第 41 卷　第 2 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 41　No. 2
2020 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2020

DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.201909018

集值向量均衡问题近似解映射的连续性

陈斌，王浩智

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 研究局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中扰动下的集值向量均衡问题的原问题和对偶问题. 建立原问题和对偶问题近似解映射的 Hausdorff 上半连续性和 Hausdorff 下半连续性的充分条件，改进和推广 Anh 等的研究结果.

关键词： 向量均衡问题；近似解映射；Hausdorff 连续性；向量优化问题

中图分类号： O 183.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2020)02-0272-05

Continuity of Approximate Solution Maps of Set-Valued Vector Euqilibrium Problems

CHEN Bin, WANG Haozhi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper studies the primal problem and dual problem of set-valued vector equilibrium under perturbation in locally convex Hausdorff topological vector spaces. Sufficient conditions for the Hausdorff upper semi-continuity and Hausdorff lower semi-continuity of the approximate solution maps. Our result improves and generalizes the existing results of Anh *et al*.

Keywords: vector equilibrium problems; approximate solution maps; Hausdorff continuity; vector optimization problems

均衡问题[1]为许多优化有关的重要问题提供了统一框架，如极值问题、变分不等式、互补问题、纳什均衡、极大极小问题、不动点问题，以及交通网络等. 在过去的 20 年，均衡问题解及近似解的存在性条件已被广泛研究[2-8]. 另一个重要的课题是研究均衡问题解及近似解的稳定性和敏感性分析. 目前，有很多学者研究了解及近似解的（半）连续和 Hölder 连续性[9-15]. 为了获得解或近似解的（半）连续性，许多文献利用了映射的单调性或者解映射的信息. 其中，映射的单调性可能导致整个解集是单点集. 此外，假设条件中涉及解映射的信息是不合理的，在实践中很难实现. 当处理含参向量均衡问题解映射的（半）连续性时，许多文献利用了标量化方法. 然而，这一方法只有对含参弱向量均衡问题有效，对强向量均衡问题则不适用. 文献[16]在未使用标量化方法的情况下，建立了强向量均衡问题和对偶强向量均衡问题近似解映射的 Hausdorff 上下半连续性的充分条件，改进了已有文献中的相关结果.

本文主要研究局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中扰动下的集值向量均衡问题的原问题和对偶问题，建立其近似解映射的 Hausdorff 上下半连续性的充分条件，改进和推广了文献[16]的已有结果.

收稿日期： 2019-09-17

通信作者： 陈斌（1984-），男，讲师，博士，主要从事变分不等式、向量优化和均衡问题的研究. E-mail：270267387@qq.com.

基金项目： 福建省高校创新团队发展计划（2018 年度）；福建省泉州市高层次人才团队资助项目（2017ZT012）；华侨大学高层次人才科研启动项目（605-50Y14040）

1　预备知识

以下除特别说明外，设 X 为局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间，Y,Z 为拓扑向量空间，$A\subseteq X$ 为非空紧凸子集，$\Lambda\subseteq Z$ 为非空子集，$C\subseteq Y$ 为闭凸点锥，$\mathrm{int}\,C\neq\varnothing$（$\mathrm{int}\,C$ 为 C 的内部），$F:A\times A\times\Lambda\to 2^Y$ 是集值映射. 对于 $\lambda\in\Lambda$，考虑以下集值向量均衡问题（SVEP）：找到 $\bar{x}\in A$，使得

$$F(\bar{x},y,\lambda)\subseteq C,\qquad \forall\, y\in A.$$

它的对偶问题（DSVEP）是：找到 $\bar{x}\in A$，使得

$$F(y,\bar{x},\lambda)\subseteq -C,\qquad \forall\, y\in A.$$

令 $e\in\mathrm{int}\,C$. 对于 $(\varepsilon,\lambda)\in R_+\times\Lambda$，设 SVEP 和 DSVEP 的 ε-近似解集分别为

$$\Pi(\varepsilon,\lambda)=\{x\in A\mid F(x,y,\lambda)+\varepsilon e\subseteq C,\forall\, y\in A\},$$

$$\Pi^d(\varepsilon,\lambda)=\{x\in A\mid F(y,x,\lambda)+\varepsilon e\subseteq -C,\forall\, y\in A\}.$$

以下先给出一些基本概念和引理.

设 F 为 X 到 Y 的集值映射.

定义 1[17]　ⅰ）若对于 Y 中任意满足 $F(x_0)\subseteq U$ 的开子集 U，都存在 x_0 的一个邻域 N，使 $F(N)\subseteq U$，则称 F 在 x_0 处上半连续.

ⅱ）若 Y 中满足 $F(x_0)\cap U\neq\varnothing$ 的任意开子集 U，都存在一个 x_0 的邻域 N，使得对于所有的 $x\in N$，都有 $F(x)\cap U\neq\varnothing$，则称 F 在 x_0 处下半连续.

ⅲ）若 F 在 x_0 处同时为上半连续和下半连续，则称 F 在 x_0 处连续.

引理 1[18]　F 在 x_0 处是下半连续的，当且仅当对于 $y_0\in F(x_0)$ 及所有 $x_\alpha\to x_0$，存在 $y_\alpha\in F(x_\alpha)$，使得 $y_\alpha\to y_0$.

定义 2[18]　ⅰ）F 在 x_0 处称为 Hausdorff 上半连续，如果对于 Y 中原点的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 N，使得

$$F(x)\subseteq F(x_0)+V,\qquad \forall\, x\in N.$$

ⅱ）F 在 x_0 处称为 Hausdorff 下半连续，如果对于 Y 中原点的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 N，则使得

$$F(x_0)\subseteq F(x)+V,\qquad \forall\, x\in N.$$

ⅲ）如果 F 在 x_0 处同时为 Hausdorff 上半连续和 Hausdorff 下半连续，则 F 在 x_0 处称为 Hausdorff 连续.

引理 2[18]　ⅰ）如果 F 在 x_0 处是上半连续，那么 F 在 x_0 处是 Hausdorff 上半连续；反之，如果 F 在 x_0 处是 Hausdorff 上半连续，且 $F(x_0)$ 是紧集，那么 F 在 x_0 处是上半连续.

ⅱ）如果 F 在 x_0 处为 Hausdorff 下半连续，则 F 在 x_0 处为下半连续；反之，如果 F 在 x_0 处是下半连续，且 $F(x_0)$ 是紧集，那么 F 在 x_0 处是 Hausdorff 下半连续.

定义 3　如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 λ_0 的邻域 N，使得对于所有 $x,y\in A$ 和 $\lambda_1,\lambda_2\in N$，都有

$$F(x,y,\lambda_1)\subseteq F(x,y,\lambda_2)+\varepsilon[-e,e],$$

则称集值映射 $F:A\times A\times\Lambda\to 2^Y$ 关于 $e\in\mathrm{int}\,C$ 在 λ_0 处对于 $(x,y)\in A\times A$ 一致连续，其中，$[-e,e]:=\{x\in Y\mid x\in(e-C)\cap(-e+C)\}$.

定义 4[18]　如果对于任意 $x_1,x_2\in A$ 和 $t\in[0,1]$，有

$$F(tx_1+(1-t)x_2)\subseteq tF(x_1)+(1-t)F(x_2)+C,\tag{1}$$

则称映射 $F:X\to 2^Y$ 在凸集 $A\subseteq X$ 上是 C-凹的.

如果将式(1)替换为

$$F(tx_1+(1-t)x_2)\subseteq tF(x_1)+(1+t)F(x_2)-C,$$

则称映射 $F:X\to 2^Y$ 在凸集 $A\subseteq X$ 上是 C-凸的.

对于固定的 $\lambda_0\in\Lambda$，可以得到以下结果.

引理 3　如果对于任意 $y\in A$，$F(\cdot,y,\lambda_0)$ 在凸集 A 上是 C-凹的，那么 $\Pi(\varepsilon,\lambda_0)$ 是凸集.

证明：任取 $x_1,x_2\in\Pi(\varepsilon,\lambda_0)\subset A$ 和 $t\in[0,1]$，那么 $tx_1+(1-t)x_2\in A$，且对于所有 $y\in A$，有

$$\begin{cases} F(x_1,y,\lambda_0)+\varepsilon e\subseteq C, \\ F(x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon e\subseteq C. \end{cases}$$

利用 F 的 C-凹性,对于所有 $y\in A$,有

$$F(tx_1+(1-t)x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon e\subseteq tF(x_1,y,\lambda_0)+(1-t)F(x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon e+C\subseteq$$
$$t[F(x_1,y,\lambda_0)+\varepsilon e]+(1-t)[F(x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon e]+C\subseteq C,$$

即 $tx_1+(1-t)x_2\in\Pi(\varepsilon,\lambda_0)$,从而 $\Pi(\varepsilon,\lambda_0)$是凸集.

2 主要定理和结果

由于已有文献对精确解和近似解的存在性进行了深入研究,因此总是假定近似解集在参考点$(\varepsilon_0,\lambda_0)$附近是非空的.

定理1 对于SVEP,假设在参考点$(\varepsilon_0,\lambda_0)\in R_+\times\Lambda$的邻域内近似解存在,且

ⅰ) $F(x,y,\cdot)$关于 $e\in\operatorname{int}C$ 在 λ_0 处对于$(x,y)\in A\times A$一致连续;

ⅱ) 对于所有 $y\in A$,$F(\cdot,y,\lambda_0)$在凸集 A 上是 C-凹的.

那么,Π 在$(\varepsilon_0,\lambda_0)$处是Hausdorff连续的.

证明:令 $\delta\in(0,\varepsilon_0)$,取集合 $N=(\varepsilon_0-\delta,\varepsilon_0+\delta)$作为给定的 ε_0 的邻域.任取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in N$,其中 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$,实数 η 满足 $0<\eta<\varepsilon_2-\varepsilon_1$,由定理1的假设条件ⅰ)可知,存在 λ_0 的邻域 $N_\eta(\lambda_0)$,使得对于任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in N_\eta(\lambda_0)$和 $x,y\in A$ 有

$$F(x,y,\lambda_2)\subseteq F(x,y,\lambda_1)+\eta[-e,e]. \tag{2}$$

对于任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in N_\eta(\lambda_0)$,下证

$$\Pi(\varepsilon_1,\lambda_1)\subseteq\Pi(\varepsilon_2,\lambda_2). \tag{3}$$

设 $x\in\Pi(\varepsilon_1,\lambda_1)$,则对于所有 $y\in A$,有

$$F(x,y,\lambda_1)+\varepsilon_1 e\subseteq C.$$

任取 $z_2\in F(x,y,\lambda_2)$,由式(2)存在 $z_1\in F(x,y,\lambda_1)$及 $c_1\in C$,使得 $z_2=z_1+\eta(-e+c_1)$.从而有

$$z_2+\varepsilon_2 e=z_1+\varepsilon_1 e+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)e-\eta e+\eta c_1=z_1+\varepsilon_1 e+(\varepsilon_2-\varepsilon_1-\eta)e+\eta c_1\subseteq C,$$

则 $F(x,y,\lambda_2)+\varepsilon_2 e\subseteq C$,$\forall y\in A$,即 $x\in\Pi(\varepsilon_2,\lambda_2)$.

由式(3)可知,对于任意的 $\lambda\in N_\eta(\lambda_0)$和 $\varepsilon\in N$,有

$$\Pi(\varepsilon_0-\delta,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon,\lambda)\subseteq\Pi(\varepsilon_0+\delta,\lambda_0). \tag{4}$$

对于满足 $1<k<\varepsilon_2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^{-1}$的每个实数 k,设 $\gamma=\varepsilon_2+k(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$,则有

$$\frac{1}{k}\gamma e+\left(1-\frac{1}{k}\right)\varepsilon_2 e=\varepsilon_1 e.$$

下证

$$\frac{1}{k}\Pi(\gamma,\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{k}\right)\Pi(\varepsilon_2,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0). \tag{5}$$

任取 $x_1\in\Pi(\gamma,\lambda_0)$,$x_2\in\Pi(\varepsilon_2,\lambda_0)$.由 A 的凸性可知 $k^{-1}x_1+(1-k^{-1})x_2\in A$,且对于所有 $y\in A$,有

$$F(x_1,y,\lambda_0)+\gamma e\subseteq C,\qquad F(x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon_2 e\subseteq C.$$

因此,有

$$\frac{1}{k}F(x_1,y,\lambda_0)+\frac{1}{k}\gamma e+\left(1-\frac{1}{k}\right)F(x_2,y,\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{k}\right)\varepsilon_2 e\subseteq C.$$

利用 F 的 C-凹性,对于任意的 $y\in A$,有

$$F\left(\frac{1}{k}x_1+\left(1-\frac{1}{k}\right)x_2,y,\lambda_0\right)+\varepsilon_1 e\subseteq\frac{1}{k}F(x_1,y,\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{k}\right)F(x_2,y,\lambda_0)+\varepsilon_1 e+C\subseteq C.$$

即

$$k^{-1}x_1+(1-k^{-1})x_2\in\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0).$$

由此可得到式(5),并由式(5)可得到

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\Pi(\varepsilon_2,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0)-\frac{1}{k}\Pi(\gamma,\lambda_0),$$

则有

$$\Pi(\varepsilon_2,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0)+\frac{1}{k-1}[\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0)-\Pi(\gamma,\lambda_0)]\subseteq\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0)+\frac{1}{k-1}(A-A).$$

由于 A 是紧集，故它是有界的. 因此，对于 X 中原点的任意闭凸邻域 V，存在 $\rho>0$，使得 $A\text{-}A\subseteq\rho V$. 因此有

$$\Pi(\varepsilon_2,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_1,\lambda_0)+\frac{\rho}{k-1}V. \tag{6}$$

设 $\delta=\delta_0<\dfrac{\varepsilon_0}{\rho+1}$. 考虑 $N=(\varepsilon_0-\delta_0,\varepsilon_0+\delta_0)$. 在式(6)中，取 $\varepsilon_1=\varepsilon_0-\delta_0$ 和 $\varepsilon_2=\varepsilon_0$，$k=\rho+1$，从而有 $1<k<\varepsilon_2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^{-1}$，又由式(4)可得到

$$\Pi(\varepsilon_0,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_0-\delta_0,\lambda_0)+V\subseteq\Pi(\varepsilon,\lambda)+V.$$

故 Π 在 $(\varepsilon_0,\lambda_0)$ 处是 Hausdorff 下半连续.

在式(6)中，取 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=\varepsilon_0+\delta_0$，$k=\rho+1$，可得到

$$\Pi(\varepsilon_0+\delta_0,\lambda_0)\subseteq\Pi(\varepsilon_0,\lambda_0)+V.$$

结合式(4)，可得出 $\Pi(\varepsilon,\lambda)\subseteq\Pi(\varepsilon_0,\lambda_0)+V$，即 Π 在 $(\varepsilon_0,\lambda_0)$ 处是 Hausdorff 上半连续.

注 1　当 F 为单值映射时，就得到了文献[16]的定理 1，定理 1 推广了文献[16]的定理 1.

注 2　定理 1 的假设条件 ⅱ)是必不可少的，如下例所示.

例 1　设 $X=R$，$\Lambda=[0,1]$，$A=[0,2]$，$Y=R$，$C=R_+$，$e=1\in\operatorname{int}C$，$\varepsilon_0=10^{-3}$，$\lambda_0=0$ 和 $F(x,y,\lambda)=\left[x^2-x-2\lambda-10^{-3},x^2-x-2\lambda-\dfrac{1}{2}10^{-3}\right]$. 由此可以看到定理 1 的假设 ⅰ)已经满足. 当 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$，有

$$F\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2,y,\lambda_0\right)=F\left(\frac{1}{4},y,0\right)=\left[-\frac{3}{16}-10^{-3},-\frac{3}{16}-\frac{1}{2}10^{-3}\right],$$

但由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}F(x_1,y,\lambda_0)+\frac{1}{2}F(x_2,y,\lambda_0)+C=\frac{1}{2}F(0,y,0)+\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2},y,0\right)+C=\\&\frac{1}{2}\left[-10^{-3},-\frac{1}{2}10^{-3}\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}-10^{-3},-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}10^{-3}\right]+C=\\&\left[-\frac{1}{8}-10^{-3},+\infty\right),\end{aligned}$$

显然有

$$F\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2,y,\lambda_0\right)\not\subset\frac{1}{2}F(x_1,y,\lambda_0)+\frac{1}{2}F(x_2,y,\lambda_0)+C.$$

因此，F 的 C-凹性条件不满足. 近似解映射 Π 在 $(10^{-3},0)$ 处不是 Hausdorff 连续的. 因为 $0\in\Pi(10^{-3},0)=\{0\}\cup[1,2]$，取 $(\varepsilon_n,\lambda_n)=\left(10^{-3}+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\to(10^{-3},0)$，对于任意的 $x_n\in\Pi(\varepsilon_n,\lambda_n)\subseteq(1,2]$，都有 $x_n\not\to 0$. 由引理 1 可知，Π 在 $(10^{-3},0)$ 处非下半连续；而由引理 2 可知，近似解映射 Π 在 $(10^{-3},0)$ 处不是 Hausdorff 连续的.

注 3　当 F 退化为单值映射时，上例改进了文献[16]中的例 1.

注 4　约束集的紧性条件不能删除，如下例所示.

例 2　令 $X=R$，$\Lambda=[0,1]$，$A=(2,3]$，$Y=R$，$C=R_+$，$e=1\in\operatorname{int}C$，$\varepsilon_0=10^{-3}$，$\lambda_0=0$，且 $F(x,y,\lambda)=[\lambda(x-y),\lambda(x-y)+1]$. 易知满足定理 1 的假设. 通过计算可以得到

$$\Pi(\varepsilon,\lambda)=\begin{cases}(2,3], & \lambda=0,\\ \{3\}, & \lambda\neq 0.\end{cases}$$

Π 在 $(10^{-3},0)$ 处非下半连续，由引理 2 可知，近似解映射 Π 在 $(10^{-3},0)$ 处不是 Hausdorff 连续的.

与定理 1 的证明类似，可以得到集值向量均衡问题的对偶问题近似解映射 Hausdorff 连续性的充分性条件.

定理2 对于DSVEP,假设在参考点$(\varepsilon_0,\lambda_0)\in R_+\times\Lambda$的邻域内近似解存在,且ⅰ)$F(y,x,\cdot)$关于$e\in\mathrm{int}\,C$在$\lambda_0$处对于$(y,x)\in A\times A$一致连续;ⅱ)对于所有$y\in A$,$F(y,\cdot,\lambda_0)$在凸集$A$上是$C$-凸的.那么,$\Pi^d$在$(\varepsilon_0,\lambda_0)$是Hausdorff连续的.

参考文献:

[1] BLUM E,OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Stud,1994,63(1/2/3/4):123-145. DOI:10.1093/jpids/pix105/4823046.

[2] BIANCHI M,SCHAIBLE S. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems[J]. J Optim Theory Appl,1996,90:31-43. DOI:10.1007/BF02192244.

[3] BIANCHI M,HADJISAVVAS N,SCHAIBLE S. Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions[J]. J Optim Theory Appl,1997,92:527-542. DOI:10.1023/A:1022603406244.

[4] GONG Xunhua. Strong vector equilibrium problems[J]. J Glob Optim,2006,36(3):339-349. DOI:10.1007/s10898-006-9012-5.

[5] HAN Yu,HUANG Nanjing. Existence and stability of solutions for a class of generalized vector equilibrium problems[J]. Positivity,2016,20(4):829-846. DOI:10.1007/s11117-015-0389-6.

[6] HAN Yu,HUANG Nanjing. Some characterizations of the approximate solutions to generalized vector equilibrium problems[J]. J Ind Manag Optim,2016,12(3):1135-1151. DOI:10.3934/jimo.2016.12.1135.

[7] HAI N X,KHANH P Q,QUAN N H. On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems[J]. J Glob Optim,2009,45(4):565-581. DOI:10.1007/s10898-008-9390-y.

[8] KHANHP Q,LONG V S T. Invariant-point theorems and existence of solutions to optimization-related problems[J]. J Glob Optim,2014,58(3):545-564. DOI:10.1007/s10898-013-0065-y.

[9] KIM W K,KUM S,LEE K H. Semicontinuity of the solution multifunctions of the parametric generalized operator equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal,2009,71(12):e2182-e2187. DOI:10.1016/j.na.2009.04.036.

[10] LI X B,LI Shihong. Continuity of approximate solution mapping for parametric equilibrium problems[J]. J Glob Optim,2011,51(3):541-548. DOI:10.1007/s10898-010-9641-6.

[11] LI S J,LIU M H,ZHANG Y,*et al*. Continuity of solution mappings to parametric generalized strong vector equilibrium problems[J]. J Glob Optim,2013,55(3):597-610. DOI:10.1007/s10898-012-9985-1.

[12] CHEN Bin,HUANG Nanjing. Continuity of solution mapping to parametric generalized vector equilibrium problems[J]. J Glob Optim,2013,56(4):1515-1528. DOI:10.1007/s10898-012-9904-5.

[13] HAN Yu,HUANG Nanjing,YAO J C. Connectedness and stability of the approximate solutions togeneralized vector quasi-equilibrium problems[J]. J Nonlinear Convex A,2016,18(6):1079-1101.

[14] ANH L Q,KHANH P Q,TAM T N. On Hölder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal,2012,75(4):2293-2303. DOI:10.1016/j.na.2011.10.029.

[15] LI S J,CHEN C R,LI X B,*et al*. Hölder continuity and upper estimates of solutions to vector quasi-equilibrium problems[J]. Eur J Oper Res,2011,210(2):148-157. DOI:10.1016/j.ejor.2010.10.005.

[16] ANH L Q,KHANH P Q,TAM T N. Continuity of approximate solution maps of primal and dualvector equilibrium problems[J]. Optim Lett,2019,13(2):201-211. DOI:10.3934/jimo.2017013.

[17] AUBIN J P,EKELAND I. Applied nonlinear analysis[M]. New York:Wiley,1984.

[18] AUBIN J P,FRANKOWSKA H. Set-valued analysis[M]. Boston:Birkhäuser,1990.

[19] MIN Chao,FAN Feifei,YANG Zhaozhong,*et al*. An iterative algorithm for the nonlinear MC^2 model with variational inequality method[J]. Mathematics,2019,7(6):514-526. DOI:10.3390/math7060514.

(**责任编辑:** 黄仲一 **英文审校:** 黄心中)