

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201912035



采用 Bootstrap 抽样的靖远黄河大桥 模态参数识别不确定性量化

刘远贵¹, 徐乐¹, 赖芑宇¹, 骆勇鹏^{1,2}

(1. 福建农林大学 交通与土木工程学院, 福建 福州 350002;
2. 华侨大学 福建省结构工程与防灾重点实验室, 福建 厦门 361021)

摘要: 提出一种基于 Bootstrap 抽样的模态参数识别不确定性量化方法,从整体和局部的角度评价模态参数识别结果的可靠性. 首先,基于动力测试的加速度时程数据,采用协方差驱动随机子空间(SSI-COV)法识别不同测试组的模态参数;引入 Bootstrap 抽样方法,对多组模态参数识别结果进行 B 次重复抽样,得到 Bootstrap 样本数据,并通过其概率统计特征值衡量整体不确定性. 然后,对单个测试组中不同时间段的识别结果进行重复抽样,分析并量化单个测试组的模态参数识别的不确定性. 最后,以靖远黄河大桥试验数据为例,对靖远黄河大桥竖向单个及多个测试组下的模态参数进行不确定性量化. 结果表明:不同测试组识别的前 3 阶固有频率的均值分别为 1.553 9, 1.720 6, 2.165 2, 方差分别为 0.076 1, 0.042 9, 0.096 5;单个测试组识别的前 3 阶固有频率的均值分别为 1.526 5, 1.788 0, 2.306 0, 方差分别为 0.015 3, 0.049 6, 0.018 2;文中方法识别的固有频率值总体较为稳定.

关键词: 模态参数; 不确定性量化; Bootstrap 抽样; 协方差驱动随机子空间法; 稳定图; 靖远黄河大桥
中图分类号: TB 122; TU 317 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2020)04-0459-07

Uncertainty Quantification for Modal Parameters Identification of Jingyuan Yellow River Bridge Using Bootstrap Sampling

LIU Yuangui¹, XU Le¹, LAI Jiyu¹, LUO Yongpeng^{1,2}

(1. School of Transportation and Civil Engineering, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
2. Key Laboratory for Structural Engineering and Disaster Prevention of Fujian Province,
Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: An uncertainty quantification method for modal parameter identification based on Bootstrap sampling was proposed, and the reliability of modal parameter identification results is evaluated from the global and local perspectives. Firstly, the covariance-driven stochastic subspace identification (SSI-COV) method was adopted to identify the modal parameters of different test groups based on the acceleration time-history data of the dynamic test. Secondly, the Bootstrap sampling method was introduced to repeated B times sampling to obtain Bootstrap sample data in the result of multi-modal parameter identification. The overall uncertainty was measured by calculating probabilistic and statistical eigenvalues. Then, the results identified in different time

periods in a single test group were sampled repeatedly to analyze and quantify the uncertainty of modal parameter identification in a single test group. Finally, taking the test data of Jingyuan Yellow River Bridge as an example, the modal parameters of vertical single and multiple test groups of Jingyuan Yellow River Bridge were quantified with uncertainty. The mean values of the first three natural frequencies identified by multiple test groups were 1.553 9, 1.720 6 and 2.165 2, the variances were 0.076 1, 0.042 9 and 0.096 5. The results show that mean values of first 3 natural frequencies identified by a single test group were 1.526 5, 1.788 0, and 2.306 0, the variances were 0.015 3, 0.049 6 and 0.018 2. The natural frequency identified by this method is generally stable.

Keywords: modal parameters; uncertainty quantification; Bootstrap sampling; covariance-driven stochastic subspace identification; stability diagram; Jingyuan Yellow River Bridge

模态参数是结构的基本动力参数之一,可用于荷载识别、损伤诊断、模型修正及既有结构状态评估等方面^[1].常用的模态参数识别方法有频域法、时域法和时频分析 3 类.基于随机子空间的模态参数识别是时域模态参数识别中较为常用的方法.该方法可直接作用于时域数据,无需转化为频域数据,避免频率分辨率误差的问题^[2].由于结构动力测试受仪器精度、测量误差、噪声干扰等因素的影响,模态参数识别结果具有一定的不确定性^[3],从而影响结构荷载识别、损伤诊断及状态评估结果的精度.因此,如何有效地评估模态参数识别结果的可信程度引起学者的关注.蒲黔辉等^[4]采用特征系统实现算法,对整个模态识别算法进行摄动分析,从而确定模态参数对测量误差的灵敏度.秦世强等^[5]通过构建模态参数置信区间的方法衡量模态参数的不确定度.易伟建等^[6]采用贝叶斯方法研究模态参数的不确定性.Döhler 等^[7]提出一种有效估计模态参数协方差的算法,通过一阶摄动分析对识别结果的不确定性进行评估.Herrera 等^[8]研究模态参数在 1 年内的数据监测变化,并对识别结果进行量化.上述方法是在假设模态参数服从的概率分布函数及分布参数已知的情况下进行的评估.然而,在实际振动测试中,由于观测数据有限及激励荷载的不确定性,观测数据样本服从的概率分布往往未知,当人为假设的概率分布与实际不符时,模态参数识别结果的准确性将受到影响.

Bootstrap 是一种有返还的再抽样统计方法,可用于总体分布未知或统计量分布未知时的参数推断,在一定程度上可解决上述问题,但该方法在模态参数识别不确定性量化方面的研究还较为少见.Farrar 等^[9]采用蒙特卡罗(Monte Carlo)和 Bootstrap 抽样对模态参数置信区间的算法进行比较,通过模态参数估计算法,得到模态参数集合,从而得到其统计分布.Chauhan 等^[10-11]将 Bootstrap 抽样引入模态参数估计过程中,阐述 Bootstrap 抽样的特点及其在模态参数识别不确定性量化中的应用可行性.Yaghoubi 等^[12]联合相关分析和 Bootstrap 抽样,实现模态参数自动估计,提高参数识别的精度和自动化程度.本文采用协方差驱动随机子空间(SSI-COV)法对靖远黄河大桥的模态参数进行识别,并引入 Bootstrap 抽样,分别从整体和局部对靖远黄河大桥的模态参数识别结果的可靠性进行评价.

1 基本理论

1.1 系统状态空间模型

结构系统振动方程可描述为

$$\ddot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{q}(t)+\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{u}(t).$$
 (1)

式(1)中: $\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\ddot{\boldsymbol{q}}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),\boldsymbol{q}(t)$ 分别为 t 时刻的加速度、速度和位移向量; \boldsymbol{B}_e 为激励的位置向量; $\boldsymbol{u}(t)$ 为激励.

在环境激励下,实测数据总是离散的,应将连续的状态空间方程离散化,即

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{W}_k,\quad \boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{V}_k.$$
 (2)

式(2)中: $\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{y}_{k+1}$ 分别为 $k+1$ 时刻系统的状态向量和输出向量; \boldsymbol{A} 为状态矩阵; \boldsymbol{C}_c 为输出矩阵; \boldsymbol{x}_k 为 k 时刻系统的状态向量; $\boldsymbol{W}_k,\boldsymbol{V}_k$ 分别为零均值的过程噪声和测量噪声,且互不相关.

1.2 随机子空间识别理论

随机子空间(SSI)法是一种时域内线性系统识别算法^[13],无需进行傅里叶变换,直接对时程响应数

据进行处理,可以有效地从环境激励的结构响应中提取结构模态参数. SSI 法主要分为数据驱动随机子空间 (SSI-DATA) 法与协方差驱动随机子空间 (SSI-COV) 法两类. 首先,协方差驱动随机子空间法将输出数据的协方差组成 Toeplitz 矩阵;然后,对该矩阵进行奇异值分解 (SVD),得到扩展的可观测矩阵和可控矩阵;最后,利用其性质计算系统的 \mathbf{A} 和 \mathbf{C}_c ,进而得到结构的模态参数. 该算法有以下 6 个流程.

1) 构建 Hankel 矩阵,即

$$\mathbf{H}_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-2} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+j-2} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

2) 根据白噪声均值为零且互不相关的性质,计算输出协方差矩阵 \mathbf{R}_i ,有

$$\mathbf{R}_i = E[\mathbf{y}_{k+i}\mathbf{y}_k^T]. \tag{4}$$

式(4)中: E 为数学期望.

3) 将协方差序列组成 Toeplitz 矩阵并进行分解,有

$$\mathbf{T}_{i|i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i-1} & \cdots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{i+1} & \mathbf{R}_i & \cdots & \mathbf{R}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{R}_{2i-1} & \mathbf{R}_{2i-2} & \cdots & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_c\mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} [\mathbf{G} \quad \mathbf{A}\mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}]. \tag{5}$$

式(5)中: \mathbf{G} 为下一时刻的状态向量与输出向量的协方差矩阵.

4) 对 Toeplitz 矩阵进行奇异值分解,可得

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1\mathbf{S}_1\mathbf{V}_1^T. \tag{6}$$

式(6)中: \mathbf{O}_i 为系统可观矩阵; \mathbf{U}, \mathbf{V} 均为对协方差矩阵进行奇异值分解后形成的正交矩阵; \mathbf{S} 为奇异值分解中正奇异矩阵组成的对角阵; $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ 均为对应于非零奇异值的左奇异向量构成的正交矩阵; $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ 均为对应于非零奇异值的右奇异向量构成的正交矩阵; \mathbf{S}_1 为降序的奇异值构成的对角阵.

5) 计算得到系统状态矩阵 \mathbf{A} 和输出矩阵 \mathbf{C}_c ,并对 \mathbf{A} 进行特征值分解,可得

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}^{-1}. \tag{7}$$

式(7)中: $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_m) \in \mathbb{C}_c^{n \times n}$, λ_m 为系统特征值; $\mathbf{\Phi}$ 为系统特征向量.

6) 将离散系统转化为原连续系统,系统特征值也相应变化,则由

$$\frac{1}{\Delta t} \ln \lambda_m = a_m + ib_m, \tag{8}$$

可计算出结构第 m 阶模态参数,即

$$f_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \xi_m = \frac{-a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}}. \tag{9}$$

式(8),(9)中: Δt 为采样时间间隔; i 为虚数单位; a_m, b_m 分别为系统特征值的实部和虚部; f_m, ξ_m 分别为第 m 阶的固有频率和第 m 阶的阻尼比.

结构第 m 阶模态的观测振型 $\boldsymbol{\varphi}_m$ 是系统状态矩阵 \mathbf{A} 的特征向量 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 的可观部分,即

$$\boldsymbol{\varphi}_m = \mathbf{C}_c \boldsymbol{\Phi}_m. \tag{10}$$

1.3 模态参数不确定性量化

在传感器数量有限的情况下,需要采用多个测试组分批次进行振动测试,才能获得结构的整体振动特性. 受外界因素、仪器误差影响,基于多组模态测试识别得到的模态参数不尽相同. 因此,需有效地评价每个测试组识别的模态参数的可信度,特别是在测试组有限的情况下,基于有限的数

的模态参数的可信度,并进一步确定结构模态参数的最终结果^[14-15].

Bootstrap 抽样运用模拟再抽样技术代替理论分析,基于有限的试验观测数据,模拟再抽样出大量符合原数据特征的模拟样本,从而提供足够的样本进行概率统计分析^[16],避免统计分析对概率分布函数假定的依赖.因此,提出一种基于 Bootstrap 抽样的结构模态参数识别结果不确定性量化分析方法.该方法有以下 4 个计算步骤.

步骤 1 基于不同测试组的加速时程响应,采用 SSI 方法,可识别到多组模态参数 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,假设其为总体分布 F 的一个随机独立样本,样本容量为 N .根据该样本,可构造原始样本的经验分布函数 $F_n(x)$,即

$$F_n(x)=\begin{cases} 0, & x<x(1), \\ \frac{n_1+n_2+\cdots+n_g}{N}, & x(g)\leq x<x(g+1), \quad g=1,2,\cdots,r-1, \\ 1, & x\geq x(r). \end{cases} \tag{11}$$

式(11)中: $x(1)<x(2)<\cdots<x(r)$ 是由识别得到的模态参数识别值 x_1,x_2,\cdots,x_N 的分量按从小到大的顺序排列而成; g 为序号; $n_g(n_1+n_2+\cdots+n_r=n)$ 表示各阶模态参数识别结果出现的频次.

步骤 2 从 F_n 中相继地、独立地抽取容量为 N 的 Bootstrap(自助)样本 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_N^*)$.

步骤 3 构造统计量,可得第 I 个自助样本的均值 $\overline{M(x_i^*)}$ 和第 I 个自助样本的方差 $S(x_i^*)$,即

$$\overline{M(x_i^*)}=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^NM(x_l^*), \tag{12}$$

$$S(x_i^*)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N(M(x_l^*)-\overline{M(x_i^*)})^2. \tag{13}$$

式(12),(13)中: $M(x_i^*)$ 为第 I 个自助样本.

步骤 4 独立重复 B 次步骤 2 至步骤 3,得到 B 个统计量值,并计算不同测试组模态参数的均值的均值 $\overline{M(x^*)}$ 及均值的方差 $\overline{S(x^*)}$,有

$$\overline{M(x^*)}=\frac{1}{B}\sum_{l=1}^B\overline{M(x_l^*)}, \tag{14}$$

$$\overline{S(x^*)}=\frac{1}{B}\sum_{l=1}^B(\overline{M(x_l^*)}-\overline{M(x^*)})^2. \tag{15}$$

在统计学上,平均值数量等同于描述总体的样本的大小.因此,平均值数量越多,越接近准确的估计值,即样本规模的增大可以减小方差.以 B 个自助样本均值的均值作为频率识别值减少了随机误差,均值的方差可以反映各测点识别的频率值的整体变异程度和稳定性,方差越大,表明多个测试数据识别的模态参数的不确定性越大;反之,方差越小,则不确定性越小.

为了评估基于单个测点的数据识别得到的模态参数的不确定性,首先,将单个测试组数据按采样时间分为 m 个时间段,可以得到 m 组识别结果;然后,采用上述方法对 m 组识别结果进行统计分析,进一步评估基于单个测点识别得到的模态参数的可靠性;最后,将单个测点的识别值与多测点的识别值进行比较,通过均值可以得出结构模态参数识别值的差异程度,通过方差可以分析结构模态参数整体和局部的离散程度,进而为模态参数识别的准确度和稳定性提供可靠性指标.

2 工程实例

2.1 工程概况

以靖远黄河大桥^[17]环境振动测试为例,验证文中方法的可行性和可靠性.靖远黄河大桥(图 1)为五跨刚构-连续组合梁桥,主跨部分为 374 m.

振动测试的测点布置,如图 2 所示.靖远黄河大桥上、下游两侧共设置 42 个竖向测点(V1~V42),竖向测试采用垂直向加速度传感器,分 7 组进行量测,每组有 6 个可移动测点;纵向和横向的量测采用单侧量测的方法,单侧均布置 20 个测点(纵向测点 L1~L20,横向测点 T1~T20),水平向加速度传感器分别沿纵桥向和横桥向布置,纵向测试和横向测试均分为 4 组进行量测,每组有 5 个可移动测点.测

点 10 为竖向、横向和纵向三向量测时各组公用的参考点. 振动测试的采样频率为 102. 405 Hz, 采样时间为 20 min.



图 1 靖远黄河大桥
Fig. 1 Jingyuan Yellow River Bridge

2.2 模态识别结果的局部不确定性量化

为了衡量单个测点数据识别的模态参数不确定性,以竖向测点 16 为例,采样时间为 20 min,该测点的加速度时程曲线及傅里叶频谱图(0~5 Hz),如图 3 所示. 图 3 中: a_v 为竖向加速度; A_v 为振幅; f 为固有频率.

以 60 s 为一个时间段,将竖向测点 16 的竖向加速度时程分成 20 组数据,可以识别 20 组模态参数. 利用自助抽样法,假设重复抽样 1 000 次,计算 1 000 个自助样本的统计特征值,以样本均值的均值作为该测点的固有频率识别值,以自助样本均值的方差评估参数识别的不确定性. 将文中方法与特征系统实现算法(ERA)、有限元模型修正后的计算结果进行对比,竖向测点 16 前 3 阶固有频率对比(局部),如表 1 所示.

由表 1 及式(13),(15)可知:单测点识别的前 3 阶固有频率与特征系统实现算法(ERA)及有限元模型修正后的计算结果基本一致;前 3 阶固有频率的方差分别为 0. 015 3,0. 049 6,0. 018 2,自助样本均值的方差分别为 0. 003 3,0. 018 5,0. 003 9,测点 16 的识别结果整体稳定性较好,离散程度较低,第 2 阶固有频率的方差大于第 1 阶和第 3 阶,其不确定性相对较高. 由于随机子空间法识别阻尼的精度不高,故阻尼比的识别算法还需进一步研究,此处不考虑阻尼比的不确定性.

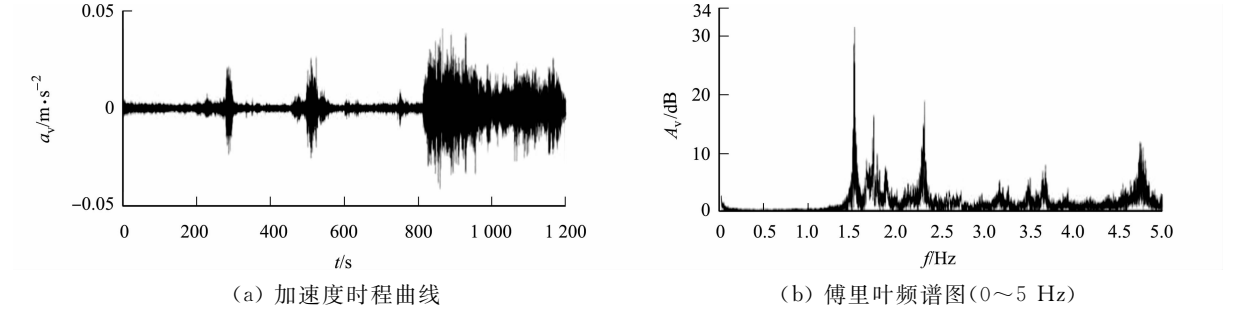


图 3 竖向测点 16 的加速度时程曲线和傅里叶频谱图(0~5 Hz)
Fig. 3 Acceleration time history curve and Fourier spectrum (0-5 Hz) of vertical measure point 16

表 1 竖向测点 16 前 3 阶固有频率对比(局部)

Tab. 1 Comparison among first three natural frequencies of vertical measure point 16 (local) Hz

阶次	f (有限元模型)	f (ERA)	f (文中方法)	
			均值	均值的均值
第 1 阶	1. 58	1. 54	1. 526 5	1. 526 6
第 2 阶	1. 72	1. 76	1. 788 0	1. 787 6
第 3 阶	2. 27	2. 31	2. 306 0	2. 306 1

竖向测点 16 基于 60~120 s,780~840 s 及 20 min 的加速度识别数据得到的稳定图,如图 4~6 所示. 由图 4,5 可知:基于 60~120 s 的加速度识别数据仅识别出第 1 阶和第 3 阶的固有频率,第 2 阶固有

频率未被识别;基于 780~840 s 的加速度识别数据可以识别出前 3 阶固有频率,但第 2 阶的识别结果的稳定性较差,与方差分析结果一致。

由图 4~6 可知:采用不同时间段的数据,得到的模态参数识别结果不同;方差可作为识别准确度的评价指标,从而进一步提高模态参数的识别结果。

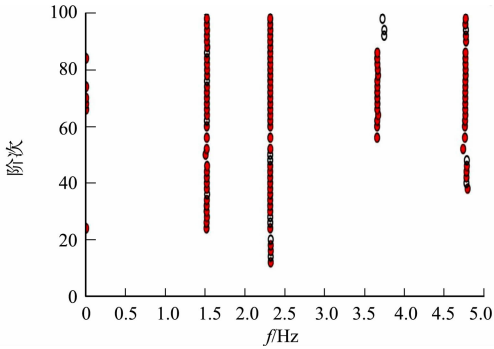


图 4 竖向测点 16 的稳定图(60~120 s)

Fig. 4 Stabilization diagram of vertical measure point 16 (60-120 s)

2.3 模态识别结果的整体不确定性量化

对于每个测试组的加速度响应数据,通过 SSI-COV 算法识别其模态参数,以竖向 42 个测点的加速度时程数据为例.以 7 个测试组识别的固有频率值为样本观察值,采用文中方法对多组模态参数识别结果进行不确定性量化,并与 ERA、有限元模型修正后的计算结果进行对比.竖向测点 16 前 3 阶固有频率对比(整体),如表 2 所示。

由表 2 及式(13),(15)可知:前 3 阶固有频率的方差较小,分别为 0.076 1,0.042 9,0.096 5,识别的固有频率值总体上较为稳定,自助样本均值的方差分别为 0.021 0,0.009 7,0.020 7;采用自助样本均值的均值作为固有频率识别值,减少了随机误差,与 ERA 及有限元模型修正后的分析结果对比,三者的识别结果基本一致。

表 2 竖向测点 16 前 3 阶固有频率对比(整体)

Tab. 2 Comparison among first three natural frequencies of vertical measure point 16 (whole)

Hz

阶次	f (有限元模型)	f (ERA)	f (文中方法)	
			均值	均值的均值
第 1 阶	1.58	1.54	1.553 9	1.553 5
第 2 阶	1.72	1.76	1.720 6	1.720 8
第 3 阶	2.27	2.31	2.165 2	2.165 7

3 结论

提出一种基于 Bootstrap 抽样的模态参数识别不确定性量化方法,从整体和局部的角度量化靖远黄河大桥模态参数识别结果的不确定性,得到以下 2 点结论。

1) 单个测试组识别的前 3 阶固有频率均值分别为 1.526 5,1.788 0,2.306 0;方差分别为 0.015 3,0.049 6,0.018 2;不同测试组识别的前 3 阶固有频率的均值分别为 1.553 9,1.720 6,2.165 2;方差分别为 0.076 1,0.042 9,0.096 5.这说明识别的固有频率值总体上较为稳定。

2) 样本均值的均值、均值的方差都可以用于评价模态参数识别结果局部,以及整体的大小与变异

程度,即均值的方差越小,不确定性越小,识别结果的可信度越高;反之,则说明不确定性越大,波动越大,离散程度越高。

参考文献:

- [1] 宗周红, WANG T L, HUANG D Z, 等. 桥梁健康监测应用与研究现状[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2002, 30(2): 127-152. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2243.2002.02.001.
- [2] 周晶. 基于环境振动模态参数识别随机子空间方法与应用[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2008.
- [3] REYNDERS E, MAES K, LOMBAERT G, *et al.* Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification: Validation and applications[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 66/67: 13-30. DOI: 10.1016/j.ymssp.2015.04.018.
- [4] 蒲黔辉, 洪彧, 王高新, 等. 快速特征系统实现算法用于环境激励下的结构模态参数识别[J]. 振动与冲击, 2018, 37(6): 55-60.
- [5] 秦世强, 勾红叶, 贾宏宇, 等. 桥梁结构工作模态分析的不确定度量化[J]. 振动与冲击, 2015, 34(8): 193-197.
- [6] 易伟建, 吴高烈, 徐丽. 模态参数不确定性分析的贝叶斯方法研究[J]. 计算力学学报, 2006, 23(6): 700-705. DOI: 10.3969/j.issn.1007-4708.2006.06.012.
- [7] DÖHLER M, LAM X B, MEVEL L. Uncertainty quantification for modal parameters from stochastic subspace identification on multi-setup measurements[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 36(2): 562-581. DOI: 10.1016/j.ymssp.2012.11.011.
- [8] HERRERA J M S, DIAZ I M, GARCIA-PALACIOS J H, *et al.* Vibration monitoring of a steel-plated stress-ribbon foot bridge: Uncertainties in the modal estimation[J]. Journal of Bridge Engineering, 2016, 21(8): C5015002. DOI: 10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000830.
- [9] FARRAR C, DOEBLING S W, CORNWELL P, *et al.* A comparison study of modal parameter confidence intervals computed using the Monte Carlo and Bootstrap techniques[C]//16th International Modal Analysis Conference. Santa Barbara: SPIE Press, 1998: 936-944.
- [10] CHAUHAN S, AHMED S I. MPUQ-b: Bootstrapping based modal parameter uncertainty quantification-fundamental principles[C]//35th International Modal Analysis Conference. Garden Grove: Springer Nature, 2017: 219-237.
- [11] CHAUHAN S. MPUQ-b: Bootstrapping based modal parameter uncertainty quantification: Methodology and application[C]//35th International Modal Analysis Conference. Garden Grove: Springer Nature, 2017: 239-254.
- [12] YAGHOUBI V, VAKILZADEH M K, ABRAHAMSSON T J S. Automated modal parameter estimation using correlation analysis and bootstrap sampling[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 100: 289-310. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.07.004.
- [13] 刘东霞. 基于随机子空间法的梁桥模态参数识别[D]. 成都: 西南交通大学, 2008.
- [14] 陈永高, 钟振宇. 环境激励下桥梁结构信号分解与模态参数识别[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(6): 1267-1274.
- [15] REYNDERS E, PINTELON R, ROECK G D. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(4): 948-969. DOI: 10.1016/j.ymssp.2007.10.009.
- [16] JOHNSON R W. An introduction to the Bootstrap[J]. Teaching Statistics, 2001, 23(2): 49-54. DOI: 10.1111/1467-9639.00050.
- [17] 韩建平, 郑沛娟. 环境激励下基于快速贝叶斯 FFT 的实桥模态参数识别[J]. 工程力学, 2014, 31(4): 119-125. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.07.0560.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 方德平)