第 41 卷　第 2 期
2020 年 3 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 41　No. 2
Mar. 2020

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201911057

一类具有反应扩散的两种群竞争的双稳定性

陈梅香，谢溪庄

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类带有反应扩散项的两种群 Gilpin-Ayala 竞争系统.利用单调半流双稳定性理论，得到该竞争系统存在双稳定性的全局动力学行为.即在一定条件下，系统存在一条无序的、不变的一阶光滑分界线，使得当初值在分界线上方，种群 2 赢得竞争；而当初值在分界线下方，则种群 1 赢得竞争.

关键词： Gilpin-Ayala 竞争模型；反应扩散；双稳定；平衡解；解半流

中图分类号： O 175.26；O 175.13　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2020)02-0268-04

Bi-Stability of Two-Species Competition Model With Reaction Diffusion

CHEN Meixiang, XIE Xizhuang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the bi-stability of a Gilpin-Ayala competition model with reaction diffusion. By virtue of the theory of saddle-point for monotone semiflows, we prove that the system admits a K-unordered, invariant C^1 separatrix in which species 2 wins whenever the initial value is above the separatrix, while species 1 wins whenever the initial value is below the separatrix.

Keywords: Gilpin-Ayala competition model; reaction diffusion; bi-stability; steady-state; solution semiflow

1　预备知识

在 Lotka-Volterra 竞争模型的基础上，Gilpin 等[1-2]通过对果蝇的系列实验，得到 Gilpin-Ayala 竞争模型为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)(b_1 - a_{11}x_1^{\theta_1}(t) - a_{12}x_2(t)),\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)(b_2 - a_{22}x_2^{\theta_2}(t) - a_{21}x_1(t)).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)中：$(x_1(0), x_2(0)) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}_+^2$.

对于该模型，有下面 4 种竞争结果(详见文献[3]，取 $\tau_1=\tau_2=0$ 时)：

1) 若 $\dfrac{b_1}{a_{12}} > \left(\dfrac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\dfrac{b_2}{a_{21}} < \left(\dfrac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$，则种群 1 赢得竞争；

2) 若 $\dfrac{b_1}{a_{12}} < \left(\dfrac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\dfrac{b_2}{a_{21}} > \left(\dfrac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$，则种群 2 赢得竞争；

3) 若 $\dfrac{b_1}{a_{12}} > \left(\dfrac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\dfrac{b_2}{a_{21}} > \left(\dfrac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$，则种群 1 和种群 2 共存在一个稳定的平衡态；

收稿日期： 2019-11-24

通信作者： 陈梅香(1984-)，女，讲师，博士，主要从事应用与计算数学的研究. E-mail:mxchen@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11871231, 11526095)

4）若$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$，则两个边界平衡态是局部渐近稳定，而共存平衡态是不稳定的.

此外，文献[4]考虑了具有阶段结构和非局部空间效应影响的 Gilpin-Ayala 竞争模型的全局稳定性；文献[5]讨论了带有正反馈作用下的 Gilpin-Ayala 模型的动力学性态；文献[6-9]则研究了该模型的随机情形. 特别地，Liao 等[10]研究了带有反应扩散项的 Gilpin-Ayala 模型，并通过构造李雅普诺夫函数，得到正平衡态的全局渐近稳定性. 受文献[11-12]关于单调半流存在双稳定性的启发，本文考虑带有反应扩散项和 Neumann 边值的 Gilpin-Ayala 竞争系统，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}=d_1\Delta u_1+u_1(b_1-a_{11}u_1^{\theta_1}-a_{12}u_2),\\&\frac{\partial u_2}{\partial t}=d_2\Delta u_2+u_2(b_2-a_{22}u_2^{\theta_2}-a_{21}u_1),\\&\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{v}}=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式(2)中：$\Omega\subset\mathbf{R}^m(m\geqslant1)$是一个有界的，开凸区域；$\partial\Omega$ 是一个 $C^{2+\alpha}(\alpha\in(0,1))$流形；$\boldsymbol{v}$ 是$\partial\Omega$ 的单位外法向量；$u_i(x,t)$，$i=1,2$ 是种群 i 在 t 时刻 x 位置的密度；d_i 是种群 i 的扩散系数；b_i 是种群 i 的内禀增长率；a_{ii}是种群 i 的密度制约参数，a_{12}和 a_{21}是两种群竞争系数，且假设 $\theta_i\geqslant1$，$i=1,2$ 或 $\theta_i<1$，$i=1,2$.

2　平衡解的稳定性及其证明

对方程(2)，令$\begin{cases}u_1(b_1-a_{11}u_1^{\theta_1}-a_{12}u_2)=0\\u_2(b_2-a_{22}u_2^{\theta_2}-a_{21}u_1)=0\end{cases}$，可解得系统(2)有 3 个空间一致的常数平衡解：$E_0=(0,0)$，$E_1=\left(\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}},0\right)$和 $E_2=\left(0,\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\right)$. 此外，若$\frac{b_1}{a_{12}}>\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\frac{b_2}{a_{21}}>\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$或$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$，该系统还存在一个正平衡解 $E=(u^*,v^*)$. 其中，u^*，v^* 满足$\begin{cases}b_1-a_{11}(u^*)^{\theta_1}-a_{12}v^*=0\\b_2-a_{22}(v^*)^{\theta_2}-a_{21}u^*=0\end{cases}$.

对于正平衡态的全局稳定性，文献[10]已有介绍. 在这里，将借助单调半流的双稳定性理论研究系统(2)在 $\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$条件下的全局动力学性态.

Jiang 等[11]给出单调半流和抽象竞争系统的双稳定性(也称为“鞍点结构”)理论. 假设 X_1 和 X_2 是分别具有正锥 X_1^+和 X_2^+的两个有序的 Banach 空间，序关系记为“$\leqslant$”. 令 $X^+=X_1^+\times X_2^+$，则 $\mathrm{int}\,X^+=\mathrm{int}\,X_1^+\times\mathrm{int}\,X_2^+$. 记 $K=X_1^+\times(-X_2^+)$，那么，$X=X_1\times X_2$ 也是具有正锥 K 的有序的 Banach 空间，其中，$\leqslant_K(<_K,\ll_K)$表示由 K 诱导的序关系(严格序关系，强序关系). 记 $C_0=X_1^+\setminus\{0\}\times X_2^+\setminus\{0\}$，$C_1=\{(x_1,0):x_1\in X_1^+\}$，$C_2=\{(0,x_2):x_2\in X_2^+\}$. 并假设连续可微半流 $\varphi_t:[0,+\infty)\times X^+\to X^+$满足如下 4 点假设.

A1）存在 $\tau>0$，使得算子 φ_τ 是严格 α-contraction，即存在 $0<k<1$，对于$\forall B\subset X^+$，有 $\alpha(\varphi_\tau(B))\leqslant k\alpha(B)$；

A2）半流 φ_t 是一致有界的，即当 $B\subset X^+$时，$O(B)=\bigcup\limits_{t\geqslant0}\varphi_t(B)$是有界的；

A3）$\forall t>0$，$\varphi_t(C_j)\subset C_j$，$j=0,1,2$，半流 φ_t 在 X^+上是严格 K-monotone，在 C_0 上是严格 K-order，且在 C_i，$i=1,2$ 上是强序保持半流；

A4）半流 φ_t 在 X^+上的平衡解是 $E_0=(0,0)$，$E_1=(x_1,0)$，$E_2=(0,x_2)$和 $E=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$. 其中，x_1，$\bar{x}_1\in\mathrm{int}\,X_1$，$x_2$，$\bar{x}_2\in\mathrm{int}\,X_2$；而且 E_0，E 是线性不稳定的，E_1，E_2 是线性稳定的.

引理 1(文献[11]的定理 2.4)　假设 C^1-半流 φ_t 满足 A1)～A4)，且 φ_t 在 $\mathrm{int}\,X^+$上是严格 K-monotone，则 $\Gamma=X^+\setminus(B_1\cup B_2)\subset C_0\cup\{E_0\}$关于 K-order 是无序的，且是余维 1 的正不变流形，其中，B_1，B_2 分别是 E_1，E_2 的吸引域.

引理 2(文献[13]的定理 2.3.22)　令$(\mu_i,\phi_i(x))$，$i=0,1,2,\cdots$，是在 Ω 上具有齐次 Neumann 边界条件的算子-Δ 的特征值和特征函数，则 $0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots$.

引理 3 若$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$,$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$,系统(2)的平衡解 E_0,E 是线性不稳定的,而 E_1,E_2 是线性稳定的.

证明:对系统(2)在平衡解做线性化,可得该系统在平衡解的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda+\mu_i d_1-b_1+a_{11}(1+\theta_1)u^{\theta_1}+a_{12}v & a_{12}u \\ a_{21}v & \lambda+\mu_i d_2-b_2+a_{21}u+a_{22}(1+\theta_2)v^{\theta_2} \end{vmatrix}=0.$$

当$(u,v)=E_0=(0,0)$时,系统在 E_0 处的特征方程为$(\lambda+\mu_i d_1-b_1)(\lambda+\mu_i d_2-b_2)=0$. 取 $i=0$ 时,可以看出该方程有两个实的正根,$E_0=(0,0)$是线性不稳定的.

当$(u,v)=E_1=\left(\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}},0\right)$时,系统在 E_1 处的特征方程为$(\lambda+\mu_i d_1+b_1\theta_1)\times\left(\lambda+\mu_i d_2-b_2+a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\right)=0$. 可得 $\lambda=-\mu_i d_1-b_1\theta_1<0$ 或 $\lambda=-\mu_i d_2+b_2-a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$,因为$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$,所以 $\lambda<0$. 因此,$E_1=\left(\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}},0\right)$是线性稳定的.

当$(u,v)=E_2$ 时,系统在 E_2 处的特征方程为$\left(\lambda+\mu_i d_1-b_1+a_{12}\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\right)(\lambda+\mu_i d_2+b_2\theta_2)=0$,可得 $\lambda=-\mu_i d_2-b_2\theta_2<0$ 或 $\lambda=-\mu_i d_1+b_1-a_{12}\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$. 因为$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$,所以,$\lambda<0$. 因此,$E_2=\left(0,\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\right)$是线性稳定的.

当$(u,v)=E=(u^*,v^*)$时,系统在 E 处的特征方程为$(\lambda+\mu_i d_1+a_{11}\theta_1(u^*)^{\theta_1})\times(\lambda+\mu_i d_2+a_{22}\times\theta_2(v^*)^{\theta_2})-a_{12}a_{21}u^*v^*=0$. 记:$F(\lambda)=(\lambda+\mu_i d_1+a_{11}\theta_1(u^*)^{\theta_1})(\lambda+\mu_i d_2+a_{22}\theta_2(v^*)^{\theta_2})-a_{12}a_{21}u^*v^*$. 取 $i=0$,因为$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$,$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$,所以有 $F(0)<0$(见文献[3]性质 3.4). 因为 $F(+\infty)=+\infty$,所以至少存在一个 $\lambda^*>0$,使得 $F(\lambda^*)=0$,因此,$E=(u^*,v^*)$是线性不稳定的. 证毕.

3 双稳定性结构及其证明

记:$X_i\triangleq C(\Omega)$,$X_i^+\triangleq\{\phi_i\,|\,\phi_i\geqslant 0,\phi_i\in X_i\}$,$\operatorname{int}X_i^+=\{\phi_i\,|\,\phi_i>0,\phi_i\in X_i\}$,$i=1,2$. 可知 X_i 是以 X_i^+ 为正锥的有序的 Banach 空间. 令 $X\triangleq X_1\times X_2$,$X^+\triangleq X_1^+\times X_2^+$,$K\triangleq X_1^+\times(-X_2^+)$,则 X 是以 X^+ 和 K 为正锥的两个乘积空间. 取初值$(u(0,\cdot,\phi_1),v(0,\cdot,\phi_2))=(\phi_1,\phi_2)\triangleq\phi$,由文献[13-14]中关于抛物型方程初边值问题的比较原理可得:$\forall\phi\in X^+$,系统(2)在$[0,+\infty)$上存在唯一解$(u(t,x,\phi_1),v(t,x,\phi_2))$,因此可以定义解半流为 $\varphi_t(\phi)\triangleq(u(t,\cdot,\phi_1),v(t,\cdot,\phi_2))$,$\forall\phi\in X^+$.

定理 1 若$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$,$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$,系统(2)存在双稳定的全局动力学,即系统存在一条无 K 序的、余维 1 的、不变的 C^1 分界线 $\Gamma=X^+\setminus(B_1\cup B_2)$($B_i$ 是平衡解 E_i,$i=1,2$ 的吸引域),使得当初值在 C^1 上方时,系统(2)的解收敛于 E_2;当初值在 C^1 下方时,系统(2)的解收敛于 E_1.

证明:由文献[15]中的推论 7.4.2 可知,对$\forall t>0$,解半流 $\varphi_t(\phi):X^+\to X^+$是紧算子. 又由紧算子的性质可知,解半流 φ_t 是严格 α-contraction 的. 因为系统(2)是竞争系统,由比较原理可知,满足初边值的解$(u(t,x,\phi_1),v(t,x,\phi_2))$是一致有界的. 作变换 $\tilde{u}=u$,$\tilde{v}=-v$,可得系统(2)在该变换下是一个合作系统,即关于正锥 K 是单调的. 从而系统(2)的解半流 φ_t 在 X^+ 上是 K-monotone,在 $\operatorname{int}X^+$ 上是严格 K-monotone 的. 又因为该系统是一个抛物型的 Kolmogorov 系统,显然有对于$\forall t>0$,$\varphi_t(C_j)\subset C_j$,$j=0,1,2$. 根据引理 3,在$\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$,$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$条件下,系统(2)在平衡解 E_0,E 处是线性不稳定的,而在 E_1,E_2 处是线性稳定的. 又因为 Ω 是凸的,由文献[16]可知系统(2)的非常数平衡解是线性不稳定的.

因此，系统(2)的解半流 φ_t 满足假设 A1)～A4). 根据引理 1，可得系统(2)存在一条无 K 序的、余维 1 的、不变的分界线 $\Gamma=X^+\backslash(B_1\cup B_2)$，其中，$B_i$ 分别是平衡解 E_i，$i=1,2$ 的吸引域. 从而当初始值在 Γ 上方时，系统的解收敛到 E_2，意味着种群 2 赢得竞争；当初始值在 Γ 下方时，系统的解收敛到 E_1，意味着种群 1 赢得竞争. 证毕.

鉴于系统(1)的两个竞争排斥平衡态是局部渐近稳定，而竞争共存平衡态是不稳定的情形. 文中着重考虑了带有反应扩散项和 Neumann 边值的 Gilpin-Ayala 竞争系统(2). 利用平衡解的线性稳定化方法，同样得到在 $\frac{b_1}{a_{12}}<\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$，$\frac{b_2}{a_{21}}<\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$ 条件下，系统(2)在平凡平衡解 E_0 和共存平衡解 E 是局部不稳定，而在两个边界平衡解 E_1，E_2 是局部渐近稳定. 再根据单调半流的双稳定理论，得到该系统双稳定的全局结果，即系统存在一条无序的、不变的光滑分界线，使得当初值在分界线上方，种群 2 赢得竞争；当初值在分界线下方，种群 1 赢得竞争.

参考文献：

[1] GILPIN M E, AYALA F J. Global models of growth and competition[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1973, 70(12): 3590-3593. DOI: 10.1073/pnas.70.12.3590.

[2] GILPIN M E, AYALA F J. Schoener's model and drosophila competition[J]. Theoretical Population Biology, 1976, 9(1): 12-14. DOI: 10.1016/0040-5809(76)90031-9.

[3] LIU Shengqiang, XIE Xizhuang, TANG Jianliang. Competing population model with nonlinear intraspecific regulation and maturation delays[J]. International Journal of Biomathematics, 2012, 5(3): 111-132. DOI: 10.1142/S1793524512600078.

[4] 谢溪庄. 具有阶段结构和非局部空间效应的竞争系统的稳定性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2012, 33(6): 715-720. DOI: 10.11830/issn.1000-5013.2012.06.0715.

[5] MOORE C M, CATELLA S A, ABBOTT K C. Population dynamics of mutualism and intraspecific density dependence: How θ-logistic density dependence affects mutualistic positive feedback[J]. Ecological Modelling, 2018, 368: 191-197. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2017.11.016.

[6] SETTATI A, HAMDOUNE S, IMLAHI A, *et al*. Extinction and persistence of a stochastic Gilpin-Ayala model under regime switching on patches[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 90: 110-117. DOI: 10.1016/j.aml.2018.10.019.

[7] WANG Kai, ZHU Yanling. Asymptotic properties of a stochastic Gilpin-Ayala model under regime switching[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 32: 79-90. DOI: 10.1016/j.nahs.2018.10.011.

[8] SETTATI A, LAHROUZ A. Stability and ergodicity of a stochastic Gilpin-Ayala model under regime switching on patchs[J]. International Journal of Biomathematics, 2017, 10(6): 1750090. DOI: 10.1142/S1793524517500905.

[9] LU Chun, CHEN Lijuan, WANG Yumin, *et al*. The threshold of stochastic Gilpin-Ayala model subject to general Lévy jumps[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2019, 60: 731-747. DOI: 10.1007/s12190-018-01234-x.

[10] LIAO Xiaoxin, LI Jia. Stability in Gilpin-Ayala competition models with diffusion[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 1997, 28(10): 1751-1758. DOI: 10.1016/0362-546X(95)00242-N.

[11] JIANG Jifa, LIANG Xing, ZHAO Xiaoqiang. Saddle-point behavior for monotone semiflows and reaction-diffusion models[J]. J Differential Equations, 2004, 203(2): 313-330. DOI: 10.1016/j.jde.2004.05.002.

[12] ZHAO Xiaoqiang. Dynamical systems in population biology[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2017.

[13] 叶其孝, 李正元, 王明新, 等. 反应扩散方程引论[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2011.

[14] 林支桂. 数学生态学导引[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[15] SMITH H L. Monotone dyanmical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems [M]// Mathematical Surveys and Monographs. Providence: American Mathematical Society, 1995.

[16] KISHIMOTO K, WEINBERGER H. The spatial homogeneity of stable of equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains[J]. J Differential Equations, 1985, 58(1): 15-21. DOI: 10.1016/0022-0396(85)90020-8.

（责任编辑：黄仲一　　英文审校：黄心中）