

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202001001



二维 Allen-Cahn 方程的有限 差分法/配点法求解

邓杨芳, 姚泽丰, 汪精英, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 对二维 Allen-Cahn 方程中的时间方向采用有限差分法, 空间方向采用重心插值配点法, 非线性项采用牛顿迭代法, 导出离散的线性代数方程组. 最后, 通过数值算例验证配点法格式的精度及能量递减规律.

关键词: Allen-Cahn 方程; 有限差分法; 重心插值配点法; Newton 迭代格式; 能量递减

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2020)05-0690-05

Two Dimensional Allen-Cahn Equation Solved By Finite Difference Method/Collocation Method

DENG Yangfang, YAO Zefeng, WANG Jingying, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Finite difference method is used in time and barycentric interpolation collocation method is used in space for the solution of two dimensional Allen-Cahn equation. The nonlinear term is discretized by Newton iteration method, the concerned equation derives discrete linear algebraic equations. Finally, numerical examples are given to verify the accuracy and the law of energy decline of the collocation scheme.

Keywords: Allen-Cahn equation; finite difference method; barycentric interpolation collocation method; Newton iterative scheme; energy decline

Allen-Cahn 方程是一种非齐次半线性泊松方程, 应用范围相当广泛, 例如, 晶体生长^[1]、图像分析^[2]、平均曲率-流量^[3]、生物种群的竞争、河床的迁移过程^[4]、排斥现象^[5]等许多扩散现象的研究.

Allen-Cahn 方程有很多的数值解法, 如有限差分法^[6-7]、有限元法^[8-10]、谱方法^[11]. Chen 等^[6]给出求解 Allen-Cahn 方程差分格式的收敛性的分析. Zhai 等^[7]利用高阶紧致 ADI 差分格式求解三维 Allen-Cahn 方程. Feng 等^[8]提出对称内罚间断有限元格式求解带有平均曲率流 Allen-Cahn 方程. Li 等^[9]利用无条件能量稳定的二阶有限元方法求解 Allen-Cahn 方程. 吴龙渊等^[10]利用交替方向方法求解 Allen-Cahn 方程. 文献^[11-13]利用算子分裂方法结合有限差分法、谱方法、有限元法求解 Allen-Cahn 方程. 上述方法都是利用网格剖分求解微分方程问题. 李淑萍等^[14]利用重心插值配点法求解微分方程初值问题, 很多学者将该方法推广到求解各类微分方程, 如平面弹性问题^[15]和分数阶 Fredholm 积分方程^[16]等. 翁智峰等^[17]对时间方向和空间方向都采用重心插值配点法求解一维 Allen-Cahn 方程. 本文将该方法推广到求解二维 Allen-Cahn 方程, 时间方向采用有限差分法离散, 空间方向采用重心插值 Chebyshev 配点法离散.

收稿日期: 2020-01-01

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: zfwmath@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(ZQN-702)

1 一般的二维偏微分方程的离散化及推导

考虑一个矩形区域 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$, 令 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 为区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个不同的节点, $c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=d$ 为区间 $[c,d]$ 上 $m+1$ 个不同的节点, 从而区域 Ω 上张量型节点为 $\{(x_i,y_i), i=0,1,2,\cdots,n; j=0,1,2,\cdots,m\}$.

对于二维的偏微分方程, 固定 y , 考虑变量 x 的方向, 重心 Lagrange 插值公式为

$$p(x)=\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}f_j\bigg/\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j},\tag{1}$$

可以推得如下表达式, 即

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}u_j(y)\bigg/\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}.\tag{2}$$

式(2)中: $\omega_j=\frac{1}{\prod_{j\neq k}(x_j-x_k)}, j=0,1,2,\cdots,n$.

令 $\Upsilon_j(x)=\frac{\omega_j}{x-x_j}\bigg/\sum_{j=0}^n\frac{\omega_j}{x-x_j}$ (3)

为 x 方向的重心插值基函数, 则式(2)为

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^n\Upsilon_j(x)u_j(y).\tag{4}$$

同理, 固定 x , 考虑变量 y 的方向, 式(2)可为

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^m\beta_j(y)u_j(x).\tag{5}$$

式(5)中: $\beta_j(y)$ 是 y 方向的重心插值基函数.

由式(4), (5), $u(x,y)$ 在节点 $\{(x_i,y_i), i=0,1,2,\cdots,n, j=0,1,2,\cdots,m\}$ 上的重心插值为

$$u(x,y)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\Upsilon_i(x)\beta_j(y)u_{i,j},\tag{6}$$

推得 $u(x,y)$ 的 $l+k$ 阶偏导数为

$$\frac{\partial^{l+k}u}{\partial x^l\partial y^k}=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\Upsilon_i^{(l)}(x)\beta_j^{(k)}(y)u_{i,j},\quad l,k=0,1,2,\cdots.\tag{7}$$

偏导数在节点 (x_p,y_q) 处的函数值近似为

$$u^{(l,k)}(x_p,y_q)=\frac{\partial^{l+k}u(x_p,y_q)}{\partial x^l\partial y^k}=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\Upsilon_i^{(l)}(x_p)\beta_j^{(k)}(y_q)u_{i,j},$$
$$p=0,1,\cdots,n,\quad q=0,1,\cdots,m.\tag{8}$$

所以, 二维偏微分方程的重心插值配点法的格式为

$$\bigg(\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\Upsilon_i^{(2)}(x_p)\beta_j^{(0)}(y_q)+\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m\Upsilon_i^{(0)}(x_p)\beta_j^{(2)}(y_q)\bigg)u_{i,j}=f_{i,j}.\tag{9}$$

式(9)中: $f_{i,j}$ 为 $f(x,y)$ 在节点 (x_i,y_j) 处的函数值. 式(9)用微分矩阵表示为

$$(\boldsymbol{D}^{(2,0)}+\boldsymbol{D}^{(0,2)})u_{i,j}=f_{i,j}.\tag{10}$$

2 二维 Allen-Cahn 方程在重心插值配点法下的计算格式

二维 Allen-Cahn 方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\epsilon^2}u(u-1)=0,\\&u(x,y,0)=0,\\&u(0,y,t)=1,\quad u(1,y,t)=-1,\\&u(x,0,t)=1,\quad u(x,1,t)=-1.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

由于自变量有 3 个, 可以先将时间 t 离散化. 在 t 固定后, 即可利用重心插值配点法求解 xy 空间上

的数值解. 对时间向后差分,得到的变形式为

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-u_{x,x}^{n+1}-u_{y,y}^{n+1}+\frac{1}{\epsilon^2}u^{n+1}((u^{n+1})^2-1)=0.$$

(12)

对非线性项 Talor 展开后格式变形为

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-u_{x,x}^{n+1}-u_{y,y}^{n+1}+\frac{1}{\epsilon^2}[(u^n)^3-u^n+(3(u^n)^2-1)(u^{n+1}-u^n)]=0.$$

(13)

由式(13)获得重心插值配点法的计算格式为

$$\left[\frac{1}{\Delta t}-\boldsymbol{D}^{(2,0)}-\boldsymbol{D}^{(0,2)}+\frac{1}{\epsilon^2}(3(u^n)^2-1)\right]u^{n+1}=\frac{u^n}{\Delta t}-\frac{1}{\epsilon^2}[(u^n)^3-u^n+(3(u^n)^2-1)u^n].$$

(14)

3 数值算例

为便于分析,定义绝对误差 Err_a 和相对误差 Err_r 分别为

$$\text{Err}_a=\|\boldsymbol{y}_c-\boldsymbol{y}_e\|_2,\quad \text{Err}_r=\frac{\|\boldsymbol{y}_c-\boldsymbol{y}_e\|_2}{\|\boldsymbol{y}_e\|_2}.$$

(15)

式(15)中: $\boldsymbol{y}_c, \boldsymbol{y}_e$ 分别为数值解和解析解的列向量; $\|\cdot\|_2$ 为向量的二范数.

3.1 算例 1

为了验证算法的精度,只对一维 Allen-Cahn 方程验证算法的收敛阶. 一维 Allen-Cahn 方程为

$$\left. \begin{aligned} u_t+\frac{1}{\epsilon^2}u(u^2-1)-\Delta u&=0, & x\in[a,b], & t\in[0,T], \\ u_0(x)&=u(x,0), & x\in[a,b], \\ u(a,t)&=1, & u(b,t)=-1, & t\in[0,T]. \end{aligned} \right\}$$

(16)

式(16)的精确解为

$$u=\frac{1}{2}\left(1-\tanh\left(\frac{x-st}{2\sqrt{2}\epsilon}\right)\right).$$

(17)

首先,对一维 Allen-Cahn 方程的时间项向后差分,转化为

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-u_{x,x}^{n+1}+\frac{1}{\epsilon^2}u^{n+1}((u^{n+1})^2-1)=0.$$

(18)

对非线性项 Talor 展开后,可变形为

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-u_{x,x}^{n+1}+\frac{1}{\epsilon^2}[(u^n)^3-u^n+(3(u^n)^2-1)(u^{n+1}-u^n)]=0.$$

(19)

依据上述的格式,可以直接得到重心插值配点法的计算格式为

$$\left[\frac{1}{\Delta t}-\boldsymbol{D}^{(2,0)}+\frac{1}{\epsilon^2}(3(u^n)^2-1)\right]u^{n+1}=\frac{u^n}{\Delta t}-\frac{1}{\epsilon^2}[(u^n)^3-u^n+(3(u^n)^2-1)u^n].$$

(20)

利用重心 Lagrange 插值配点法计算离散式(8), Δt 取不同值时, $n=20, n=30$ 的相对误差,以及时间的收敛阶,如表 1 所示. 表 1 中:时间收敛阶为 $\text{Rate}=(\log_2 e_{\Delta t_1}-\log_2 e_{\Delta t_2})/(\log_2 \Delta t_1-\log_2 \Delta t_2)$. 由表 1 可知:时间收敛阶应为 1 阶.

固定 $\Delta t=0.001, x\in[-1,1]$ 对 x 轴进行不同程度的剖分,可以得到空间方向的相对误差和绝对误差数据,计算结果,如表 2 所示. 由表 2 可知:空间方向误差具有高精度,而且当剖分的细密程度增加时,误差也会相对的变得更小.

表 1 相对误差及时间收敛阶

Tab. 1 Relative errors and orders of time convergence

Δt	$n=20$		$n=30$	
	Err _r	Rate	Err _r	Rate
1/8	0.012 3	—	0.007 6	—
1/16	0.005 9	1.059 8	0.003 3	1.226 8
1/32	0.002 9	1.024 6	0.001 5	1.139 2
1/64	0.001 2	1.273 0	0.000 7	1.100 9

表 2 空间方向误差

Tab. 2 Error in space

n	Err _a	Err _r
20	0.002 3	$1.176\ 4\times 10^{-4}$
30	$4.309\ 7\times 10^{-5}$	$1.645\ 1\times 10^{-6}$
40	$8.272\ 3\times 10^{-7}$	$2.744\ 2\times 10^{-8}$
45	$1.455\ 9\times 10^{-7}$	$4.229\ 7\times 10^{-9}$

3.2 算例 2

对时间向后差分, 在时间 t 固定的情况下, 对 xy 空间网格进行剖分. 取 $n=30, m=30$ 进行剖分后, 在 $t=1$ 时, 二维 Allen-Cahn 方程截面图像, 如图 1 所示. 图 1 中: uc 为数值解.

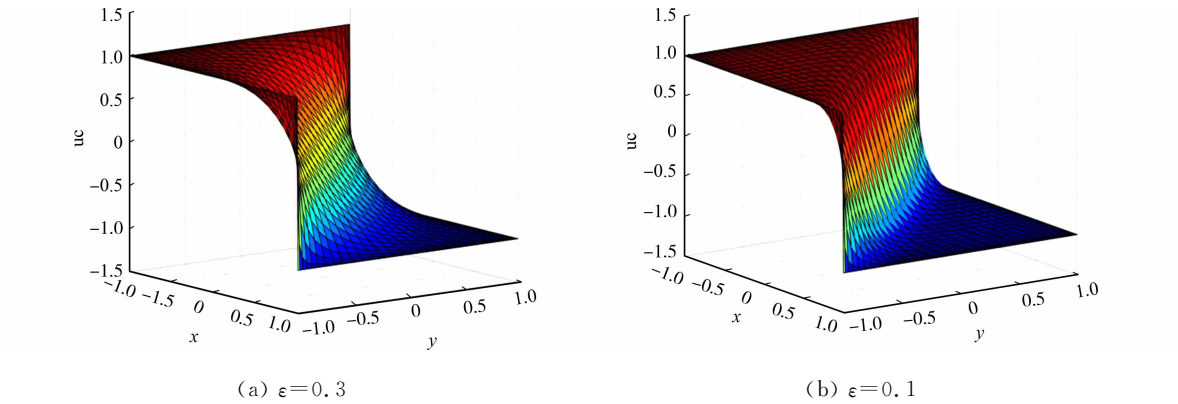


图 1 二维 Allen-Cahn 方程的截面图像

Fig. 1 Cross section image of two dimension Allen-Cahn equation

3.3 算例 3

二维 Allen-Cahn 方程的能量函数为

$$E^h(u^n) = \frac{h^2}{4\epsilon^2} \sum_{i,j=0}^N [(u_{i,j}^n)^2 - 1]^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right]^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} \right]^2. \quad (21)$$

式(21)中: $u_{i,j}^n$ 代表第 n 个时刻, 在 xy 空间上第 i 列第 j 行位置处的数值解.

由式(21), 将 xy 网格取 $n=40, m=40$ 进行剖分, 取不同的 ϵ 值, 能量递减图像, 如图 2 所示.

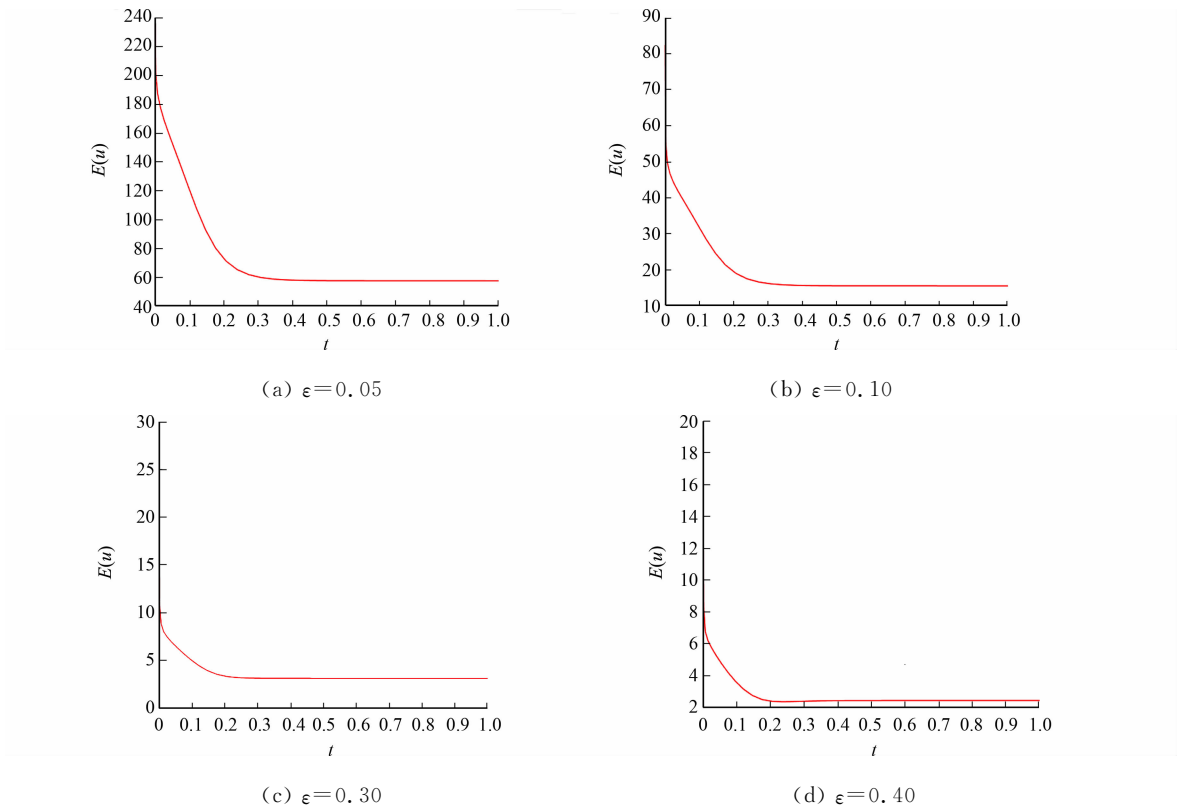


图 2 能量递减图像

Fig. 2 Energy decline image

图 2 中: E 为能量; t 为时间. 由图 2 可知: 不论 ϵ 取何值, 格式满足能量递减规律, 并且随着网格剖分细密程度的加深, 能量函数 $E(u)$ 的曲线将会变得更加光滑.

4 结 束 语

对时间方向向后差分离散,空间方向采用重心插值配点法离散求解二维 Allen-Cahn 方程,通过数值算例验证格式中时间方向一阶精度,空间方向的高精度,以及满足方程的能量递减性质.

参 考 文 献:

[1] WHEELER A A,BOETTINGER W J,GEOFFREY G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary al-loys[J]. Physical Review A,1992,45(10):7424-7439. DOI:10. 1103/PhysRevA. 45. 7424.

[2] BENEŠ M,CHALUPECKY V,MIKULA K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation[J]. Applied Numerical Mathematics,2004,51(2/3):187-205. DOI:10. 1016/j. apnum. 2004. 05. 001.

[3] FENG Xiaobing,PROHL A. Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows[J]. Numerische Mathematik,2003,94(1):33-65. DOI:10. 1007/s00211-002-0413-1.

[4] HAZEWINKEL M,KAASHOEK J F,LEYNSE B. Pattern formation for a one dimensional evolution equation based on Thom's river basin model[J]. Mathematics and Its Applications,1986,30:23-46. DOI:10. 1007/978-94-009-4718-4. 4.

[5] COHEN D S,MURRAY J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. Journal of Mathematical Biology,1981,12(2):237-249. DOI:10. 1007/bf00276132.

[6] CHEN Xinfu,ELLIOTT C,GARDINER A,*et al.* Convergence of numerical solutions to the Allen-Cahn equation [J]. Appl Anal,1998,69(1/2):47-56. DOI:10. 1080/00036819808840645.

[7] ZHAI Shuying,FENG Xinlong,HE Yinnian. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by the high-order compact ADI method[J]. Comput Phys Commun,2014,185(10):2449-2455. DOI:10. 1016/j. cpc. 2014. 05. 017.

[8] FENG Xiaobing,LI Yukun. Analysis of symmetric interior penalty discontinuous Galerkin methods for the Allen-Cahn equation and the mean curvature flow[J]. Ima Journal of Numerical Analysis,2014,35(4):1622-1651. DOI:10. 1093/imanum/dru058.

[9] LI Congying,HUANG Yunqing,YI Nianyu. An unconditionally energy stable second order finite element method for solving the Allen-Cahn equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2019,353:38-48. DOI:10. 1016/j. cam. 2018. 12. 024.

[10] 吴龙洲,汪精英,翟术英. 求解二维 Allen-Cahn 方程的两种 ADI 格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2019,40(3):412-420. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201810014.

[11] WENG Zhifeng,TANG Longkun. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals,2016,70(5):472-483. DOI:10. 1080/10407790. 2016. 1215714.

[12] DARAE J,KIM J. An explicit hybrid finite difference scheme for the Allen-Cahn equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2018,340:247-255. DOI:10. 1016/j. cam. 2018. 02. 026.

[13] HUANG Yunqing,YANG Wei,WANG Hao. Adaptive operator splitting finite element method for Allen-Cahn equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2019,35(3):1290-1300. DOI:10. 1002/num. 22350.

[14] 李淑萍,王兆清,唐炳涛. 重心插值配点法求解初值问题[J]. 山东建筑大学学报,2007,22(6):481-485. DOI:10. 3969/j. issn. 1673-7644. 2007. 06. 003.

[15] 王兆清,徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. 计算物理,2018,35(1):77-86. DOI:10. 19596/j. cnki. 1001-246x. 7585.

[16] 虎晓燕,韩惠丽. 重心插值配点法求解分数阶 Fredholm 积分方程[J]. 郑州大学学报(理学版),2017,49(1):17-23. DOI:10. 13705/j. issn. 1671-6841. 2016203.

[17] 翁智峰,姚泽丰,赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2019,40(1):133-140. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201806043.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)