

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201908040



广义变系数 KdV 方程的 保角能量守恒方法

郭峰, 庄清渠

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 基于保角哈密顿系统的辛形式, 对带依时系数的广义 KdV(TDKdV) 方程提出一个保角能量守恒算法. 通过算子分裂方法, 方程被分裂成一个哈密顿系统和一个耗散系统, 其中, 耗散系统被精确求解. 哈密顿系统在时间上采用二阶平均向量场(AVF)方法离散, 在空间上采用傅里叶拟谱方法离散. 在合适的边界条件下, 所提方法可精确保持离散保角能量守恒律及离散保角质量守恒律. 数值实验验证文中方法在长时间数值模拟过程中的有效性.

关键词: 保角能量守恒; 傅里叶拟谱方法; 广义 KdV 方程; 阻尼 KdV 方程; 快速傅里叶变换

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2020)03-0407-08

Conformal Energy-Preserving Method for Generalized Variable Coefficient KdV Equation

GUO Feng, ZHUANG Qingqu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Based on the symplectic formulation of the conformal Hamiltonian system, a conformal energy-preserving algorithm for the generalized KdV equation with time-dependent coefficients (TDKdV) is proposed. The equation is split into a Hamiltonian system and a dissipative system by the operator splitting method in which the dissipative system can be solved exactly. The Hamiltonian system is discretized by the second order average vector field (AVF) method in time and the Fourier pseudo-spectral method in space, and the proposed method can exactly preserve the discrete conformal energy conservation law and the discrete conformal mass conservation law under the appropriate boundary conditions. Numerical experiments verify the effectiveness of the method during the long-time numerical simulations.

Keywords: conformal energy - preserving; Fourier pseudo - spectral method; generalized KdV equation; damped KdV equation; fast Fourier transform

1 预备知识

KdV 方程是一类重要的非线性模型, 用于描述许多物理现象, 如非谐晶体中的声波、热等离子体中的磁流体动力波及离子声波等. 在各种实际物理背景中, 当考虑媒介的非均匀性及边界的非一致性时, 变系数模型往往比相应的常系数模型更能说明问题. 考虑带依时阻尼和弥散项的广义 KdV(TDKdV)

收稿日期: 2019-08-31

通信作者: 郭峰(1972-), 女, 副教授, 主要从事偏微分方程数值解与辛算法的研究. E-mail:hydhgf@163.com.

基金项目: 福建省高校创新团队发展计划, 泉州市高层次人才团队项目(2017ZT012); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(ZQN-702)

方程的周期初值问题,即

$$u_t + u^p u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xx} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

式(1)~(3)中: p 是正整数; $\Omega=[a, b]$; T 是时间终点; $L=b-a$; $u_0(x)$ 是给定的光滑函数; $u(x, t)$ 是相关波模型的振幅; $\alpha(t), \beta(t)$ 分别表示依时阻尼系数和弥散系数.

方程(1)有着广泛的物理应用,如海洋动力学中的海岸波、等离子体物理学、天体物理学及流体力学等^[1-3]. 对于无耗散的 KdV 方程,已有的数值研究方法主要有有限差分法^[4-5]、有限元法^[6]、谱方法^[7-8]等. 近年来,保结构算法因能长时间保持哈密尔顿系统的几何结构而备受学者们的关注. Wang 等^[9]研究了无耗散 KdV 方程的局部保结构算法. Brugnano 等^[10]利用哈密尔顿边界值方法,构造了 KdV 方程的高阶能量守恒格式. 对于具耗散的 KdV 方程,房少梅^[11]在假设数值解有界的前提下,仅对广义 KdV 方程的一般谱格式和拟谱格式进行解的误差估计. Guo^[12]对阻尼 KdV 方程提出一个保角多辛算法. 目前,尚无关于阻尼 KdV 方程保能量耗散方面的保角保结构算法.

哈密尔顿系统最具特征的结构,就是常常被称为系统能量的哈密尔顿函数本身. 由于耗散的 KdV 方程非哈密尔顿系统,传统的保结构方法若直接应用到此类问题就会失去其优势. 针对带线性阻尼项的保角哈密尔顿系统,文献[13-16]提出能保持其保角守恒律的保角方法. 本文根据这一方法,利用算子分裂技巧,对方程(1)~(3)构造一个空间上高精度的傅里叶拟谱保角能量守恒格式,该格式在周期边界条件下能保持系统的离散保角能量守恒律及保角质量守恒律.

2 TDKdV 方程的保角哈密尔顿系统及保角守恒律

TDKdV 方程(1)可以写成一个保角哈密尔顿系统^[13,15],即

$$u_t = \partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} - \alpha(t)u. \tag{4}$$

式(4)中: \mathcal{H} 为能量泛函,表达式为

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \beta(t) u_x^2 - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right] dx. \tag{5}$$

保角哈密尔顿系统(4)在合适的边界条件如周期边界条件(2)下,具有以下 2 个保角性质.

1) 保角质量守恒律

$$m(t) = \exp(-\int_0^t \alpha(s) ds) \cdot m(0), \quad m(t) = \int_{\Omega} u dx. \tag{6}$$

式(6)可通过直接对方程(1)关于空间变量 x 积分得到. 用 $\frac{u^{p+1}}{p+1}$ 和 $\beta(t)u_{xx}$ 分别乘方程(1),所得两式相加后关于 x 积分,注意到周期边界下, $-\int_{\Omega} u_x^2 dx = \int_{\Omega} uu_{xx} dx$, 可得保角能量守恒律.

2) 保角能量守恒律

$$E(t) = \exp(-(p+2)\int_0^t \alpha(s) ds) \cdot E(0). \tag{7}$$

式(7)中: $E(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \beta(t) uu_{xx} + \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right] dx$, $\beta(t) = c \exp(-p \int_0^t \alpha(s) ds)$, c 是任意常数.

3 TDKdV 方程的保角能量守恒傅里叶拟谱方法

令空间节点数为偶数 J , 空间步长 $h=L/J$, 则空间节点 $x_j=a+(j-1)h, j=1, 2, \cdots, J$. 取时间节点数为 N , 时间步长 $\tau=T/N$, 时间节点可表示为 $t_n=n\tau, n=0, 1, \cdots, N$. 同时,记 $u(x_j, t_n)$ 的近似值为 u_j^n , 其向量形式为 $\boldsymbol{U}=(u_1, u_2, \cdots, u_J)^T$.

定义 $S'_J = \text{span}\{g_j(x), j=1, \cdots, J\}$ 为插值空间,三角多项式 $g_j(x)$ 可显式地表示为

$$g_j(x) = \frac{1}{J} \sum_{l=-J/2}^{J/2} \frac{1}{c_l} \exp(i l \mu (x - x_j)).$$

上式中: $c_l=1(|l|<J/2)$, $c_{-J/2}=c_{J/2}=2$; $\mu=\frac{2\pi}{L}$; $i=\sqrt{-1}$. 插值近似 $I_J u(x,t)$ 定义^[17]为

$$I_J u(x,t) = \sum_{j=1}^J u(x_j,t) g_j(x).$$

上式中: $g_j(x_k)=\delta_j^k$.

对上式求偏导, 可得算子 $I_J u(x,t)$ 在节点 x_j 处的 s 阶偏导数为

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} I_J u(x,t) \Big|_{x=x_j} = \sum_{k=1}^J u(x_k,t) \frac{d^s g_k(x_j)}{dx^s} = (\mathbf{D}_s \mathbf{u})_j. \tag{8}$$

式(8)中: $\mathbf{u}=(u(x_1,t), u(x_2,t), \cdots, u(x_J,t))^T$; $\mathbf{D}_s \in \mathbf{R}^{J \times J}$ 是 s 阶谱微分矩阵.

\mathbf{D}_1 的元素为

$$(\mathbf{D}_1)_{j,l} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{j+l} \cot\left(\mu \frac{x_j - x_l}{2}\right), & j \neq l, \\ 0, & j = l. \end{cases}$$

\mathbf{D}_2 的元素为

$$(\mathbf{D}_2)_{j,l} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu^2 (-1)^{j+l+1} \csc^2\left(\mu \frac{x_j - x_l}{2}\right), & j \neq l, \\ -\mu^2 \frac{J^2 + 2}{12}, & j = l. \end{cases}$$

上式中: $j, l=1, 2, \cdots, J$.

引理 1 矩阵 \mathbf{D}_1 的元素满足 $(\mathbf{D}_1)_j=0, j=1, 2, \cdots, J$, 即 \mathbf{D}_1 每行元素之和为零.

证明: 将 $\mathbf{u}=(1, 1, \cdots, 1)^T, s=1$ 代入式(8), 即证明.

对于矩阵 \mathbf{D}_1 和 \mathbf{D}_2 , 有 $\mathbf{D}_1=\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{F}, \mathbf{D}_2=\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{F}$. 其中, \mathbf{F} 与 \mathbf{F}^{-1} 分别为离散傅里叶变换及逆变换系数矩阵, 元素分别为 $F_{j,l}=\left(\exp(-i \frac{2\pi}{J})\right)^{jl}, F_{j,l}^{-1}=\frac{1}{J} \left(\exp(i \frac{2\pi}{J})\right)^{jl}$. 且

$$\mathbf{A}_1 = i\mu \text{diag}\left(0, 1, \cdots, \frac{J}{2} - 1, 0, 1 - \frac{J}{2}, 2 - \frac{J}{2}, \cdots, -2, -1\right),$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mu^2 \text{diag}\left(0, 1^2, \cdots, \left(\frac{J}{2}\right)^2, \left(1 - \frac{J}{2}\right)^2, \left(2 - \frac{J}{2}\right)^2, \cdots, (-2)^2, (-1)^2\right).$$

在空间上用傅里叶拟谱方法离散方程(4), 得到一个半离散系统, 即

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{D}_1 \nabla H(\mathbf{U}) - \alpha(t) \mathbf{U}. \tag{9}$$

式(9)中:

$$H(\mathbf{U}) = -\frac{1}{2} \beta(t) \mathbf{U}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{U} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} \sum_j (u_j)^{p+2}. \tag{10}$$

注 1 如果对 ∂_x 和 ∂_x^2 分别采用二阶中心差分算子, 将得到下列微分矩阵

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

将空间上采用傅里叶拟谱方法得到的格式称为 FPEP, 采用中心差分方法得到的格式称为 CDEP.

首先, 将系统(9)分裂成一个保守的哈密尔顿系统

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{D}_1 \nabla H(\mathbf{U}) \tag{12}$$

和一个耗散系统

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\alpha(t) \mathbf{U}. \tag{13}$$

然后, 在时间方向上, 应用二阶平均向量场方法(AVF)^[18]求解系统(12), 得

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}=\boldsymbol{D}_1\int_0^1\nabla H[(1-\xi)\boldsymbol{U}^n+\xi\boldsymbol{U}^{n+1}]\mathrm{d}\xi.$$

不失一般性地,设 $p=1$,即

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}=-\beta(t_{n+1/2})\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right)-\frac{\boldsymbol{D}_1}{6}[(U^{n+1})^2+(U^n)^2+U^{n+1}\cdot U^n].$$

上式中: $U^{n+1}\cdot U^n=(u_1^{n+1}u_1^n,u_2^{n+1}u_2^n,\cdots,u_j^{n+1}u_j^n)^T;(U^n)^2=((u_1^n)^2,\cdots,(u_j^n)^2)^T$.

式(13)采用精确解 $\boldsymbol{U}(t)=\exp(-\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s)\boldsymbol{U}(0)$.最后,应用 Strang 算子分裂^[19-20],可得保角能量守恒格式为

$$\begin{aligned}\frac{p_nu_j^{n+1}-q_nu_j^n}{\tau} &= -\beta(t_{n+1/2})\left(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\left(\frac{p_nU^{n+1}+q_nU^n}{2}\right)\right)_j - \\ &\quad \frac{1}{6}[\boldsymbol{D}_1((p_nU^{n+1})^2+(q_nU^n)^2+p_nq_nU^{n+1}\cdot U^n)]_j.\end{aligned}\tag{14}$$

式(14)中: $p_n=\exp(-\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s);q_n=\exp(-\int_{t_n}^{t_{n+1/2}}\alpha(s)\mathrm{d}s)$.相应的向量形式为

$$\begin{aligned}\frac{p_nU^{n+1}-q_nU^n}{\tau} &= -\beta(t_{n+1/2})\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\left(\frac{p_nU^{n+1}+q_nU^n}{2}\right)- \\ &\quad \frac{1}{6}\boldsymbol{D}_1[(p_nU^{n+1})^2+(q_nU^n)^2+p_nq_nU^{n+1}\cdot U^n].\end{aligned}\tag{15}$$

定理 1 式(14)具有离散保角质量守恒律,即

$$M^{n+1}=\exp(-\int_{t_n}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s)M^n,\quad M^n=h\sum_ju_j^n,\quad n=0,\cdots,N-1.\tag{16}$$

证明:注意到 \boldsymbol{D}_1 的反对称性,由引理 1,对式(14)关于空间指标 j 求和,有

$$p_n\sum_ju_j^{n+1}=q_n\sum_ju_j^n.$$

从而可得保角质量守恒律(16).

定理 2 式(15)满足离散保角能量守恒律,即

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{E}^{n+1} &= \exp(-3\int_{t_n}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s)\mathcal{E}^n, \\ \mathcal{E}^n &= h\left[\frac{1}{2}\beta(t_n)(U^n)^T\boldsymbol{D}_2U^n+\frac{1}{6}\sum_j(u_j^n)^3\right].\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

式(17)中: $\beta(t_n)=c\exp(-\int_0^{t_n}\alpha(s)\mathrm{d}s);n=0,\cdots,N-1$.

证明:用 $\beta(t_{n+1/2})\boldsymbol{D}_2\left(\frac{p_nU^{n+1}+q_nU^n}{2}\right)+\frac{1}{6}[(p_nU^{n+1})^2+(q_nU^n)^2+p_nq_nU^{n+1}\cdot U^n]$ 与式(15)作内积,由 \boldsymbol{D}_1 的反对称性及 \boldsymbol{D}_2 的对称性,可得

$$\frac{1}{2}\beta(t_{n+1/2})p_n^2(U^{n+1})^T\boldsymbol{D}_2U^{n+1}+\frac{1}{6}\sum_jp_n^3(u_j^{n+1})^3=\frac{1}{2}\beta(t_{n+1/2})q_n^2(U^n)^T\boldsymbol{D}_2U^n+\frac{1}{6}\sum_jq_n^3(u_j^n)^3.$$

将 $\beta(t_{n+1/2})=c\exp(-\int_0^{t_{n+1/2}}\alpha(s)\mathrm{d}s)$ 代入上式,所得方程乘以 $\exp(-3\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s)$,即证式(17).

4 数值试验

对 FPEP(15),CDEP(11)及下列传统 AVF 方法(TAVF)的解的精度、计算效率及保角守恒律误差进行比较,并考虑不同类型的阻尼对保角守恒律的影响,即

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}=\boldsymbol{D}_1\int_0^1\nabla H[(1-\xi)U^n+\xi U^{n+1}]\mathrm{d}\xi-\alpha(t_{n+1/2})U^{n+1/2}.$$

上式中: $U^{n+1/2}=\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right)$.

TDKdV 方程(1)在 $p=1$ 时,有解析解为

$$u(x,t)=12\beta(t)\nu^2\operatorname{sech}^2[\nu x-4\nu^2\int_0^t\beta(t)\mathrm{d}t-c_0].$$

上式中: $\beta(t)=c\exp(-\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s)$, c,ν,c_0 为给定常数.

取 $\Omega=[-20,20]$, $c=0.2,\nu=0.5,c_0=0,t=0$ 时的解析解为初始条件. 为提高计算效率,在 FPEP 的计算中采用快速傅里叶变换(FFT)技巧. 收敛阶 $\text{Order}=\frac{\ln(\text{error}_1/\text{error}_2)}{\ln(\tau_1/\tau_2)}$,其中, τ_k,error_k 分别为步长及相应步长下的无穷范数(L_∞)误差或 2 范数(L_2)误差, $k=1,2$. 保角能量守恒律误差及保角质量守恒律误差分别采用 $E_\varepsilon=|\mathcal{E}^{n+1}-\exp(-3\int_{t_n}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s)\mathcal{E}^n|$ 和 $E_M=|M^{n+1}-\exp(-\int_{t_n}^{t_{n+1}}\alpha(s)\mathrm{d}s)M^n|$ 计算.

算例 1 设阻尼系数 $\alpha(t)=0.01$,当 $h=0.01,T=10$ 时,FPEP 和 CDEP 的时间收敛阶,如表 1 所示. $\tau=0.001,T=10$ 时,FPEP 和 CDEP 的空间误差,如表 2 所示. 由表 1,2 可知:在时间方向上,FPEP 和 CDEP 均为二阶精度;在空间方向上,FPEP 的误差非常小,而 CDEP 的误差较大,收敛率为二阶.

表 1 FPEP 和 CDEP 的时间收敛阶
Tab. 1 Temporal convergence rates of FPEP and CDEP

| 方法 | τ | L_∞ 误差 | Order | L_2 误差 | Order |
|------|--------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
| FPEP | 10/100 | $1.601\ 9\times10^{-4}$ | — | $2.514\ 3\times10^{-4}$ | — |
| | 10/200 | $4.044\ 5\times10^{-5}$ | 1.985 8 | $6.297\ 6\times10^{-5}$ | 1.997 3 |
| | 10/400 | $1.013\ 7\times10^{-5}$ | 1.996 3 | $1.574\ 3\times10^{-5}$ | 2.000 1 |
| | 10/800 | $2.534\ 2\times10^{-6}$ | 2.000 0 | $3.934\ 5\times10^{-6}$ | 2.000 0 |
| CDEP | 10/100 | $1.586\ 0\times10^{-4}$ | — | $2.487\ 9\times10^{-4}$ | — |
| | 10/200 | $3.887\ 9\times10^{-5}$ | 2.028 3 | $6.037\ 6\times10^{-5}$ | 2.042 9 |
| | 10/400 | $8.579\ 9\times10^{-6}$ | 2.180 0 | $1.332\ 3\times10^{-5}$ | 2.180 1 |
| | 10/800 | $1.325\ 9\times10^{-6}$ | 2.694 0 | $2.771\ 3\times10^{-6}$ | 2.265 3 |

表 2 FPEP 和 CDEP 的空间误差
Tab. 2 Spatial errors of FPEP and CDEP

| 方法 | h | L_∞ 误差 | Order | L_2 误差 | Order |
|------|--------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
| FPEP | 40/100 | $2.761\ 1\times10^{-8}$ | — | $3.457\ 8\times10^{-8}$ | — |
| | 40/200 | $2.740\ 4\times10^{-8}$ | — | $3.317\ 9\times10^{-8}$ | — |
| | 40/400 | $2.741\ 0\times10^{-8}$ | — | $3.255\ 0\times10^{-8}$ | — |
| | 40/800 | $2.741\ 7\times10^{-8}$ | — | $3.224\ 6\times10^{-8}$ | — |
| CDEP | 40/100 | 0.003 6 | — | 0.005 9 | — |
| | 40/200 | $8.836\ 8\times10^{-4}$ | 2.026 4 | 0.001 5 | 1.975 8 |
| | 40/400 | $2.254\ 8\times10^{-4}$ | 1.970 5 | $3.614\ 9\times10^{-4}$ | 2.052 9 |
| | 40/800 | $5.657\ 2\times10^{-5}$ | 1.994 8 | $9.026\ 8\times10^{-5}$ | 2.001 7 |

当 $\tau=0.01,T=10$ 时,不同空间步长下 2 种方法的 CPU 运行时间,如表 3 所示. 由表 3 可知:使用 FFT 技巧的 FPEP 的运算时间远小于 CDEP.

在 $h=0.2,\tau=0.001$ 下,分别将 3 种格式运行到 $T=60$ 时,其数值解与精确解的比较,如图 1 所示. 图 1 中: x 为空间区域. 由图 1 可知:TAVF 的误差最大;FPEP,CDEP 的数值解与精确解吻合得很好.

3 种方法在时间区间 $t\in[0,60]$ 上的保角守恒律误差,如图 2,3 所示. 图 2,3 采用的参数与图 1 相同. 由图 2,3 可知:FPEP 与 CDEP 均满足保角能量守恒律和保角质量守恒律,而 TAVF 却不能满足. 这表明保角能量守恒方法在保持保角守恒律方面比传统 AVF 方法更具优势.

算例 2 当 $h=0.2,\tau=0.001$ 时,在不同阻尼系数下,FPEP 方法在时间区间 $t\in[0,60]$ 上的保角守恒律误差,如图 4,5 所示. 由图 4,5 可知:在不同类型的阻尼下,FPEP 均能精确保持保角守恒律.

表 3 不同空间步长下 2 种方法的 CPU 运行时间

| Tab. 3 CPU times of two methods at different spatial steps | | | s |
|--|---------|---------|---|
| h | FPEP | CDEP | |
| 40/100 | 0.215 8 | 0.641 2 | |
| 40/200 | 0.257 6 | 0.999 7 | |
| 40/400 | 0.386 2 | 1.631 9 | |

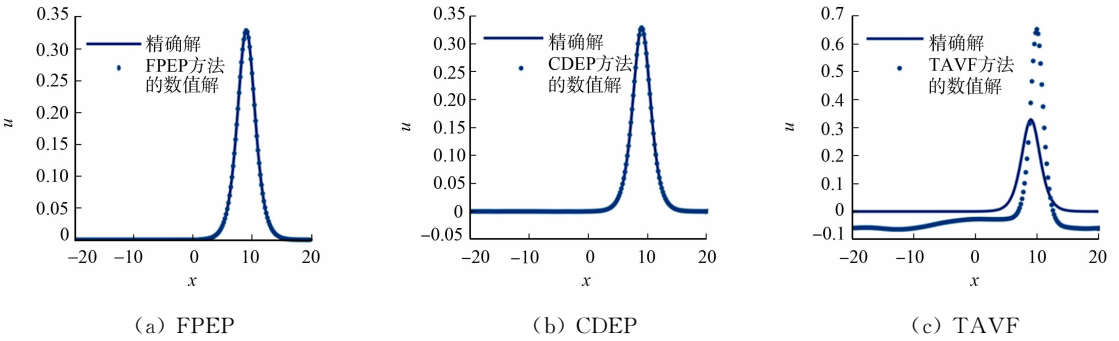


图 1 3 种方法的数值解与精确解的比较

Fig. 1 Comparisons of exact solution and numerical solutions with three methods

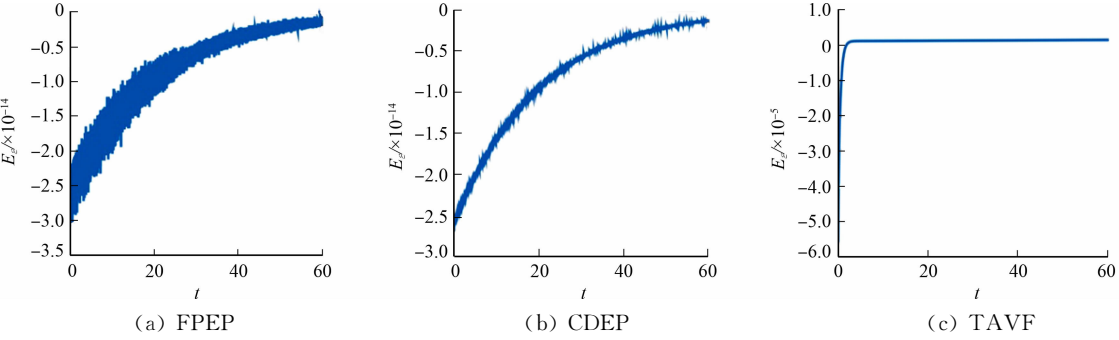


图 2 3 种方法的保角能量守恒律误差

Fig. 2 Errors on conformal energy conservation law for three methods

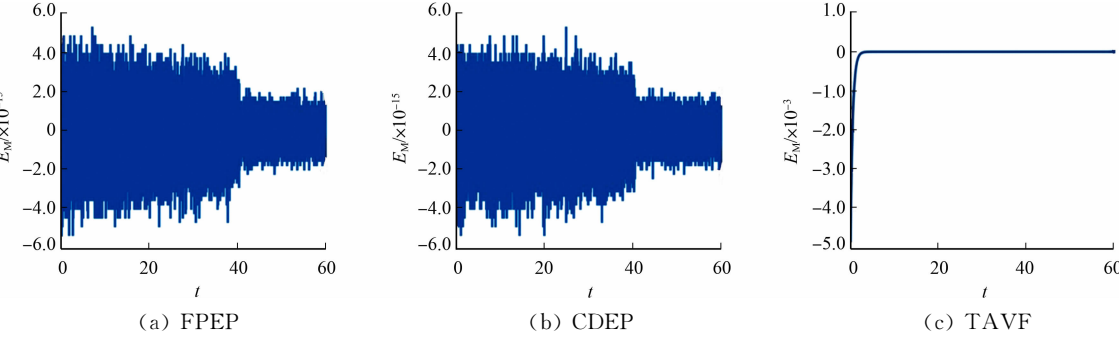


图 3 3 种方法的保角质量守恒律误差

Fig. 3 Errors on conformal mass conservation law for three methods

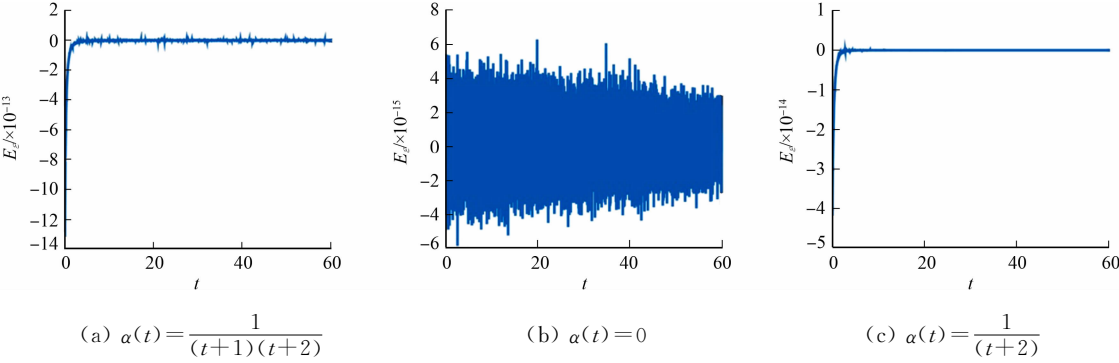


图 4 FPEP 方法的保角能量守恒律误差

Fig. 4 Errors on conformal energy conservation law for FPEP method

算例 3 阻尼系数 $\alpha(t)=0.02$ 时,FPEP 方法下双孤立子的碰撞及保角守恒律误差,如图 6 所示. 图 6 中:初始条件取 $u(x,0)=12(0.15 \cdot 0.9^2 \operatorname{sech}^2(0.9(x+12))+0.015 \cdot 2^2 \operatorname{sech}^2(2(x+8)))$,并假设 $h=0.2, \tau=0.001$. 由图 6(b)可知:双孤立子碰撞后,除了振幅减小,相空间结构仍保持良好,表明碰撞是弹性的.

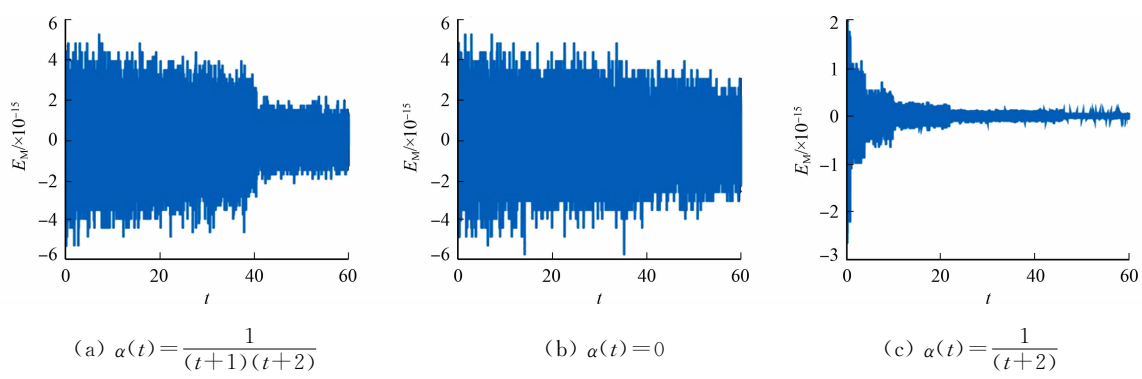


图 5 FPEP 方法的保角质量守恒律误差

Fig. 5 Errors on conformal mass conservation law for FPEP method

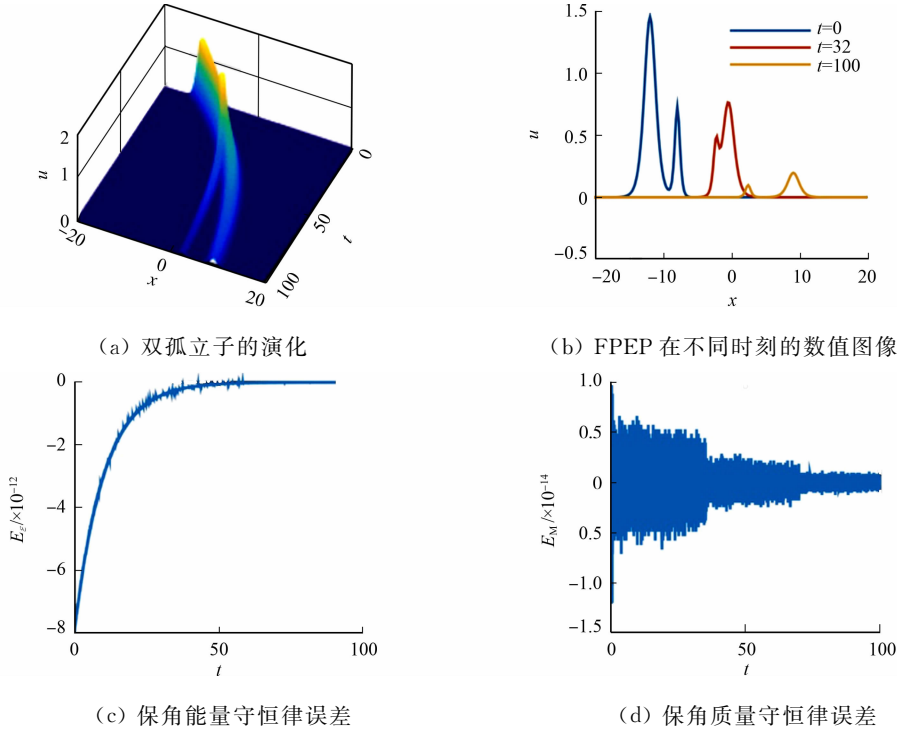


图 6 FPEP 方法下双孤立子的碰撞及保角守恒律误差

Fig. 6 Collision of two solitons by FPEP and errors on conformal conservation laws

5 结束语

时间采用二阶 AVF 方法,空间采用傅里叶拟谱逼近,利用 Strang 分裂,构造变系数广义 KdV 方程的一个保角能量守恒格式. 计算中使用 FFT 技巧,不但比空间采用二阶中心差分的保角能量守恒方法误差小,而且计算效率也很高. 数值实验结果表明:相比传统的 AVF 保能量方法,采用保角能量守恒方法更能体现保角哈密顿系统的本质属性,并具有良好的长时间数值行为. 由于 KdV 方程是非线性方程,构造阻尼 KdV 方程在时间上更为高阶的保角保结构算法将是一个不小的挑战.

参考文献:

[1] LI Juan, XU Tao, MENG Xianghua, *et al.* Lax pair, Bäcklund transformation and N-soliton-like solution for a variable-coefficient Gardner equation from nonlinear lattice, plasma physics and ocean dynamics with symbolic computation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 336(2): 1443-1455. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2007. 03. 064.

[2] TIAN Bo, WEI Guangmei, ZHANG Chunyi, *et al.* Transformations for a generalized variable-coefficient Korteweg-de Vries model from blood vessels, Bose-Einstein condensates, rods and positons with symbolic computation[J]. Phys-

- ics Letters A, 2006, 356(1): 8-16. DOI: 10. 1016/j. physleta. 2006. 03. 080.
- [3] LIU Ying, GAO Yitian, SUN Zhiyuan, *et al.* Multi-soliton solutions of the forced variable-coefficient extended Korteweg-de Vries equation arisen in fluid dynamics of internal solitary waves[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 66(4): 575-587. DOI: 10. 1007/s11071-010-9936-7.
- [4] ZHANG Xiaohua, ZHANG Ping. A reduced high-order compact finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition technique for KdV equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 339: 535-545. DOI: 10. 1016/j. amc. 2018. 07. 017.
- [5] KONG Desong, XU Yufeng, ZHENG Zhoushun. A hybrid numerical method for the KdV equation by finite difference and sinc collocation method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 355: 61-72. DOI: 10. 1016/j. amc. 2019. 02. 031.
- [6] FU Guosheng, SHU Chiwang. An energy-conserving ultra-weak discontinuous Galerkin method for the generalized Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 349: 41-51. DOI: 10. 1016/j. cam. 2018. 09. 021.
- [7] CHELLAPPAN V, GOPALAKRISHNAN S, MANI V. Spectral solutions to the Korteweg-de-Vries and nonlinear Schrödinger equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals Part A, 2015, 81: 150-161. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2015. 09. 008.
- [8] BJØRKAVÅG M, KALISCH H. Exponential convergence of a spectral projection of the KdV equation[J]. Physics Letters A, 2007, 365(4): 278-283. DOI: 10. 1016/j. physleta. 2006. 12. 085.
- [9] WANG Jialing, WANG Yushun. Local structure-preserving algorithms for the KdV equation[J]. Journal of Computational Mathematics, 2017, 35(3): 289-318. DOI: 10. 4208/jcm. 1605-m2015-0343.
- [10] BRUGNANO L, GURIOLI G, SUN Yajuan. Energy-conserving Hamiltonian Boundary Value Methods for the numerical solution of the Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 351: 117-135. DOI: 10. 1016/j. cam. 2018. 10. 014.
- [11] 房少梅. 一类广义 KdV 方程组的谱和拟谱方法[J]. 计算数学, 2002, 24(3): 353-362. DOI: 10. 3321/j. issn: 0254-7791. 2002. 03. 011.
- [12] GUO Feng. Second order conformal multi-symplectic method for the damped Korteweg-de Vries equation[J]. Chinese Physics B, 2019, 28(5): 24-30. DOI: 10. 1088/1674-1056/28/5/050201.
- [13] MCLACHLAN R, PERLMUTTER M. Conformal Hamiltonian systems[J]. Journal of Geometry and Physics, 2001, 39(4): 276-300. DOI: 10. 1016/S0393-0440(01)00020-1.
- [14] MOORE B E, NORENA L, SCHÖBER C M. Conformal conservation laws and geometric integration for damped Hamiltonian PDEs[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 232(1): 214-233. DOI: 10. 1016/j. jcp. 2012. 08. 010.
- [15] BHATT A FLOYD D, MOORE B E. Second order conformal symplectic schemes for damped Hamiltonian systems [J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 66(3): 1234-1259. DOI: 10. 1007/s10915-015-0062-z.
- [16] MOORE B E. Multi-conformal-symplectic PDEs and discretizations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 323: 1-15. DOI: 10. 1016/j. cam. 2017. 04. 008.
- [17] CHEN Jingbo, QIN Mengzhao. Multi-symplectic Fourier pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis Etna, 2001, 12: 193-204.
- [18] QUISPEL G R W, MCLAREN D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods[J]. Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 2008, 41(4): 045206. DOI: 10. 1088/1751-8113/41/4/045206.
- [19] STRANG G. On the construction and comparison of difference schemes[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1968, 5(3): 506-517. DOI: 10. 2307/2949700.
- [20] MCLACHLAN R I, QUISPEL G R W. Splitting methods[J]. Acta Numerica, 2002, 11: 341-434. DOI: 10. 1017/S0962492902000053.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)