

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201911065



$\bar{\alpha}$ -调和映照的正规性

孙乾乾, 陈行堤, 胡春英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究 $\bar{\alpha}$ -调和映照正规性判别条件. 利用 Bloch 函数, 结合预 Schwarz 导数与线性连结几何特征给出正规 $\bar{\alpha}$ -调和映照的两个判别定理.

关键词: $\bar{\alpha}$ -调和映照; 正规映照; 线性连结; Bloch 空间

中图分类号: O 174.55

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2020)03-0394-06

Normal $\bar{\alpha}$ -Harmonic Mappings

SUN Qianqian, CHEN Xingdi, HU Chunying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study some criterions of normality for $\bar{\alpha}$ -harmonic mappings. By the properties of Bloch functions, the estimate of pre-Schwarz derivative of analytic functions and geometric characterization of linearly connected domain, we give two sufficient conditions for determining whether an $\bar{\alpha}$ -harmonic mapping is normal.

Keywords: $\bar{\alpha}$ -harmonic mappings; normal mappings; linearly connected domains; Bloch functions

1 预备知识

设 $f(z)$ 是单位圆盘 D 内的亚纯函数, 若函数族 $F = \{f \circ \sigma | \sigma \in \text{Aut}(D)\}$ 在 Montel 意义下是正规族, 则 $f(z)$ 是正规的, 其中, $\text{Aut}(D)$ 表示单位圆盘 D 的共形自同构. Sheil-Small^[1] 给出了亚纯函数 $f(z)$ 是正规的当且仅当 $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} < +\infty$.

Lappan^[2] 给出了对于实值调和函数 $f(z)$, 若 $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \frac{|\nabla f(z)|}{1 + |f(z)|^2} < +\infty$, 则 $f(z)$ 是正规的, 其中, $\nabla f(z)$ 表示 $f(z)$ 的梯度向量. Arbeláez 等^[3] 研究了复值调和映照的正规性. 本文将利用调和映照的正规性刻画 $\bar{\alpha}$ -调和映照的正规性.

若 $f(z)$ 是 D 内二阶连续可微函数, 且满足 Laplace 方程 $\Delta f(z) = 4f_{z\bar{z}} = 0$, 则称它是调和映照. 它在 D 内可以表达成 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 其中, $h(z), g(z)$ 在 D 内解析. 称 $\omega_f = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ 为 $f(z)$ 的第二复特征, 记 $\|\omega\|_\infty = \sup_{z \in D} |\omega_f|$.

在扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上, 称

$$X(z, w) = |z - w| / \sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

收稿日期: 2019-11-29

通信作者: 陈行堤 (1976-), 男, 教授, 博士, 主要从事单复变函数的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971182); 福建省自然科学基金资助项目 (2019J01066); 福建省研究生导师团队建设专项 (411-50619001); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划资助项目 (18013070012)

为两点 z 和 w 的弦距离, 并规定 $X(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$.

设 p_z, p_w 是黎曼球面上的两点, 在垂直投射下分别对应 z, w , 简单计算发现 $X(z, w) = |p_z - p_w|$. 记 $\sigma(z, w)$ 为 z, w 两点之间的球面距离. 设 Γ 为 \mathbf{C} 上任意连接两点 z, w 的可求长曲线, Γ 的球面长度为 $L(\Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{|d\xi|}{1+|\xi|^2}$. 则有 $X(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq L(\Gamma)$. 记 $\rho(z, w)$ 为 z, w 两点之间的双曲距离. 令 γ 表示连接两点 z, w 的双曲测地线, 则 $\delta(z, w) = \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{1-|\xi|^2}$.

定义 1 设 $f: D \rightarrow \mathbf{C}$ 是一个调和映照, 若 $\sup_{z \neq w} [X(f(z), f(w))/\delta(z, w)] < +\infty$, 则称 f 是正规调和映照.

Arbelaez 等^[3]给出正规调和映照的一个判别定理.

定理 A^[3] 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 在单位圆盘 D 内是一个调和映照, 则 $f(z)$ 是正规的当且仅当
$$\|f\|_n := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \frac{|h'(z)| + |g'(z)|}{1 + |f(z)|^2} < +\infty.$$

设 ρ 是区域 Ω 上的连续可微函数, 称 $\overline{L_{\rho}} = \partial_w \rho \partial_{\bar{w}}$ 为加权的 Laplace 算子, 其中, $\partial_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. 若 $\rho = (1 - |w|^2)^{-\alpha}$, 则称 $\overline{L_{\rho}} = \overline{L_{(1-|w|^2)^{-\alpha}}}$ 为标准加权 Laplace 算子, 其中 $\alpha > -1$, 简记为 $\overline{L_{\alpha}}$. 特别地, 若 $\alpha = 0$, 则 $\overline{L_{\alpha}} = \frac{\nabla^2}{4}$, ∇^2 为 Laplace 算子. 若一个函数 $u \in C^2(D)$ 满足 $\overline{L_{\alpha}} u = 0$, 则称它为 $\bar{\alpha}$ -调和映照. 关于这类映照近期的相关研究可参考文献[4, 7-9]. 其中 Chen 等^[4]给出了 $\bar{\alpha}$ -调和映照的表示定理^[4-8].

定理 B^[9] 设 $u(z)$ 是单位圆盘 D 内的 $\bar{\alpha}$ -调和映照, 它的边界函数为 $f(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n} e^{-in}$.

若 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, 则当 α 为正整数时, $u(z)$ 的表达式为
$$u(z) = h(z) + \overline{g(z)} + \sum_{k=1}^{\alpha} (1 - |z|^2)^k \overline{I_k}.$$

其中, I_k 的递推公式为

$$I_k = [(k-1)I_{k-1} + zI'_{k-1}]/k, \quad I_0 = g(z).$$

为了方便, 对于 D 内以 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为边界函数的 $\bar{\alpha}$ -调和映照 $u(z)$, 记为 $f_{u_{\alpha}}(z)$. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, $f_{u_1}(z) = f(z) + (1 - |z|^2) \overline{zg'(z)}$.

定义 2 设 $f_{u_{\alpha}}: D \rightarrow \mathbf{C}$ 是一个 $\bar{\alpha}$ -调和映照, 若 $\sup_{z \neq w} [X(f_{u_{\alpha}}(z), f_{u_{\alpha}}(w))/\delta(z, w)] < +\infty$, 则称 $f_{u_{\alpha}}(z)$ 是正规 $\bar{\alpha}$ -调和映照.

称 $B^{\alpha} = \{g(z) | g(z) \text{ 在 } D \text{ 内全纯}, \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\alpha} |g'(z)| < +\infty\}$ 为 Bloch 型空间, $0 < \alpha < +\infty$. Maccluer 等^[10]证明了 $g(z) \in B^{\alpha}$ 当且仅当 $g'(z) \in B^{\alpha+1}$.

设 z_1, z_2 是区域 Ω 内的任意两点, 记 $l(\gamma)$ 为连接 z_1, z_2 的任意可求长曲线的长度. 若存在常数 $1 \leq M < +\infty$, 使得 $l(\gamma) \leq M|z_1 - z_2|$, 则称 Ω 为 M -线性连结区域^[11].

2 主要结论与证明

研究 $\bar{\alpha}$ -调和映照的正规性问题. 首先利用梯度给出 $\bar{\alpha}$ -调和映照的正规性判别条件, 借助 $\bar{\alpha}$ -调和映照的表达方法, 利用归纳法证明结合 Bloch 函数的性质证明了一类 $\bar{\alpha}$ -调和映照的正规性; 利用预 Schwarz 导数的性质结合线性连结区域的几何特征给出 $\bar{\alpha}$ -调和映照的另一个正规性判别充分条件.

定理 1 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 内的调和映照, 若

$$\|f_{u_{\alpha}}\|_n := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \frac{|(f_{u_{\alpha}}(z))_z| + |(f_{u_{\alpha}}(z))_{\bar{z}}|}{1 + |f_{u_{\alpha}}(z)|^2} < +\infty,$$

则 $f_{u_a}(z)$ 是正规的.

证明: 假设 $\|f_{u_a}\|_n < +\infty, \forall z, w \in D, \gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 是连结 z, w 的双曲测地线, 则有

$$X(f_{u_a}(z), f_{u_a}(w)) \leq \|f_{u_a}\|_n \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt = \|f_{u_a}\|_n \delta(z, w).$$

所以有 $\frac{X(f_{u_a}(z), f_{u_a}(w))}{\delta(z, w)} \leq \|f_{u_a}\|_n < +\infty$, 故 $f_{u_a}(z)$ 是正规的.

引理 1 设 $A(x) = \frac{1+x^2}{1+(x-a)^2}$, 其中 $x \geq 0, a \geq 0$, 则 $A(x)$ 有上界.

证明: 1) 当 $a = 0$ 时, $A(x) = 1$, 有上界; 2) 当 $a > 0$ 时, 对 $A(x)$ 求导有 $A'(x) = 2a \times \frac{1-x^2+ax}{(1+(x-a)^2)^2}$.

令 $A'(x) = 0$, 有 $x = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. 又由 $A'(0) = \frac{2a}{(a^2+1)^2} > 0$, 所以 $A(x)$ 在 $(0, \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, +\infty)$ 单调递减, 从而有

$$\max_{x \geq 0} A(x) = A\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\sqrt{4/a^2+1}-1} < +\infty.$$

因此, $A(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内有上界.

命题 1 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 内的调和映照. 若 $f(z)$ 是正规的, 且有 $g(z) \in B^1$, 则 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

证明: 假设 $f(z)$ 是正规的. 由定理 A 得

$$\|f\|_n = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) \frac{|h'(z)| + |g'(z)|}{1+|f(z)|^2} < +\infty.$$

又由定理 B 得

$$f_{u_1}(z) = f(z) + (1-|z|^2) \overline{zg'(z)}.$$

$f_{u_1}(z)$ 分别对 z 和 \bar{z} 求偏导, 有

$$(f_{u_1}(z))_z = h'(z) - \overline{z^2 g'(z)}, \quad (f_{u_1}(z))_{\bar{z}} = (1-|z|^2) \overline{2g'(z) + zg''(z)}.$$

从而有

$$\begin{aligned} (1-|z|^2) \frac{|(f_{u_1}(z))_z| + |(f_{u_1}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &= \\ (1-|z|^2) \frac{|h'(z) - \overline{z^2 g'(z)}| + |(1-|z|^2) \overline{2g'(z) + zg''(z)}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &\leq \\ (1-|z|^2) \frac{|h'(z)| + |g'(z)| + (1-|z|^2)(|g'(z)| + |g''(z)|)}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &= \\ (1-|z|^2) \frac{|h'(z)| + |g'(z)|}{1+|f(z)|^2} \frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_1}(z)|^2} + (1-|z|^2)^2 \frac{(|g'(z)| + |g''(z)|)}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &\leq \\ \|f\|_n \frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_1}(z)|^2} + (1-|z|^2)^2 (|g'(z)| + |g''(z)|). \end{aligned}$$

因为 $g(z) \in B^1$, 所以有

$$B_1 = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |zg'(z)| \leq \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |g'(z)| < +\infty.$$

又由文献[5]可得 $\sup_{z \in D} (1-|z|^2)^2 |g''(z)| < +\infty$. 所以有 $(1-|z|^2)^2 (|g'(z)| + |g''(z)|) < +\infty$. 又

因为

$$\frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_1}(z)|^2} \leq \frac{1+|f(z)|^2}{1+(|f(z)| - (1-|z|^2)|zg'(z)|)^2},$$

所以有如下两种情况.

1) 当 $|f(z)| < B_1$ 时, 有

$$\frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_1}(z)|^2} \leq \frac{1+|f(z)|^2}{1+(|f(z)|-(1-|z|^2)|zg'(z)|)^2} \leq 1+|f(z)|^2 < 1+B_1^2.$$

2) 当 $|f(z)| \geq B_1$ 时, 由引理 1 可得

$$\frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_1}(z)|^2} \leq \frac{1+|f(z)|^2}{1+(|f(z)|-B_1)^2} < +\infty.$$

所以有

$$(1-|z|^2) \frac{|(f_{u_1}(z))_z| + |(f_{u_1}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} < +\infty.$$

故 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

由 $g(z) \in B^1$ 当且仅当 $g'(z) \in B^2$, 利用递推知 $g^{(a)}(z) \in B^{a+1}$. 从而由命题 1 可得到如下定理.

定理 2 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 内的调和映照. 若 $f(z)$ 是正规的, 且 $g(z) \in B^1$, 则对任意正整数 $\alpha, f_{u_\alpha}(z)$ 是正规的.

证明: 当 $\alpha=1$ 时, 命题 1 已证.

下面给出当 $\alpha>1$ 时的证明. $f_{u_\alpha}(z)$ 分别对 z 和 \bar{z} 求偏导, 有

$$\begin{aligned} (f_{u_\alpha}(z))_z &= h'(z) - \sum_{k=1}^{\alpha} k(1-|z|^2)^{k-1} \overline{zI_k}, \\ (f_{u_\alpha}(z))_{\bar{z}} &= \overline{g'(z)} - \sum_{k=1}^{\alpha} k(1-|z|^2)^{k-1} \overline{zI_k} + \sum_{k=1}^{\alpha} (1-|z|^2)^k \overline{I'_k}. \end{aligned}$$

所以有

$$(1-|z|^2) \frac{|(f_{u_\alpha}(z))_z| + |(f_{u_\alpha}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_\alpha}(z)|^2} \leq (1-|z|^2) \frac{|h'(z)| + |\overline{g'(z)}| + B + C}{1+|f_{u_\alpha}(z)|^2}.$$

其中: $B = 2 \sum_{k=1}^{\alpha} k(1-|z|^2)^{k-1} |zI_k|$; $C = \sum_{k=1}^{\alpha} (1-|z|^2)^k |I'_k|$.

下面证明 $(1-|z|^2)^k |I_k|$ 和 $(1-|z|^2)^{k+1} |I'_k|$ 是有界的.

当 $n=1$ 时, 由于有 $g(z) \in B^1$, 所以有

$$\begin{aligned} (1-|z|^2) |I_1| &= (1-|z|^2) |zg'(z)| < +\infty, \\ (1-|z|^2)^2 |I'_1| &= (1-|z|^2)^2 |g'(z) + zg''(z)| < +\infty. \end{aligned}$$

结论成立.

假设当 $n=k$ 时, 存在一个常数 M_k , 使得 $(1-|z|^2)^k |I_k| \leq M_k$; 由文献[4]知道必存在一个常数 N_k , 使得 $(1-|z|^2)^{k+1} |I'_k| \leq N_k$. 那么, 当 $n=k+1$ 时, 由 $I_{k+1} = \frac{kI_k + zI'_k}{k+1}$, 可得

$$(1-|z|^2)^{k+1} |I_{k+1}| \leq (1-|z|^2)^{k+1} \frac{k|I_k| + |zI'_k|}{k+1} \leq \frac{kM_k + N_k}{k+1} =: M_{k+1} < +\infty,$$

从而存在常数 N_{k+1} , 使得

$$(1-|z|^2)^{k+2} |I'_{k+1}| \leq N_{k+1} < +\infty.$$

因此, 由数学归纳法得 $(1-|z|^2)^k |I_k|$ 和 $(1-|z|^2)^{k+1} |I'_k|$ 是有界的. 所以对于给定正整数 α , 存在常数 M , 使得

$$2 \sum_{k=1}^{\alpha} k(1-|z|^2)^k |zI_k| + \sum_{k=1}^{\alpha} (1-|z|^2)^{k+1} |I'_k| \leq M,$$

故
$$(1-|z|^2) \frac{|(f_{u_\alpha}(z))_z| + |(f_{u_\alpha}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_\alpha}(z)|^2} \leq \|f\|_n \frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_\alpha}(z)|^2} + M.$$

由命题 1 可知 $\frac{1+|f(z)|^2}{1+|f_{u_\alpha}(z)|^2}$ 有上界, 故 $f_{u_\alpha}(z)$ 是正规的.

下面给出一个具体的例子.

例 1 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{\bar{z}^2}{3}, z \in D$, 则 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

证明: 简单计算可知 $f(z)$ 是正规的, 且 $g(z) \in B^1$. 又因为

$$(1-|z|^2) \frac{|(f_{u_1}(z))_z|+|(f_{u_1}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} \leqslant (1-|z|^2) \frac{\frac{1}{3}|3-2\bar{z}^3|+2(1-|z|^2)|z|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} < 3.$$

所以 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

但是当 $f(z)$ 和 $f_{u_1}(z)$ 都是正规的时, $g(z)$ 不一定属于 B^1 . 下面给出反例.

例 2 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=1+\frac{1}{1-\bar{z}}, z \in D$, 则 $f(z)$ 是正规的, $f_{u_1}(z)$ 是正规的, 但 $g(z) \notin B^1$.

证明: 因为有

$$(1-|z|^2) \frac{|h'(z)|+|g'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{1-|z|^2}{|2-z|^2+|1-z|^2} \leqslant 1,$$

所以 $f(z)$ 是正规的.

$f_{u_1}(z)=1+\frac{1}{1-\bar{z}}+(1-|z|^2)\frac{\overline{z}}{(1-z)^2}$ 分别对 z 和 \bar{z} 求偏导, 则有

$$(f_{u_1}(z))_z=-\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}, \quad (f_{u_1}(z))_{\bar{z}}=2(1-|z|^2)\overline{\frac{1}{(1-z)^3}}.$$

所以有

$$\begin{aligned} (1-|z|^2) \frac{|(f_{u_1}(z))_z|+|(f_{u_1}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &= \\ (1-|z|^2) \frac{\left|\frac{z}{1-z}\right|^2+2(1-|z|^2)\left|\frac{1}{(1-z)^3}\right|}{1+\left|1+\frac{1}{1-\bar{z}}+(1-|z|^2)\frac{\overline{z}}{(1-z)^2}\right|^2} &\leqslant \\ \frac{5(1-|z|^2)}{|1-z|^2+\left(2-\left|\frac{1-\bar{z}}{1-z}\right|^2\right)^2} &\leqslant \frac{5(1-|z|^2)}{(2-|z|^2)^2} \leqslant 5. \end{aligned}$$

故 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

当 z 取实数并趋于 1 时有

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-|z|^2) |g'(z)| = \lim_{z \rightarrow 1} (1-|z|^2) \left| \frac{1}{1-z} \right|^2 \rightarrow +\infty.$$

所以 $g(z) \notin B^1$.

反例 2 说明 $g(z) \in B^1$ 不是必要的.

下面利用线性连结的几何特征和预 Schwarz 导数条件来给出 $\bar{\alpha}$ 调和映照的正规性判别条件.

定理 3 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是 D 内的一个调和映照, $h(z)$ 是 M 线性连结区域且单叶, $g(z)$ 单叶解析. 若 $\| \omega \|_{\infty} < \frac{1}{5M}$, 则 $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

证明: 因为 $h(z)$ 是 M 线性连结区域且单叶, 且 $\| \omega \|_{\infty} < \frac{1}{5M}$, 则由命题 3^[3] 可知 $\left| \frac{h(z)}{g(z)} \right| \geqslant \frac{1}{M \| \omega \|_{\infty}} > 5$, 且 $\| f \|_n = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) \frac{|h'(z)|+|g'(z)|}{1+|f(z)|^2} = k < +\infty$.

设 $\phi(z)=\frac{a+z}{1+\bar{a}z} \in \text{Aut}(D), \forall a \in D$. 令 $G(z)=\frac{g\left(\frac{a+z}{1+\bar{a}z}\right)-g(a)}{(1-|a|^2)|g'(a)|}$. 因为 $g(z)$ 单叶解析, 所以 $G(z)$ 单叶解析, 且 $G(0)=G'(0)-1=0$. 因为

$$\left| \frac{G''(0)}{2} \right| = \left| \frac{(1-|a|^2)g''(a)-2g'(a)\bar{a}}{2|g'(a)|} \right| \leqslant 2,$$

所以有 $(1-|a|^2) \left| \frac{g''(a)}{g'(a)} \right| \leqslant 6$. 又因为 $a \in D$ 是任意的, 所以有 $(1-|z|^2) \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leqslant 6$.

由 $g(z)$ 单叶解析, 有

$$\left| \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

从而有

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| &\leq (1-|z|^2)\frac{1+|z|}{1-|z|}\leq 4. \\ f_{u_1}(z) \text{ 分别对 } z \text{ 和 } \bar{z} \text{ 求偏导, 有} \\ (f_{u_1}(z))_z &= h'(z) - \overline{z^2 g'(z)}, \\ (f_{u_1}(z))_{\bar{z}} &= (1-|z|^2)\overline{2g'(z) + zg''(z)}(1-|z|^2)\frac{|(f_{u_1}(z))_z| + |(f_{u_1}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} = \\ (1-|z|^2)\frac{|h'(z) - \overline{z^2 g'(z)}| + |(1-|z|^2)\overline{2g'(z) + zg''(z)}|}{1+|f_{u_1}(z)|^2} &\leq \\ 7k\left(1 + \frac{|f(z)|^2}{|f(z) + (1-|z|^2)\overline{zg'(z)}|^2}\right) &\leq 7k\left[1 + \left(\frac{\left|\frac{h(z)}{g(z)}\right| + 1}{\left|\frac{h(z)}{g(z)}\right| - 5}\right)^2\right]. \\ \text{令 } \rho(x) = \frac{x+1}{x-5}, x \in (a, +\infty), a > 5, \text{ 则 } \max_{x>a} \rho(x) = \frac{a+1}{a-5}, \text{ 所以有} \\ (1-|z|^2)\frac{|(f_{u_a}(z))_z| + |(f_{u_a}(z))_{\bar{z}}|}{1+|f_{u_a}(z)|^2} &\leq 7k\left(1 + \left(\frac{1+M\|\omega\|_\infty}{1-5M\|\omega\|_\infty}\right)^2\right) < +\infty. \end{aligned}$$

因此, $f_{u_1}(z)$ 是正规的.

参考文献:

[1] SHEIL-SMALL T. Constants for planar harmonic mappings[J]. London Mathematical Society, 1990, 42(2): 237-248. DOI: 10. 1112/jlms/s2-42. 2. 237.

[2] LAPPAN P. Some results on harmonic normal functions[J]. Mathematische Zeitschrift, 1965, 90(2): 155-159. DOI: 10. 1007/BF0112241.

[3] ARBELÁEZ H, HERNÁNDEZ R, SIERRA W. Normal harmonic mappings[J]. Monatshefte Für Mathematik, 2018, 190(3): 425-439. DOI: 10. 1007/s00605-018-1235-2.

[4] MU Jingjing, CHEN Xingdi. Landau-type theorems for solutions of a quasilinear differential equation[J]. Journal on Mathematical Study, 2014, 47(3): 295-304. DOI: 10. 4208/jms. v47n3. 14. 05.

[5] LI Peijin, WANG Xiantao, XIAO Qianhong. Several properties of $\bar{\alpha}$ -harmonic functions in the unit disk[J]. Monatsh Math, 2017, 184(4): 627-640. DOI: 10. 1007/s00605-017-1065-7.

[6] CHEN Xingdi. Lipschitz continuity for solutions of the $\bar{\alpha}$ -Poisson equation[J]. Science China Mathematics, 2019, 62(10): 1935-1946. DOI: 10. 1007/s11425-016-9300-5.

[7] 李孟华, 陈行堤. 非对称区间上调和函数的 Schwarz 引理[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2017, 38(6): 898-902. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201612009.

[8] DUREN P. Harmonic mapping in the plane[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. DOI: 10. 1017/CBO9780511546600.

[9] CHEN Xingdi, KALAJ D. A representation theorem for standard weighted harmonic mappings with an integer exponent and its applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 444(2): 1233-1241. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2016. 07. 035.

[10] MACCLUER B D, STROETHOFF K, ZHAO Ruhan. Generalized Schwarz-pick estimates[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003, 131(2): 593-599.

[11] AHFORS L V. Conformal invariants: Topics in geometric function theory[M]. New York-Düsseldorf-Johannesburg: Mc Graw-Hill Book Co, 1973.

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 黄心中)