text{LRS}, \alpha)}((d, w))$, 当且仅当 $w \in \partial(t)$, 当且仅当 $\text{Cer}(t \rightarrow s) \geq \alpha$; 2) 在 S 中是 α -可能性的, 当且仅当 $\|t\| \subseteq \text{BN}_{(\text{LRS}, \alpha)}(\|s\|)$, 当且仅当 $t \in \text{BNDES}_{(\text{LRS}, \alpha)}((d, w))$, 当且仅当 $w \in \partial(t)$ 且 $|\partial(t)| \geq 2$, 当且仅当 $0 < \text{Cer}(t \rightarrow s) < \alpha$.

例 3 某同学去旅游前打算预定房子, 他查看了 10 间房子, 依次标记为 $x_1 \sim x_{10}$, 并且将价格、环境、结构作为评价指标, 即属性集 $C = \{\text{价格}, \text{环境}, \text{结构}\}$. 该同学将此次浏览的信息制成表格, 并给出“是否预定”的初步决策, 如表 2 所示.

表 2 某同学浏览的房子的基本信息表
Tab. 2 Basic information table of house browsed by student

U	评价			是否预定
	价格	环境	结构	
x_1	中	优	优	否
x_2	低	优	良	是
x_3	高	良	良	否
x_4	过高	优	优	是
x_5	中	良	优	否
x_6	高	良	优	是
x_7	低	良	优	是
x_8	中	优	良	否
x_9	低	良	良	是
x_{10}	中	良	差	否

取 $\alpha = 0.6, s = (\text{是否预定}, \text{是})$, 则 $\|s\| = \{x_2, x_4, x_6, x_7, x_9\}$, 能够做 α -确定的决策情况如下.

1) 考虑 $A = C = \{\text{价格}, \text{环境}, \text{结构}\}$, 有 $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{环境}, \text{优}) \wedge (\text{结构}, \text{良})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{过高}) \wedge (\text{环境}, \text{优}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{高}) \wedge (\text{环境}, \text{良}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{环境}, \text{良}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{环境}, \text{良}) \wedge (\text{结构}, \text{良})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$.

2) 考虑 $A \subseteq C = \{\text{价格}, \text{环境}\}$ 或者 $\{\text{环境}, \text{结构}\}$ 或者 $\{\text{价格}, \text{结构}\}$, 那么, 有 $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{环境}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{过高}) \wedge (\text{环境}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{环境}, \text{良})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{环境}, \text{良}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 0.67$; $t = (\text{价格}, \text{过高}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{结构}, \text{良})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{高}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{低}) \wedge (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$.

3) 考虑 $A \subseteq C = \{\text{价格}\}$ 或者 $\{\text{环境}\}$ 或者 $\{\text{结构}\}$, 那么, 有 $t = (\text{价格}, \text{低})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{价格}, \text{过高})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$; $t = (\text{结构}, \text{优})$, 决策 $t \rightarrow s$ 的确定性因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 0.6$.

4 结束语

在经典粗糙集模型的决策规则提取中, 确定因子 $\text{Cer}(t \rightarrow s) = 1$ 的规则称为确定性规则, 结合局部

粗糙集模型给出的规则提取公式,引入参数值 $\alpha, \alpha \in (0, 1]$, 使规则提取公式的泛化能力更强,适用性更广. 当 $\alpha=1$ 时,即普通的决策规则提取情况. 在今后的工作中,将进一步比较局部粗糙集模型与其他粗糙集模型的决策规则,以及多个粗糙集模型的结合决策规则提取.

参考文献:

- [1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356. DOI:10.1007/BF01001956.
- [2] QIAN Yuhua, LIANG Xinyan, LIN Guoping, *et al.* Local multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 82: 119-137. DOI:10.1016/j.ijar.2016.12.008.
- [3] QIAN Yuhua, LIANG Xinyan, WANG Qi, *et al.* Local rough set: A solution to rough data analysis in big data[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 97: 38-63. DOI:10.1016/j.ijar.2018.01.008.
- [4] 张佳欢, 李磊军, 李美争, 等. 基于变精度邻域粗糙集的多标记子空间研究[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2019, 43(4): 414-422. DOI:10.14177/j.cnki.32-1397n.2019.43.04.006.
- [5] 郑文彬, 李进金, 何秋红. 基于属性重要度的变精度邻域粗糙集属性约简算法[J]. 计算机科学, 2019, 46(12): 261-265. DOI:10.11896/jsjx.181102184.
- [6] 刘丹, 徐立新, 李敬伟. 不完备邻域多粒度决策理论粗糙集与三支决策[J]. 计算机应用与软件, 2019, 36(5): 145-157. DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2019.05.026.
- [7] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59. DOI:10.1016/0022-0000(93)90048-2.
- [8] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] 陈应生, 李进金. 决策信息系统协调性的关系矩阵表示[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(6): 823-829. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201810106.
- [10] SHE Yanhong, HE Xiaoli. On the structure of the multigranulation rough set model[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 36(1): 81-92. DOI:10.1016/j.knosys.2012.05.019.
- [11] XU Jianfeng, MIAO Duoqian, ZHANG Yuanjian, *et al.* A three-way decisions model with probabilistic rough sets for stream computing[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 88: 1-22. DOI:10.1016/j.ijar.2017.05.001.
- [12] LIU Dun, LI Tianrui, LIANG Decui. Incorporating logistic regression to decision-theoretic rough sets for classifications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55: 197-210. DOI:10.1016/j.ijar.2013.02.013.
- [13] LI Jinhai, MEI Changlin, LYU Yuejin. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54: 149-165. DOI:10.1016/j.ijar.2012.07.005.
- [14] WU Weizhi, QIAN Yuhua, LI Tongjun, *et al.* On rule acquisition in incomplete multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2017, 378(1): 282-302. DOI:10.1016/j.ins.2016.03.041.
- [15] WU Weizhi, LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54: 1107-1129. DOI:10.1016/j.ijar.2013.03.017.
- [16] WU Weizhi, LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897. DOI:10.1016/j.ins.2011.04.047.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)